Werk

Label: Article

Jahr: 1958

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0083|log171

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ASYMPTOTICKÉ VZORCE PRO ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y'' + f(t)\, y = 0$

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha

(Došlo dne 3. října 1957)

DT: 517.941

V této práci jsou pro řešení diferenciální rovnice (1) odvozeny asymptotické vzorce (2) za předpokladu, že funkce $f \geqq$ konst > 0 a funkce $f^{-\alpha}$, kde α je libovolné číslo $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, je konvexní na intervalu $\langle t_0, \infty)$.

V článku M. Zlámala (viz [2]) byly dokázány pro řešení diferenciální rovnice

$$y'' + f(t)\, y = 0 \tag{1}$$

asymptotické vzorce

$$\begin{aligned} y(t) &= f^{-1/4}(t) \{y_0 \sin (\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\, \mathrm{d}s + \varphi_0) + o(1)\}\,, \\ y'(t) &= f^{1/4}(t) \{y_0 \cos (\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\, \mathrm{d}s + \varphi_0) + o(1)\} \end{aligned} \tag{2}$$

za předpokladu, že funkce $f \geqq$ konst > 0 a $f^{-1/4}$ je konvexní na intervalu $\langle t_0, \infty)$. V článku J. Kurzweila (viz [3]) je uvedeno bez důkazu, že k tomu, aby platily asymptotické vzorce (2), stačí předpokládat, že je konvexní funkce $f^{-\alpha}$, kde $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

V této práci je tento důkaz proveden. Jednoduchým způsobem jsou pak odvozeny asymptotické vzorce pro diferenciální rovnici

$$(m(t)\, y')' + q(t)\, y = 0\,. \tag{3}$$

Dále je uveden příklad, že k tomu, aby platily asymptotické vzorce (2), již nestačí předpoklad, že funkce $f^{-1/2}$ je konvexní.

I

Nejprve uvedeme některé **vlastnosti konvexních funkcí**, které budeme v dalším potřebovat.

Buď g konvexní funkce definovaná na intervalu $\langle t_0, \infty)$ a $0 < g(t) \leqq$ konst. Pak platí:

a) *g je v intervalu $\langle t_0, \infty)$ nerostoucí.*

b) *g je v intervalu (t_0, ∞) spojitá, má v každém bodě vlastní derivaci zprava a vlastní derivaci zleva. Funkce g'_+ a g'_- jsou neklesající a platí $g'_-(t) \leqq g'_+(t)$ pro každé $t \in (t_0, \infty)$. Body, v nichž funkce g nemá vlastní derivaci, tvoří spočetnou množinu* (viz [4] kap. V.).

Protože se nám jedná o asymptotické vlastnosti, můžeme bez újmy obecnosti předpokládat spojitost a existenci vlastní derivace zprava i v bodě t_0.

c) *g je absolutně spojitá na každém intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $t_0 \leqq a < b < \infty$.*

Důkaz. Podle vlastnosti b) je g spojitá v $\langle a, b\rangle$. Derivovaná čísla $D^+g(c) = D_+g(c) = g'_+(c)$ a tedy platí $g'_+(a) \leqq D^+g(c) \leqq g'_+(b)$ pro $c \in \langle a, b\rangle$. To stačí (viz [4] str. 198 pozn. 14), aby g byla absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$.

d) *$g'_+(t) \leqq 0$ pro $t \in \langle t_0, \infty)$.*

Důkaz. Kdyby pro $a > t_0$ bylo $g'_+(a) = c > 0$, pak pro všechny body $t > a$ by platilo $g'_+(t) \geqq c$ a (viz [5], věta 154)

$$g(t) = \int_{g(a)}^{g(t)} ds + g(a) = \int_a^t g'_+(s)\, ds + g(a) \geqq c(t - a) + g(a) \to \infty$$

a to je spor.

e) $\lim\limits_{t\to\infty} g'_+(t) = 0$.

Důkaz. Funkce g'_+ je monotonní, omezená, tedy $\lim\limits_{t\to\infty} g'_+(t)$ existuje. Podle předcházející vlastnosti je nekladná. Kdyby $\lim\limits_{t\to\infty} g'_+(t) = -d^2$, $d \neq 0$, pak pro všechna $t \in \langle t_0, \infty)$ je $g'_+(t) \leqq -d^2$ a

$$g(t) = \int_{g(t_0)}^{g(t)} ds + g(t_0) = \int_{t_0}^t g'_+(s)\, ds + g(t_0) \leqq -d^2(t - t_0) + g(t_0) \to -\infty\,,$$

což je spor.

Pomocná věta 1. *Buď g konvexní funkce definovaná na intervalu $\langle t_0, \infty)$ taková, že pro každé $t \in \langle t_0, \infty)$ je $0 < g(t) \leqq$ konst. Pak ke každému $\eta > 0$ existuje funkce $\bar{g}$ mající spojitou nezápornou druhou derivaci $(0 < \bar{g}(t) \leqq g(t_0))$ taková, že*

$$|g(t) - \bar{g}(t)| < \eta$$

pro všechna $t \in \langle t_0, \infty)$ a

$$|\bar{g}'(t)| \leqq p(t)\,,$$

kde $p(t) = |g'_+(t - 2)|$ pro $t \in \langle t_0 + 2, \infty)$ a $p(t) = |g'_+(t_0)|$ pro $t \in \langle t_0, t_0 + 2\rangle$.

Důkaz. Budeme aproximovat funkci g'_+ funkcí $\bar{g}'$. Zvolme $\eta > 0$. Zřejmě lze zvolit body τ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ tak, že τ_i jsou body spojitosti funkce g'_+ (g'_+ je spojitá skoro všude) a že

$$\begin{gathered} \tau_i - \tau_{i-1} < \tfrac{3}{2}\,, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots \to \infty\,, \\ (g'_+(\tau_{i+1}) - g'_+(\tau_i))\,(\tau_{i+1} - \tau_i) < \eta\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Funkci $\bar{g}'$ sestrojíme v každém intervalu $\langle \tau_i, \tau_{i+1} \rangle$ následujícím způsobem: Buď je $g'_+(\tau_i) = g'_+(\tau_{i+1})$, pak položíme $\bar{g}'(t) = g'_+(t)$, nebo je $g'_+(\tau_i) < g'_+(\tau_{i+1})$. V tom případě určíme nejprve číslo $d > 0$ tak, aby

$$(g'_+(\tau_{i+1}) - g'_+(\tau_i))\, d = - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} g'_+(s)\, \mathrm{d}s + g'_+(\tau_{i+1})\,(\tau_{i+1} - \tau_i)\,.$$

Je $0 < d < \tau_{i+1} - \tau_i$. Položme $d_0 = \tau_i$, $d_2 = \tau_i + d$, $d_4 = \tau_{i+1}$, $d_1 = d_2 - \min(d_4 - d_2, d_2 - d_0)$, $d_3 = d_2 + \min(d_4 - d_2, d_2 - d_0)$. Platí $d_3 - d_2 = d_2 - d_1 = \frac{1}{2}(d_3 - d_1)$.

A nyní definujeme

$$\bar{g}'(t) = g'_+(\tau_i) \qquad \text{pro} \quad t \in \langle d_0, d_1 \rangle\,,$$

$$\bar{g}'(t) = \frac{2(g'_+(\tau_{i+1}) - g'_+(\tau_i))}{(d_3 - d_1)^2}\,(t - d_1)^2 + g'_+(\tau_i) \qquad \text{pro} \quad t \in \langle d_1, d_2 \rangle\,,$$

$$\bar{g}'(t) = - \frac{2(g'_+(\tau_{i+1}) - g'_+(\tau_i))}{(d_3 - d_1)^2}\,(t - d_3)^2 + g'_+(\tau_{i+1}) \qquad \text{pro} \quad t \in \langle d_2, d_3 \rangle\,,$$

$$\bar{g}'(t) = g'_+(\tau_{i+1}) \qquad \text{pro} \quad t \in \langle d_3, d_4 \rangle\,.$$

Je zřejmé, že takto definovaná funkce $\bar{g}'$ má všude spojitou nezápornou derivaci. Podle vlastnosti d) je $\bar{g}'(t) < 0$. Z konstrukce dále plyne, že

$$|\bar{g}'(t)| \leqq p(t)\,,$$

kde p je funkce definovaná ve znění věty. Podle vlastnosti e) plyne, že

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = 0\,.$$

Definujme nyní funkci $\bar{g}$ vztahem

$$\bar{g}(t) = \int_{t_0}^{t} \bar{g}'(s)\, \mathrm{d}s + g(t_0)\,.$$

Pak $\bar{g}$ má spojitou nezápornou druhou derivaci, je nerostoucí a shora omezená $\bar{g}(t) \leqq \bar{g}(t_0) = g(t_0)$.

Snadno se spočítá, že

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} g'_+(s)\, \mathrm{d}s = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \bar{g}'(s)\, \mathrm{d}s\,, \tag{5}$$

a tedy pro $t \in \langle \tau_j, \tau_{j+1} \rangle$ platí

$$|g(t) - \bar{g}(t)| = \left| \int_{\tau_j}^{t} g'_+(s)\, \mathrm{d}s - \int_{\tau_j}^{t} \bar{g}'(s)\, \mathrm{d}s \right| \leqq \int_{\tau_j}^{t} |g'_+(s) - \bar{g}'(s)|\, \mathrm{d}s \leqq$$

$$\leqq \int_{\tau_j}^{t} (\bar{g}'_+(\tau_{j+1}) - \bar{g}'_+(\tau_j))\, \mathrm{d}s\,,$$

což je podle (4) menší než η.

Zbývá dokázat, že $\bar{g}(t) > 0$ pro $t \in \langle t_0, \infty)$. Nechť existuje $c \in \langle t_0, \infty)$ takové, že $\bar{g}(c) = 0$. Pak existuje číslo r tak, že $c \in \langle \tau_{r-1}, \tau_r \rangle$. Podle (5) platí $\bar{g}(\tau_r) = g(\tau_r) > 0$. To je spor, neboť $\bar{g}$ je nerostoucí.

Pomocná věta 2. *Buď f funkce definovaná na intervalu $\langle t_0, \infty)$ taková, že pro každé $t \in \langle t_0, \infty)$ je $f(t) \geqq$ konst > 0. Nechť f má spojitou druhou derivaci. Nechť existuje reálné číslo α $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$ takové, že $f^{-\alpha}$ je konvexní v $\langle t_0, \infty)$. Pak integrál*

$$\int_{t_0}^{\infty} |f^{-1/4}(s)(f^{-1/4}(s))''| \, \mathrm{d}s$$

konverguje a platí pro $t \geqq t_0$

$$\int_{t}^{\infty} |f^{-1/4}(s)(f^{-1/4}(s))''| \, \mathrm{d}s \leqq c(f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1} \, |(f^{-\alpha}(t))| \, ,$$

kde konstanta c závisí jen na čísle α.

Důkaz. Z rovnosti

$$\tfrac{1}{2}(f^{-1/2}(t))'' = \{f^{-1/4}(t)(f^{-1/4}(t))'\}' = (f^{-1/4}(t))'^2 + f^{-1/4}(t)(f^{-1/4}(t))''$$

plyne

$$|f^{-1/4}(t)(f^{-1/4}(t))| \leqq \tfrac{1}{2}|(f^{-1/2}(t))''| + (f^{-1/4}(t))'^2 \, .$$

Platí

$$(f^{-1/2}(t))' = \frac{1}{2\alpha} (f^{-\alpha}(t))^{\frac{1}{2\alpha}-1} (f^{-\alpha}(t))' \, .$$

Funkce $(f^{-\alpha})^{\frac{1}{2\alpha}-1}$ je omezená a nerostoucí v $\langle t_0, \infty)$ (neboť $f^{-\alpha}$ je nerostoucí a $\frac{1}{2\alpha} - 1 > 0\Big)$. Funkce $(f^{-\alpha})'$ je neklesající a omezená v $\langle t_0, \infty)$. Obě funkce mají tedy konečnou variaci a tedy i funkce $(f^{-1/2})'$ má konečnou variaci a zřejmě platí

$$\int_{t}^{\infty} |(f^{-1/2}(s))''| \, \mathrm{d}s = \operatorname*{var}_{\langle t, \infty)} (f^{-1/2}(s))' \leqq \frac{1}{\alpha} (f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1} \, |(f^{-\alpha}(t))'| \, .$$

Dále platí

$$(f^{-1/4}(t))'^2 = \frac{1}{16\alpha^2} (f^{-\alpha}(t))^{\frac{1}{2\alpha}-2} (f^{-\alpha}(t))'^2 \, .$$

Z rovnosti

$$\int_{f^{-\alpha}(t)}^{f^{-\alpha}(\infty)} x^{\frac{1}{2\alpha}-2} \, \mathrm{d}x = \int_{t}^{\infty} (f^{-\alpha}(s))^{\frac{1}{2\alpha}-2} (f^{-\alpha}(s))' \, \mathrm{d}s$$

plyne konvergence integrálu vpravo, a protože je $(f^{-\alpha}(t))'_{t=t_0} \leqq (f^{-\alpha}(t))' \leqq 0$, i konvergence integrálu $\int_{t}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'^2 \, \mathrm{d}s$. Snadno se spočte, že

$$\int_t^\infty (f^{-1/4}(s))'^2 \, ds \leqq \frac{1}{8\alpha} \cdot \frac{1}{1-2\alpha} (f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1} |(f^{-\alpha}(t))'| .$$

Tím je věta dokázána.

V dalším budeme potřebovat ještě následující tvrzení (viz [1] str. 46):

Pomocná věta 3. *Buďte φ, ψ nezáporné spojité funkce, c kladná konstanta. Nechť pro $t \geqq t_0$ platí*

$$\varphi(t) \leqq c + \int_{t_0}^t \varphi(s)\, \psi(s) \, ds .$$

Potom je pro $t \geqq t_0$

$$\varphi(t) \leqq c \exp \left(\int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) .$$

II

Věta 1. *Buď f funkce definovaná na intervalu $\langle t_0, \infty)$ taková, že pro každé $t \in \langle t_0, \infty)$ je $f(t) \geqq$ konst > 0. Nechť existuje reálné číslo α $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$ takové, že $f^{-\alpha}$ je konvexní na intervalu $\langle t_0, \infty)$. Potom pro obecné řešení diferenciální rovnice (1) platí následující asymptotické vzorce:*

$$\begin{aligned} y(t) &= f^{-1/4}(t) \{y_0 \sin (\int_{t_0}^t f^{1/2}(s) \, ds + \varphi_0) + \gamma(t)\} , \\ y'(t) &= f^{1/4}(t) \{y_0 \cos (\int_{t_0}^t f(s)^{1/2} \, ds + \varphi_0) + \delta(t)\} , \end{aligned} \tag{6}$$

kde $\gamma(t) \to 0$, $\delta(t) \to 0$ pro $t \to \infty$, a platí pro $t \geqq t_0$

$$|\gamma(t + 2)| \leqq \text{konst} \, |(f^{-\alpha}(t))'_+| ; \quad |\delta(t + 2)| \leqq \text{konst} \, |(f^{-\alpha}(t))'_+| .$$

Není-li y nulové řešení, pak $y_0 \neq 0$.

Důkaz. Větu dokážeme nejprve za předpokladu, že funkce f má spojitou druhou derivaci.

Diferenciální rovnici

$$z'' + \{f(t) - f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(t))''\} z = 0 \tag{7}$$

převedeme na soustavu

$$\mathbf{v}' = \begin{Vmatrix} 0 , & 1 \\ -f(t) + f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(t))'', & 0 \end{Vmatrix} \mathbf{v} , \tag{8}$$

která má obecné řešení

$$\mathbf{v}(t) = \begin{Vmatrix} z_0 f^{-1/4}(t) \sin(\int_{t_0}^t f^{1/2}(s) \, ds + \psi_0) \\ z_0 (f^{-1/4}(t))' \sin(\int_{t_0}^t f^{1/2}(s) \, ds + \psi_0) + z_0 f^{1/4}(t) \cos(\int_{t_0}^t f^{1/2}(s) \, ds + \psi_0) \end{Vmatrix} . \tag{9}$$

Podobně rovnici (1) převedeme na soustavu dvou lineárních rovnic a upravíme takto

$$u' = \begin{Vmatrix} 0 & , \ 1 \\ -f(t) + f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(t))'' , & 0 \end{Vmatrix} u + \begin{Vmatrix} 0 & , \ 0 \\ -f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(t))'' , & 0 \end{Vmatrix} u . \tag{10}$$

Rovnice (10) je vlastně rovnice (8) s pravou stranou. Její obecné řešení je dáno vzorcem (viz [1], kap. I, věta 3)

$$u(t) = v(t) + \int_{t_0}^{t} V(t)\, V^{-1}(s)\, B(s)\, u(s)\, ds .$$

V je matice, kde prvním sloupcem je řešení rovnice (8) dané počáteční podmínkou $v_1^{(1)}(t_0) = 1$, $v_2^{(1)}(t_0) = 0$; druhým sloupcem je řešení rovnice (8) dané počáteční podmínkou $v_1^{(2)}(t_0) = 0$, $v_2^{(2)}(t_0) = 1$. Determinant matice V je (viz [1], kap. I, věta 2) roven jedné.

V^{-1} je matice inversní k matici V

$$V^{-1}(t) = \begin{Vmatrix} v_2^{(2)}(t), & -\, v_1^{(2)}(t) \\ -\, v_2^{(1)}(t), & v_1^{(1)}(t) \end{Vmatrix} ,$$

B je matice

$$B(t) = \begin{Vmatrix} 0 & , \ 0 \\ -\, f^{1/4}(t)(f(t)^{-1/4})'' , & 0 \end{Vmatrix} .$$

Snadno se nyní spočítá

$$V(t)\, V^{-1}(s)\, B(s)\, u(s) =$$

$$= \begin{Vmatrix} -\, f^{-1/4}(t)(f^{-1/4}(s))''(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr)\, u_1(s) \\ -\, \{f^{1/4}(t)(f^{-1/4}(s))''(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr) + (f^{-1/4}(t))'(f^{-1/4}(s))''(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr)\}\, u_1(s) \end{Vmatrix}$$

a odtud plyne, že

$$u_1(t) = f^{-1/4}(t)\, \{z_0 \sin(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(r)\, dr + \varphi_0) - \int_{t_0}^{t} (f^{-1/4}(s))''\, (\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr)\, u_1(s)\, ds\} ,$$

$$\tag{11}$$

$$u_2(t) = f^{1/4}(t)\, \{z_0 \cos (\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(r)\, dr + \varphi_0) - \int_{t_0}^{t} (f^{-1/4}(s))''\, (\cos \int_{t_0}^{t} f^{1/2}(r)\, dr)\, u_1(s)\, ds\} +$$

$$+ (f^{-1/4}(t))'\, \{z_0 \sin (\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(t)\, dr + \varphi_0) - \int_{t_0}^{t} (f^{-1/4}(s))''\, (\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr)\, u_1(s)\, ds\} .$$

Z vyjádření (11) je vidět, že

$$|f^{1/4}(t)\, u_1(t)| \leqq |z_0| + \int_{t_0}^{t} |f^{-1/4}(s)(f^{-1/4}(s))''| \,.\, |f^{1/4}(s)\, u_1(s)|\, ds ,$$

a tedy podle pomocných vět 2 a 3 je

$$|f^{1/4}(t)\, u_1(t)| \leqq |z_0| \exp \left(\int_{t_0}^{t} |f^{-1/4}(s)(f^{-1/4}(s))''|\, ds\right) \leqq$$

$$\leqq |z_0| \exp \{c(f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1}\, |(f^{-\alpha}(t))'_{t=t_0}|\}\,. \tag{12}$$

Použijeme-li tento výsledek, obdržíme, že integrály

$$\int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds\,, \quad \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds\,,$$

$$\int_{t}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds\,, \quad \int_{t}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds$$

konvergují pro každé $t \in \langle t_0, \infty)$.

Dokážeme, že vektor

$$\left\| \begin{array}{l} f^{-1/4}(t) \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds \\ f^{1/4}(t) \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds + \\ \qquad + (f^{-1/4}(t))' \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dt\right) u_1(s)\, ds \end{array} \right\|$$

je řešením soustavy (8).

Označíme-li

$$(f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s) = g_1(s, t) \text{ a } (f^{-1/4}(s))'' \left(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s) = g_2(s, t)\,,$$

pak obě funkce $g_1(s, t)$, $g_2(s, t)$ jsou integrovatelné pro každé $t \in \langle t_0, \infty)$, parciální derivace $\frac{\partial g_1}{\partial t}$, $\frac{\partial g_2}{\partial t}$ existují pro všechny body $(s, t) \in \langle t_0, \infty) \times \langle t_0, \infty)$ a mají integrovatelné majoranty. Můžeme derivovat za integračním znamením (viz [5], věta 108). Dosazením do soustavy (8) se pak snadno přesvědčíme o správnosti našeho tvrzení.

Tedy můžeme psát

$$f^{-1/4}(t) \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds = f^{-1/4}(t)\, Z_0 \sin \left(\int_{t_0}^t f^{1/2}(s)\, ds + \Psi_0\right),$$

$$f^{1/4}(t) \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds + \tag{13}$$

$$+ (f^{-1/4}(t))' \int_{t_0}^{\infty} (f^{-1/4}(s))'' \left(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\, dr\right) u_1(s)\, ds = Z_0 f^{1/4}(t) \cos \left(\int_{t_0}^t f^{1/2}(r)\, dr + \Psi_0\right) +$$

$$+ (f^{-1/4}(t))'\, Z_0 \sin \left(\int_{t_0}^t f^{1/2}(s)\, ds + \Psi_0\right).$$

Položíme-li

$$y_0 = \sqrt{z_0^2 + Z_0^2 - 2z_0Z_0 \cos(\psi_0 - \Psi_0)}\,, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{z_0 \sin \psi_0 - Z_0 \sin \Psi_0}{z_0 \cos \psi_0 - Z_0 \cos \Psi_0}\,,$$

pak vztahy (11) můžeme přepsat takto:

$$u_1(t) = f^{-1/4}(t)\,\{y_0 \sin (\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,ds + \varphi_0) + \int_t^{\infty} (f^{-1/4}(s))''\,(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\,dr)\,u_1(s)\,ds\}\,,$$

$$u_2(t) = f^{1/4}(t)\,\{y_0 \cos (\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s) + \varphi_0) + \int_t^{\infty} (f^{-1/4}(s))''\,(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\,dr)\,u_1(s)\,ds\} +$$

$$+ (f^{-1/4}(t))'\,\{y_0 \sin (\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,ds + \varphi_0) + \int_t^{\infty} (f^{-1/4}(s))''\,(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\,dr) u_1(s)\,ds\}\,.$$

Označíme

$$\gamma(t) = \int_t^{\infty} (f^{-1/4}(s))''\,(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\,dr)\,u_1(s)\,ds\,,$$

$$\delta(t) = f^{-1/4}(t)(f^{-1/4}(t))'\,y_0 \sin (\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,ds + \varphi_0) + \int_t^{\infty} (f^{-1/4}(s))''\,(\cos \int_s^t f^{1/2}(r)\,dr)\,u_1(s)ds +$$

$$+ f^{-1/4}(t)\,(f^{-1/4}(t))' \int_t^{\infty} (f^{-1/4}(s))''\,(\sin \int_s^t f^{1/2}(r)\,dr)\,u_1(s)\,ds\,.$$

Použijeme-li nyní vztahu

$$f^{-1/4}(t)\,(f^{-1/4}(t))' = \frac{1}{2}\,(f^{-1/2}(t))' = \frac{1}{4\alpha}\,(f^{-\alpha}(t))^{\frac{1}{2\alpha}-1}\,(f^{-\alpha}(t))',$$

pomocné věty 2 a odhadu (12), obdržíme

$$\gamma(t) \to 0\,, \quad \delta(t) \to 0 \text{ pro } t \to \infty\,, \quad |\gamma(t+2)| \leqq \text{konst}\,|(f^{-\alpha}(t))'|\,,$$
$$|\delta(t+2)| \leqq \text{konst}\,|(f^{-\alpha}(t))'|\,.$$

Dokážeme, že pro nenulové řešení je $y_0 \neq 0$. Zřejmě je $z_0 \neq 0$. Stačí dokázat, že $z_0 \neq Z_0$. Podle vlastnosti e) k libovolně malému $\eta > 0$ lze zvolit t_0 tak, aby

$$|(f^{-\alpha}(t))'_{t=t_0}| < \eta\,.$$

Zvolíme-li vhodně η, obdržíme ze vztahů (13), že $Z_0^2 \leqq \frac{1}{2}z_0^2$.

Tím je první část důkazu hotova.

Nyní dokážeme asymptotické vzorce (6) bez doplňujících předpokladů o funkci f. Podle pomocné věty 1 lze na intervalu $\langle t_0, \infty)$ sestrojit k funkci $f^{-\alpha}$ stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí $\bar{g}_n = f_n^{-\alpha}$ takových, že mají nezápornou spojitou derivaci a pro všechna n platí

$$0 < f_n^{-\alpha}(t) \leqq f_n^{-\alpha}(t_0) = f^{-\alpha}(t_0)\,, \quad |(f_n^{-\alpha}(t))'| \leqq p(t)\,,$$

kde $p(t+2) = |(f^{-\alpha}(t))'_+|$.

Funkce f_n mají spojitou druhou derivaci, pro $t \in \langle t_0, \infty)$ platí $0 < \text{konst} \leqq$ $\leqq f_n(t)$. Funkce f_n konvergují stejnoměrně k f na každém ohraničeném intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$, kde $t_0 < t_1 < \infty$.

Pro obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + f_n(t)\, y = 0$ platí asymptotické vzorce (6).

Podle obecné věty o závislosti řešení systému diferenciálních rovnice na parametru platí: Buď y_n řešení rovnice $y'' + f_n(t)\, y = 0$ a y_n' jeho derivace, určené počáteční podmínkou

$$y_n(t_0) = a\,, \quad y_n'(t_0) = b\,.$$

Potom $y_n(t)$, $y_n'(t)$ jsou na každém ohraničeném intervalu stejně omezené a

$$\lim_{n \to \infty} y_n(t) = y(t)\,, \quad \lim_{n \to \infty} y_n'(t) = y'(t)\,,$$

kde $y(t_0) = a$, $y'(t_0) = b$ a y je řešení rovnice (1).

Pro y_n platí asymptotické vzorce

$$y_n(t) = f_n^{-1/4}(t)\,\{y_{0,n} \sin\,(\int_{t_0}^{t} f_n^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_{0,n}) + \gamma_n(t)\}\,,$$

$$y_n'(t) = f_n^{1/4}(t)\,\{y_{0,n} \cos\,(\int_{t_0}^{t} f_n^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_{0,n}) + \delta_n(t)\}\,.$$

φ_{0n} je zřejmě možné volit vždy z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a můžeme tedy vybrat posloupnost $y_{n,i}(t)$ tak, že $\varphi_{0,n_i} \to \varphi_0$. Z konstrukce funkcí f_n je vidět, že $(f_n^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1} = (f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1}$; $(f_n^{-\alpha}(t))'_{t=t_0} = (f^{-\alpha}(t))'_{t=t_0}$. Ze vzorce (11) plyne, že z_0 nezávisí na n.

Je tedy

$$|\gamma_n(t)| \leqq |z_0| \int_t^{\infty} |(f_n^{-1/4}(s))''\, f_n^{-1/4}(s)|\,\mathrm{d}s \exp\,\{c(f^{-\alpha}(t_0))^{\frac{1}{2\alpha}-1}\, |(f^{-\alpha}(t))'_{t=t_0}|\} \leqq \text{konst}\; p(t)\,.$$

Posloupnost $y_{0,n}$ je omezená a lze tedy vybrat $y_{n_i}(t)$ tak, že $y_{0,n_i} \to y_0$.

Protože $y_n(t)$ konverguje k $y(t)$ a $f_n^{-1/4}(t)\, y_{0,n} \sin\,(\int_{t_0}^{t} f_n^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_{0,n})$ konverguje k $f^{-1/4}(t)\, y_0 \sin\,(\int_{t_0}^{t} f^{1/2}(s)\,\mathrm{d}s + \varphi_0)$ pro každé $t \in \langle t_0, \infty)$, musí $\gamma_n(t)$ konvergovat bodově k funkci $\gamma(t)$, která splňuje vztah

$$|\gamma(t)| \leqq \text{konst}\; p(t)\,.$$

Podobně, protože $y_n'(t)$ konverguje k $y'(t)$, musí také $\delta_n(t)$ konvergovat bodově k funkci $\delta(t)$, o které opět platí

$$|\delta(t)| \leqq \text{konst}\; p(t)\,.$$

Řešení y má tedy asymptotické vyjádření (6). Stejně jako v první části důkazu se dokáže, že $y_0 \neq 0$ pro každé nenulové řešení.

Diferenciální rovnice $(m(t)\,y')' + q(t)\,y = 0$ se dá substitucí $x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{m(s)}\,\mathrm{d}s$ převést na tvar (1). Pak z věty 1 plyne následující tvrzení.

Věta 2. *Buď m funkce mající spojitou derivaci, q spojitá funkce na intervalu $\langle t_0, \infty)$. Buď $m(t)\,q(t) \geqq$ konst > 0 a nechť*

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{m(s)} \to \infty\,.$$

Utvořme k funkci x funkci inversní a označme

$$m^*(x) = m(t(x))\,, \quad q^*(x) = q(t(x))\,.$$

Buď α libovolné číslo takové, že $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Nechť $(m^*(x)\,q^*(x))^{-\alpha}$ je konvexní pro $x \in \langle 0, \infty)$. Potom pro obecné řešení diferenciální rovnice

$$(m(t)\,y')' + q(t)\,y = 0$$

platí následující asymptotické vzorce:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{m(t)\,q(t)}} \left\{y_0 \sin\left(\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{q(s)}{m(s)}}\,\mathrm{d}s + \varphi_0\right) + o(1)\right\},$$

$$y'(t) = \sqrt[4]{\frac{q(t)}{m^3(t)}} \left\{y_0 \cos\left(\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{q(s)}{m(s)}}\,\mathrm{d}s + \varphi_0\right) + o(1)\right\}.$$

III

Ve větě 1 jsou dokázány asymptotické vzorce pro řešení diferenciální rovnice (1) za předpokladu, že $f \geqq$ konst > 0 a $f^{-\alpha}$ je konvexní na intervalu $\langle t_0, \infty)$ pro nějaké α $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$. Následující příklad ukáže, že nelze předpokládat $0 < \alpha \leqq \frac{1}{2}$.

Sestrojíme nejprve na intervalu $\langle 0, \infty)$ funkci φ takto: Zvolme $\varphi(0) = 1$. Pak existuje právě jedno číslo $0 < a_1 < 1$ tak, že

$$\frac{a_1 - 1}{16} \lg a_1 = 5\pi\,,$$

neboť funkce $D_1(x) = \dfrac{x - 1}{16} \lg x$ je v intervalu $(0, 1\rangle$ spojitá, klesající a platí $D_1(1) = 0$, $\lim_{x \to 0+} D_1(x) = \infty$. Definujeme $\varphi_1(t) = \frac{a_1 - 1}{2} t + 1$ pro $t \in \left\langle 0, \frac{2}{1 - a_1} \right\rangle$. Rovnice $y'' + \frac{1}{\varphi_1^2} y = 0$ má řešení určené počáteční podmínkou $y(0) = 0, y'(0) \neq 0$:

$$y(t) = \sqrt{\varphi_1(t)}\, y_0^{(1)} \sin \left(\frac{\sqrt{4 - k_1^2}}{2k_1} \lg \varphi_1(t) \right),$$

kde $k_1 = \frac{a_1 - 1}{2} < 0$.

Zvolme $t_1 \geqq 2$ tak, aby $y(t_1) = 0$ a $y(t) \neq 0$ pro $t \in \langle 2, t_1)$. Označíme $y'(t_1) = c_1$ a definujeme $\varphi(t) = \varphi_1(t)$ pro $t \in \langle 0, t_1 \rangle$.

Nyní zvolíme $0 < a_2 < \varphi(t_1)$ tak, že

$$\frac{a_2 - \varphi(t_1)}{16} \lg \frac{a_2}{\varphi(t_1)} = 5\pi .$$

To opět lze, neboť funkce $D_2(x) = \frac{x - \varphi(t_1)}{16} \lg \frac{x}{\varphi(t_1)}$ je v intervalu $(0, \varphi(t_1)\rangle$ spojitá, klesající a platí $\lim_{x \to 0+} D_2(x) = +\infty$, $D_2(\varphi(t_1)) = 0$. Definujeme $\varphi_2(t) = \frac{a_2 - \varphi(t_1)}{2} (t - t_1) + \varphi(t_1)$ pro $t \in \left\langle t_1, t_1 + \frac{2}{\varphi(t_1) - a_2} \right\rangle$. Zřejmě $\varphi_2(t_1) = \varphi(t_1)$.

Rovnice $y'' + \frac{1}{\varphi_2^2} y = 0$ má řešení určené počátečními podmínkami $y(t_1) = 0$, $y'(t_1) = c_1$:

$$y(t) = \sqrt{\varphi_2(t)}\, y_0^{(2)} \sin \left(\frac{\sqrt{4 - k_2^2}}{2k_2} \lg \frac{\varphi_2(t)}{\varphi(t_1)} \right),$$

kde $k_2 = \frac{a_2 - \varphi(t_1)}{2} < 0$, $|y_0^{(2)}| = |y_0^{(1)}| \frac{\sqrt{4 - k_1^2}}{\sqrt{4 - k_2^2}}$.

Zvolíme t_2 tak, aby $t_2 - t_1 \geqq 2$, $y(t_2) = 0$, $y(t) \neq 0$ pro $t \in \langle t_1 + 2, t_2)$, a definujeme $\varphi(t) = \varphi_2(t)$ pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$.

Stejným způsobem pokračujeme dále. Tím máme v celém intervalu $\langle 0, \infty)$ definovanou funkci φ jakožto lomenou čáru spojující body $[t_n, \varphi(t_n)]$. Zřejmě je $1 \geqq \varphi(t) > 0$ pro $t \in \langle t_0, \infty)$.

Dokážeme, že funkce φ je konvexní. K tomu stačí, aby derivace zleva φ'_- a derivace zprava φ'_+ byly neklesající. To plyne z nerovnosti

$$0 > k_{n+1} = \frac{a_{n+1} - \varphi(t_n)}{2} > \frac{a_n - \varphi(t_{n-1})}{2} = k_n .$$

Kdyby totiž bylo $\frac{a_{n+1} - \varphi(t_n)}{2} \leqq \frac{a_n - \varphi(t_{n-1})}{2}$, pak $a_{n+1} + \varphi(t_{n-1}) \leqq a_n + \varphi(t_n) \leqq 2a_n$. To je spor, protože funkce $D_n(x) = \frac{x - \varphi(t_{n-1})}{2} \lg \frac{x}{\varphi(t_{n-1})}$ je v intervalu $(0, \varphi(t_{n-1})\rangle$ spojitá, klesající a platí

$$D_n(\varphi(t_{n-1})) = 0\,, \quad D_n(a_n) = 5\pi\,, \quad \lim_{x\to 0_+} D_n(x) = +\infty\,,$$

$$D_n\left(\frac{1}{2}\,\varphi(t_{n-1})\right) = \frac{\varphi(t_{n-1})}{32}\lg 2 < 5\pi = D_n(a_n) \ \text{ a tedy } \ \varphi(t_{n-1}) > 2a_n\,.$$

Funkci f definujeme předpisem $f = \frac{1}{\varphi^2}$. Pak $f(t) \geqq 1$ pro všechna $t \in \langle 0, \infty)$ a $f^{-1/4}$ je konvexní, neboť $f^{-1/4} = \varphi$. Jestliže věta 1 platí i pro $\alpha = \frac{1}{2}$, pak pro každé řešení rovnice (1), kde f je právě definovaná funkce, by platilo asymptotické vyjádření

$$t \in \langle t_n, t_{n+1}\rangle \Rightarrow y(t) = \sqrt{\varphi(t)}\left\{y_0 \sin\left(\int_{t_n}^{t}\frac{1}{\varphi(r)}\,\mathrm{d}r + \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{\varphi(r)}\,\mathrm{d}r + \varphi_0\right) + o(1)\right\} =$$

$$= \sqrt{\varphi(t)}\left\{y_0 \sin\left(\frac{1}{k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_n)} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{k_{i+1}}\lg\frac{\varphi(t_{i+1})}{\varphi(t_i)} + \varphi_0\right) + o(1)\right\},$$

kde $k_{i+1} = \dfrac{a_{i+1} - \varphi(t_i)}{2}$.

Ovšem rovnice (1) má v našem případě řešení

$$t \in \langle t_n, t_{n+1}\rangle \Rightarrow y(t) = \sqrt{\varphi(t)}\,y_0^{(n+1)} \sin\left(\frac{\sqrt{4 - k_{n+1}^2}}{2k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_n)}\right), \tag{14}$$

kde $|y_0^{(n+1)}| = |y_0^{(1)}|\,\dfrac{\sqrt{4 - k_1^2}}{\sqrt{4 - k_{n+1}^2}}$. Zřejmě $|y_0^{(n+1)}| > c > 0$ pro všechna n.

Zvolme nyní interval $\langle t_n, t_{n+1}\rangle$ a určeme na tomto intervalu počet nulových bodů funkce $y(t)$ vyjádřené vzorcem (14). Funkce $y(t) = 0$, právě když

$$\sin\left(\frac{\sqrt{4 - k_{n+1}^2}}{2k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_n)}\right) = 0\,.$$

Body t_n, t_{n+1} jsou nulové body funkce $y(t)$ a tedy na intervalu $\langle t_n, t_{n+1}\rangle$ je právě

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\sqrt{4 - k_{n+1}^2}}{2k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)} + 1$$

nulových bodů funkce $y(t)$.

Avšak platí

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\sqrt{4 - k_{n+1}^2}}{2k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)} + 1 \leqq \left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k_{n+1}} - \frac{k_{n+1}}{8}\right)\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)}\right] + 1 \leqq$$

$$\leqq \left[\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)} - \frac{1}{\pi}\,\frac{k_{n+1}}{8}\lg\frac{a_{n+1}}{\varphi(t_n)}\right] + 1 = \left[\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{k_{n+1}}\lg\frac{\varphi(t_{n+1})}{\varphi(t_n)}\right] - 4\,,$$

kde $[a]$ značí celou část čísla a.