Résumé

SOLUTION DU PROBLÈME BIHARMONIQUE POUR LE COIN INFINI

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 12 juin 1957)

Le présent travail a pour son but principal de démontrer d'un côté l'existence et l'unicité de la solution du problème biharmonique pour le coin infini convexe et de montrer de l'autre côté comment on peut résoudre, en s'appuyant sur ces résultats, le problème biharmonique dans les polygones.

Le but secondaire de ce travail est de développer la théorie de la transformation de Mellin d'une telle manière qu'elle ne soit pas seulement un appareil formal mais au contraire autonome pour la solution des problèmes en question. Il y a aussi dans ce travail une courte note sur la résolution numérique de ces problèmes.

Après l'introduction, on définit dans la seconde partie portant le titre „L'introduction de la convergence dans l'ensemble des transformées de Mellin", l'espace linéaire $H_{\mu\nu}$ des transformées de Mellin dont les originaux $h(r)$ sont caractérisés par la propriété

$$\sup_{x \in \langle \mu, \nu \rangle} \int_0^\infty |h(r)|^2 \, r^{2x-1} \, \mathrm{d}r < \infty \, .$$

L'espace $H_{\mu\nu}$ est normé au moyen de la norme

$$|H| = \sup_{x \in (\mu, \nu)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y \right]^{\frac{1}{2}} .$$

On montre ensuite que c'est un espace de Banach. Les fonctions analytiques H de $H_{\mu\nu}$ jouissent de quelques propriétés intéressantes que l'on utilise dans la suite, par exemple: $\lim_{|y| \to \infty} H(x + iy) = 0$ uniformément pour $x \in \langle \mu + \varepsilon, \nu - \varepsilon \rangle$ $\varepsilon > 0$ étant suffisamment petit, les intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y$ convergent uniformément pour $x \in \langle \mu, \nu \rangle$.

La troisième partie intitulée „Définition du problème biharmonique pour le coin infini, existence et unicité de sa solution" apporte tout d'abord la définition de notre problème. On introduit dans le coin en question les coordonnées polaires r, Θ dont l'axe polaire coïncide avec la bisectrice de l'angle ω du coin. Les conditions aux limites sont les suivantes:

$$u\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = f_1(r) \, , \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = g_1(r)$$

et

$$u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = f_2(r)\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = -\,g_2(r)\,.$$

Les fonctions $f_i(r)$ sont supposées absolumet continues et les fonctions $f_i(r)$, $g_i(r)$, $i = 1, 2$, sont soumises à ces conditions-ci:

$$\int_0^1 [f_i'(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, dr < \infty\,, \quad \int_0^1 [g_i(r)]^2\, r^{2\mu+1}\, dr < \infty\,,$$

$$\int_1^\infty [f_i'(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, dr < \infty\,, \quad \int_1^\infty [g_i(r)]^2\, r^{2\nu+1}\, dr < \infty\,.$$

Les nombres μ et ν sont contenus dans l'intervalle $(-\lambda_1(\omega) - 1,\ \lambda_1(\omega) - 1)$ où $\lambda_1(\omega)$ est la partie réelle du nombre de Papkovič. Comme $\lambda_1(\omega) > 1$, l'intégrale $\int_0^1 [f_1'(r)]^2\, dr$ peut diverger. C'est un fait un peu surprenant: le point angulaire fait élargir l'ensemble des conditions aux limites.

La solution du problème biharmonique correspondant aux fonctions $f_i(r)$, $g_i(r)$ est une fonction réelle, biharmonique à l'intérieur du coin et les conditions aux limites sont remplies au sens suivant:

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 [u(r, \Theta) - f_1(r)]^2\, r^{2\gamma-1}\, dr = 0\,,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty [u(r, \Theta) - f_1(r)]^2\, r^{2\delta-1}\, dr = 0\,,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) - g_1(r)\right]^2 r^{2\gamma+1}\, dr = 0\,, \quad \text{etc.}$$

En dehors de cela on suppose que pour $|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}$, $0 < r \leqq 1$, les estimations suivantes soient valables

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}\,, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}\,,$$

tandis que pour $r \geqq 1$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1}\,, \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\delta-1}\,.$$

On exige que les nombres γ, δ soient dans l'intervalle $(-\lambda_1(\omega) - 1,\ \lambda_1(\omega) - 1)$. On démontre qu'il existe une et une seule solution du problème ainsi défini.

On perdrait cette unicité en élargissant l'intervalle $(-\lambda_1(\omega)-1,\ \lambda_1(\omega)-1)$ contenant les constantes μ, ν, γ, δ.

Pour la résolution numérique et pour la démonstration de l'unicité on a introduit les quatre fonctions de Green qu'on obtient par l'emploi formal du théorème sur la convolution. Leurs valeurs numériques ainsi que leurs graphiques sont joints.

La quatrième partie portant le titre ,,Les propriétés de la solution" commence par la résolution d'un problème biharmonique spécial pour un demi-plan. On se sert alors des propriétés de la solution de ce problème pour en déduire les propriétés de la solution du problème biharmonique dans le coin, par exemple: la possibilité de prolonger d'une manière continue la solution au bord en les fonctions $f_i(r)$ (à l'exception peut-être du sommet), la possibilité d'un prolongement angulaire des dérivées pour presque tous les points du bord en les fonctions $f_i'(r)$, $g_i(r)$ etc. Dans cette partie on démontre encore d'autres propriétés de la solution comme: la possibilité d'un prolongement analytique de la function biharmonique, les conditions aux limites étant par exemple pour $\Theta = \frac{\omega}{2}$:

$$f_1(r) = g_1(r) = 0\,.$$

Ce prolongement est défini dans un coin plus grand et qui contient le coin original, il représente aussi la solution du problème biharmonique défini auparavant.

Dans les notes finales on démontre une inégalité qui exprime la justesse de la solution.

Le travail finit par une note sur d'autres questions, voisines à celles qui ont été traitées dans le présent travail, et sur la solution du problème biharmonique pour les polygones convexes. Ces questions-là forment l'objet d'un autre travail du même auteur.