Итак, каждый связный циклический граф периода $k \geqq 3$ можно полностью охарактеризовать при помощи k мощностей (при помощи его т. наз. *гомоморфной характеристики* [1]). В таком случае нетрудно доказать

Теорему 4. *Если* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *— гомоморфная характеристика связного циклического графа периода* $k \geqq 3$, *то этот граф содержит* а) *цикл длины* d *тогда и только тогда, если* $d = nk$, *где* n *— натуральное число, и если* $\alpha_i \geqq n$ *для* $i = 1, 2, \ldots, k$; б) *двусторонне бесконечный путь тогда и только тогда, если* α_i *— бесконечная мощность для любого* $i = 1, 2, \ldots, k$.

Zusammenfassung

ÜBER ZYKLEN DER ZYKLISCHEN GRAPHEN

KAREL ČULÍK, Brno

(Eingegangen am 28. September 1957)

Unter einer *binären Relation* ϱ, die auf der Menge $F \neq \emptyset$ definiert ist, verstehen wir eine Teilmenge des kartesischen Produktes $F \times F$. Die Menge F mit der Relation ϱ heisst ein *Graph* $F(\varrho)$. Eine Folge $\{u_i\}_{i=1}^k$ der Elemente $u_i \in F$ heisst eine *gebundene* bzw. *monoton gebundene* Folge in $F(\varrho)$, wenn entweder $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ oder $(u_{i+1}, u_i) \in \varrho$ bzw. $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ für $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ gilt. Eine solche Folge heisst eine *geschlossene* (gebundene bzw. monoton gebundene) Folge, wenn noch eine weitere Bedingung und zwar entweder $(u_k, u_1) \in \varrho$ oder $(u_1, u_k) \in \varrho$ bzw. $(u_k, u_1) \in \varrho$ erfüllt ist. Die natürliche Zahl k heisst *Länge* dieser Folge. Ein Graph $G(\sigma)$ heisst ein *Zyklus* bzw. eine *beiderseits unendliche Bahn*, wenn er folgendermassen definiert ist:

$$G = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}, \quad \sigma = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), \ldots (u_{k-1}, u_k), (u_k, u_1)\}$$

bzw.

$$G = \{\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\}, \quad \sigma = \{\ldots, (u_{-2}, u_{-1}), (u_{-1}, u_0), (u_0, u_1), (u_1, u_2), \ldots\}.$$

Ein Teilgraph $G(\sigma)$ des Graphen $F(\varrho)$ (d. h. $G \subset F$, $\sigma \subset \varrho$), der ein Zyklus ist, heisst ein *reiner Zyklus im* $F(\varrho)$, wenn $\sigma = \varrho \cap G \times G$ gilt (über weitere Begriffe siehe [1]).

Eine Relation ϱ heisst *zyklische Relation vom Grade* k ($\mathbf{Z}_k$-Relation), wenn sie die Bedingung, dass $\{u_i\}_{i=1}^k$ eine monoton gebundene Folge in $\varrho \Rightarrow (u_k, u_1) \in \varrho$ ist, erfüllt. Ein Graph $F(\varrho)$ heisst ein *zyklischer Graph vom Grade* k, wenn seine Relation ϱ eine $\mathbf{Z}_k$-Relation ist.

Der Grad k eines zyklischen Graphen $F(\varrho)$ heisst seine *Periode*, wenn in $F(\varrho)$ ein Zyklus der Länge k existiert und wenn die Länge d jedes Zyklus im $F(\varrho)$ nicht kleiner als k ist.

Nun gelten folgende Sätze:

Satz 1. *Die Länge eines reinen Zyklus des zyklischen Graphen vom Grade k ist ein Teiler des Grades k.*

Satz 2. *Ein zusammenhängender zyklischer Graph mit der Periode $k \leqq 3$ ist dann und nur dann einfach, wenn er ein Zyklus der Länge k ist.*

Satz 3. *Ein zusammenhängender Graph ist dann nur und dann ein zyklischer Graph mit der Periode $k \geqq 3$, wenn er ein homomorphes Vorbild eines Zyklus der Länge k ist.*

Also, jeder zusammenhängende zyklische Graph mit der Periode $k \geqq 3$ ist mit Hilfe eines Systems von k Mächtigkeiten (sog. seiner *homomorphen Charakteristik* [1]) vollkommen charakterisiert. Daraus schliesst man leicht, dass folgender Satz gilt:

Satz 4. *Ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ die homomorphe Charakteristik eines zusammenhängenden zyklischen Graphen mit der Periode $k \geqq 3$, so enthält dieser Graph* a) *einen Zyklus der Länge d dann und nur dann, wenn $d = nk$, wo n eine natürliche Zahl ist, und wenn $\alpha_i \geqq n$ für $i = 1, 2, \ldots, k$ ist,* b) *eine beiderseits unendliche Bahn dann und nur dann, wenn α_i eine unendliche Mächtigkeit für $i = 1, 2, \ldots, k$ ist.*