Резюме

РЕШЕНИЕ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

(Поступило в редакцию 12/VI 1957 г.)

В предлагаемой работе преследуются две главные цели: во-первых, доказать существование и единственность решения бигармонической задачи для бесконечного выпуклого клина и, во-вторых, показать, как этот результат может быть использован при решении бигармонической задачи на областях, являющихся пересечением таких клиньев, т. е. на выпуклых многоугольниках.

Второстепенной целью этой работы можно считать разработку преобразования Меллина в том смысле, чтобы оно было не только формальным, но и самобытным простым инструментом для решения дифференциальных уравнений с частичными производными, и далее краткое замечание по поводу численного решения задачи.

После введения общего характера в части 2, названной ,,Введение сходимости в пространстве меллиновых образов", дается определение линейного пространства меллиновых образов $H_{\mu\nu}$, оригиналы $h(r)$ которых характеризуются следующим свойством:

$$\sup_{x \in \langle \mu, \nu \rangle} \int_0^\infty |h(r)|^2 r^{2x-1} \, \mathrm{d}r < \infty .$$

В пространстве $H_{\mu\nu}$ вводится норма при помощи соотношения:

$$|H| = \sup_{x \in (\mu, \nu)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Далее показано, что $H_{\mu\nu}$ является пространством Банаха. Аналитические функции H из $H_{\mu\nu}$ обладают некоторыми интересными свойствами, которые используются в дальнейшем: $\lim\limits_{|y| \to \infty} H(x + iy) = 0$ равномерно, если только $x \in \langle \mu + \varepsilon, \nu - \varepsilon \rangle$, причем $\varepsilon > 0$ достаточно мало, интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(x + iy)|^2 \, \mathrm{d}y$$

равномерно сходятся для $x \in \langle \mu, \nu \rangle$.

В части 3, названной ,,Определение бигармонической задачи для бесконечного клина, существование решения и его единственность", дается прежде всего определение бигармонической задачи. В клиновидной области вводятся полярные координаты r, Θ, причем полярная ось совпадает с биссектрисой угла ω клина. На стороне $\Theta = \frac{\omega}{2}$ заданы действительные граничные условия

$$u\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = f_1(r) , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = g_1(r) ,$$

а на стороне $\Theta = -\frac{\omega}{2}$ условия

$$u\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = f_2(r) , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right) = -g_2(r) .$$

Функции $f_i(r)$ предполагаются абсолютно непрерывными, и вместе с функциями $g_i(r)$ должны удовлетворять следующим требованиям:

$$\int_0^1 [f_i'(r)]^2 r^{2\mu+1} \mathrm{d}r < \infty , \quad \int_0^1 [g_i(r)]^2 r^{2\mu+1} \mathrm{d}r < \infty ,$$

$$\int_1^\infty [f_i'(r)]^2 r^{2\nu+1} \mathrm{d}r < \infty , \quad \int_1^\infty [g_i(r)]^2 r^{2\nu+1} \mathrm{d}r < \infty , \quad i = 1, 2 .$$

Притом числа μ и ν лежат в интервале $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$ где $\lambda_1(\omega)$ является действительной частью т. наз. числа Папковича $p_1(\omega)$. Так как $\lambda_1(\omega) > 1$, то, напр., функция $f_1'(r)$ не должна быть интегрируемой с квадратом на интервале $\langle 0, 1 \rangle$. Это приводит к неожиданному на первый взгляд заключению, что наличие угловой точки расширяет множество граничных значений. Решением бигармонической задачи, соответствующей функциям $f_i(r)$, $g_i(r)$, мы называем такую действительную функцию $u(r, \Theta)$, которая является бигармонической внутри клинообразной области и принимает граничные значения в следующем смысле:

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 [u(r, \Theta) - f_1(r)]^2 r^{2\gamma-1} \mathrm{d}r = 0 ,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_1^\infty [u(r, \Theta) - f_1(r)]^2 r^{2\delta-1} \mathrm{d}r = 0 ,$$

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \int_0^1 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) - g_1(r)\right]^2 r^{2\gamma+1} \mathrm{d}r = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Ктоме того, мы предполагаем, что локально равномерно, т. е. для $|\Theta| \leqq \varphi < \frac{\omega}{2}$ и $0 < r \leqq 1$, имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1} , \quad \left|\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\right| \leqq M(\varphi)\, r^{-\gamma-1}$$

и что для $1 \leqq r$ имеют место те же оценки, если только постоянную γ заменить δ. Притом мы требуем, чтобы постоянные γ и δ входили в интервал $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$. Доказывается, что существует одно и только одно решение определенной таким образом задачи. При расширении интервала $(-\lambda_1(\omega) - 1, \lambda_1(\omega) - 1)$, в котором содержатся числа μ, ν, γ, δ, единственность решения уже не имела бы места, как это следует из существования т. наз. функций Папковича. Для численных расчетов и для доказательства единственности были введены четыре функции Грина для данной проблемы, полученные путем формального использования теоремы о свертке (конволюции). Интересно, что при доказательстве единственности используются свойства решения, тесно связанные с зависимостью решения от области.

В части 4, озаглавленной ,,Свойства решения", прежде всего доказывается существование решения специальной бигармонической задачи для полуплоскости. На основании свойств этой задачи доказываются свойства решения бигармонической задачи для бесконечного клина, как напр.: возможность непрерывного продолжения на границе решения к функции $f_i(r)$ (за исключением, самое большее, вершины), возможность углового продолжения первых производных для почти всех точек на сторонах клина соответственно к функциям $f_i'(r)$ и $g_i(r)$, а также возможность непрерывного продолжения первых производных в тех точках, в которых функции $f_i'(r)$, $g_i(r)$ непрерывны. При некоторых добавочных условиях, между прочим обеспечивающих выполнение условий согласования (которые у прямоугольного клина сводятся к соотношениям

$$f_1(0) = f_2(0)\,, \quad f_i'(0) = -g_i(0)\,, \quad i = 1, 2)\,,$$

доказана возможность непрерывного продолжения решения в вершине, а затем и первых производных; в последнем случае речь идет, конечно, об угловом продолжении. В этой части доказываются еще и дальнейшие свойства решения, как, напр., возможность аналитического продолжения бигармонической функции через сторону клина, если функция и ее первые производные по углу равны нулю. (Выражени ,,функция принимает граничные значения" нужно понимать в нашем интегральном смысле.) Это продолжение определено на клине с большим углом при вершине и является решением бигармонической задачи.

В ,,Заключительных замечаниях" доказывается неравенство, выражающее правильность решения в явном виде. Работа заканчивается кратким упоминанием о других аспектах рассматриваемых задач, равно как и о решении бигармонической задачи для выпуклых многоугольников — эти вопросы разбирались в иной работе автора.