vzhledem k nezápornosti souřadnic bodu X_7 můžeme položit jen $t = 0{,}0382925$. Po zaokrouhlení na pět desetinných míst najdeme $X_7 = (0{,}65533;\ 0;\ 0{,}14674;\ 1{,}14845;\ 0{,}24570)$, $f(X_7) = 2{,}30282$. Okolnost, že body X_4 i X_7 leží ve stěně množiny $\mathfrak{M}$, pro jejíž body platí $x_2 = 0$, nás vede k domněnce, že bod $\overline{X}$, pro který je $f(\overline{X}) = \min\limits_{X \in \mathfrak{M}} f(X)$, bude také ležet v této stěně. Zkusíme proto najít minimum formy $f(X)$ v této stěně způsobem popsaným ve větě 3. Za basi směru této stěny zvolíme např. vektory $\mathbf{v}_1 = (2, 0, 2, -3, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, 0, 0, 3, 2)$. Po orthogonalisaci najdeme vektory base $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2 = (-66, 0{,}50, 12, 58)$. Položíme-li $Y_i = X_7 + t_i \mathbf{w}_i$, $i = 1{,}2$, najdeme $t_1 = -0{,}0019452$, $t_2 = 0{,}0018489$. Souřadnice bodu $X_0 = X_7 + t_1 \mathbf{w}_1 + t_2 \mathbf{w}_2$ jsou pak (s přesností na pět desetinných míst) $(0{,}52941;\ 0;\ 0{,}23529;\ 1{,}17647;\ 0{,}35294)$; je přitom $f(X_0) = 2{,}23529$. Ze způsobu konstrukce bodu X_0 je patrno, že X_0 je minimální vůči vektorům $\mathbf{w}_1$ a $\mathbf{w}_2$; snadno zjistíme, že bod X_0 je též minimální vůči vektoru $\mathbf{u}_1'$. Odtud dostáváme podle věty 3, že $f(X_0) = \min\limits_{X \in \mathfrak{M}} f(X)$.

LITERATURA

[1] *G. B. Dantzig:* Maximization of linear function of variables subject to linear inequalities, Activity analysis of production and allocation, edited by T. C. Koopmans, kap. XXI, New York 1951.

[2] *W. Prager:* On the role of congestion in transportation problems, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik *35* (1955), 264—268.

[3] *K. Reidemeister:* Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe, Leipzig 1953.

[4] *G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya:* Inequalities, Cambridge 1934.

[5] *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев:* Элементы функционального анализа, Москва 1951.

Резюме

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ЯРОМИР АБРГАМ (Jaromír Abrham), Прага

(Поступило в редакцию 27/VIII 1957 г.)

В работе описан итерационный процесс для определения минимума строго выпуклой вниз функции $f(X)$ на множестве $\mathfrak{M}$ всех неотрицательных решений системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m+k} a_{ij} x_j = b_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ k \geqq 1 \tag{1}$$

ранга m. При этом мы предполагаем, что $\mathfrak{M} \neq \emptyset$.

В целях простой формулировки интерационного процесса нужно ввести некоторые понятия.

Под вектором множества $\mathfrak{M}$ мы подразумеваем решение системы линейных однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^{m+k} a_{ij}u_j = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{2}$$

Будем предполагать, что для любого вектора $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_{m+k})$ множества $\mathfrak{M}$ такого, что $v_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m + k$, $\sum_{i=1}^{m+k} v_i > 0$ будет $\lim_{t\to\infty} f(X + t\mathbf{v}) = +\infty$ для всех $X \in \mathfrak{M}$. При этом условии в п. 1 доказывается существование минимума функции $f(X)$ на множестве $\mathfrak{M}$.

Вектор $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{m+k})$ множества $\mathfrak{M}$ является основным, если существуют индексы $i_1, \ldots, i_{k-1}$ так, что $u_{i_j} = 0$, $j = 1, \ldots, k - 1$.

Пусть $X = (x_1, \ldots, x_{m+k})$ — точка множества $\mathfrak{M}$. Пусть существует целое число r $(0 \leqq r \leqq k)$ и индексы $i_1, \ldots, i_{k-r}$ такие, что $x_{i_j} = 0$, $j = 1, \ldots, k - r$. Тогда базисом, соответствующим точке X, будем разуметь множество k линейно независимых основных векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ $(\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \ldots, v_{i,m+k})$, $i = 1, \ldots, k)$ со следующими свойствами:

1. Среди векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ существует в точности r векторов $\mathbf{v}_{\nu_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\nu_r}$ таких, что $v_{\nu_s, i_j} = 0$, $s = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, k - r$.

2. Если $\mathbf{v}_{\mu_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\mu_{k-r}}$ — остальные векторы этого базиса, то для каждого из чисел i_j, $j = 1, \ldots, k - r$ существует в точности одно число μ_j, $j = 1, \ldots, k - r$ так, что $\mathbf{v}_{\mu_j, i_j} > 0$, $j = 1, \ldots, k - r$, и что $\mathbf{v}_{\mu_j i_s} = 0$ для всех $j \neq s$.

Точку $X \in \mathfrak{M}$ назовем минимальной относительно вектора $\mathbf{v}$, если для всякого действительного числа t такого, что $X + t\mathbf{v} \in \mathfrak{M}$, имеет место неравенство $f(X + t\mathbf{v}) \geqq f(X)$.

Для доказательства сходимости итерационного процесса является важной

Теорема 1. *Пусть $f(X)$ — выпуклая вниз функция, определенная на множестве $\mathfrak{M}$ и обладающая на множестве $\mathfrak{M}$ непрерывными частными производными первого и второго порядка по всем переменным. Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы для точки X_0 было $f(X_0) = \min_{X \in \mathfrak{M}} f(X)$, является требование, чтобы точка X_0 была минимальной относительно всех векторов какого-либо соответствующего ей базиса.*

Дадим теперь формулировку итерационного процесса для отыскания минимума строго выпуклой функции $f(X)$ на множестве $\mathfrak{M}$.

Пусть X_1 — произвольная точка множества $\mathfrak{M}$, пусть $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ — векторы соответствующего этой точке базиса. Положим $X_2 = X_1 + t_1\mathbf{u}_1$, где t_1 однозначно определяется условием

$$f(X_1 + t_1\mathbf{u}_1) = \min_{t \in \mathfrak{M}(\mathbf{u}_1, X_1)} f(X_1 + t\mathbf{u}_1)\,,$$