Резюме

О ЦИКЛАХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Брно

(Поступило в редакцию 28/IX. 1957 г.)

Под бинарным отношением ϱ, определенным на множестве $F \neq 0$, мы подразумеваем *подмножество декартова произведения* $F \times F$. Множество F с отношением ϱ называется *графом* $F(\varrho)$. Последовательность $\{u_i\}_{i=1}^k$ элементов $u_i \in F$ называется *связанной*, соотв. *монотонно связанной в* $F(\varrho)$, если или $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ или $(u_{i+1}, u_i) \in \varrho$, соотв. $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ имеет место для любого $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Такую последовательность мы назовем, далее, *замкнутой* (связанной, соотв. монотонно связанной), если, кроме того, или $(u_k, u_1) \in \varrho$ или $(u_1, u_k) \in \varrho$, соотв. $(u_k, u_1) \in \varrho$. Натуральное число k называется *длиной* этой последовательности. Граф $G(\sigma)$ называется *циклом*, соотв. *двусторонне бесконечным путем*, если

$$G = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\},\ \sigma = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), \ldots, (u_{k-1}, u_k), (u_k, u_1)\}$$

соотв.

$$G = \{\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\}\,,$$
$$\sigma = \{\ldots, (u_{-2}, u_{-1}), (u_{-1}, u_0), (u_0, u_1), (u_1, u_2), \ldots\}\,.$$

Подграф $G(\sigma)$ графа $F(\varrho)$ (т. е. $G \subset F$, $\sigma \subset \varrho$), являющийся циклом, называется *строгим* циклом в $F(\varrho)$, если $\sigma = \varrho \cap G \times G$ (об остальных понятиях см. [1]).

Отношение ϱ называется *циклическим степени* k ($\mathbf{Z}_k$-отношением), если оно удовлетворяет следующему условию:

$$\{u_i\}_{i=1}^k \text{ есть монотонно связанная последовательность в } \varrho \Rightarrow (u_k, u_1) \in \varrho\,. \quad (\mathbf{Z}_k)$$

Граф $F(\varrho)$ называется *циклическим степени* k, если его отношение является $\mathbf{Z}_k$-отношением.

Степень k циклического графа $F(\varrho)$ называется его *периодом*, если в $F(\varrho)$ имеется цикл длины k и если в $F(\varrho)$ не имеется цикла, длина которого была бы меньше k.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Длина строгого цикла в циклическом графе степени k является делителем степени k.*

Теорема 2. *Связный циклический граф периода $k \geqq 3$ будет простым тогда и только тогда, если он будет циклом длины k.*

Теорема 3. *Связный граф будет циклическим графом периода $k \geqq 3$ тогда и только тогда, если он будет гомоморфным прообразом цикла длины k.*