Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ŘEŠENÍ BIHARMONICKÉHO PROBLÉMU PRO NEKONEČNÝ KLÍN, II

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Došlo dne 12. června 1957)

DT:517.516

Tato druhá část práce navazuje přímo na část předchozí.*) Hlavním thematem této části jsou vlastnosti řešení biharmonického problému na nekonečném konvexním klínu. Zvláště jsou zde studovány vlastnosti řešení v blízkosti hranice.

4. Vlastnosti řešení

V tomto oddílu se budeme zabývat vlastnostmi řešení biharmonického problému v blízkosti hranice. Bude nás v prvé řadě zajímat chování řešení v blízkosti hranice, příslušné obecným okrajovým podmínkám, jakož i jeho chování v tom případě, když okrajové hodnoty budou mít speciální vlastnosti (spojitost atp.). Zvláštní pozornosti podrobíme chování řešení ve vrcholu klínu a v nekonečnu.

Pomocným aparátem při řešení výše nastíněných otázek bude řešení speciálního biharmonického problému pro polorovinu. Vzhledem k zásadní odlišnosti našeho pojímání biharmonického problému pro polorovinu od jeho definice v [5] podáme v tomto oddílu jeho krátký rozbor.

Definice 7. *Buď reálná funkce $f(x)$ různá od nuly nejvýše pro $0 < \varepsilon \leqq r \leqq \frac{1}{\varepsilon}$, absolutně spojitá. Nechť $\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} [f'(r)]^2 \, dr < \infty$. Buď dále $g(r)$ reálná funkce různá od nuly nejvýše pro $0 < \varepsilon \leqq r \leqq \frac{1}{\varepsilon}$ a taková, že $\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} [g(r)]^2 \, dr < \infty$.*

Speciálním biharmonickým problémem pro polorovinu budeme nazývat úlohu stanovit takovou reálnou funkci, že pro ni platí:

1. *$u(r, \Theta)$ pro $0 < r < \infty$, $|\Theta| < \frac{\pi}{2}$, má čtyři spojité derivace,*

2. *$u(r, \Theta)$ je biharmonická funkce,*

*) Viz str. 257—286 tohoto ročníku Časopisu.

3. $\lim\limits_{\Theta \to \frac{\pi}{2}} \int\limits_0^\infty [f(r) - u(r, \Theta)]^2 r^{-2} \,\mathrm{d}r = 0 \,, \quad \lim\limits_{\Theta \to -\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^\infty [u(r, \Theta)]^2 r^{-2} \,\mathrm{d}r = 0 \,;$ (a)

$$\lim_{\Theta \to \frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[f'(r) - \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) \right]^2 \mathrm{d}r = 0 \,, \quad \lim_{\Theta \to -\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) \right]^2 \mathrm{d}r = 0 \,; \tag{b}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\Theta \to +\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[g(r) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) \right]^2 \mathrm{d}r = 0 \,, \\ &\lim_{\Theta \to -\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) \right]^2 \mathrm{d}r = 0 \,; \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

4. *ke každému* $0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$ *existuje konstanta* $M(\varphi)$ *tak, že pro* $0 < r < \infty$ *platí*

$$|\Theta| \leqq \varphi \Rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \leqq M(\varphi) \,, \quad \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right| \leqq M(\varphi) \,.$$

Věta 14. *Existuje řešení speciálního biharmonického problému pro polorovinu, definovaného v definici 7.*

Důkaz věty 14 je založen na stejné myšlence jako důkaz věty 10. Předně je zřejmé, že $f(r)$, $f'(r)$, $g(r) \in h_{\mu\nu}$, kde $\mu < \nu$ jsou libovolná, konečná, reálná čísla. Odtud plyne, že

$$F(n) \in H_{\mu\nu} \,, \quad n\,F(n) \in H_{\mu\nu} \,, \quad G(n + 1) \in H_{\mu\nu} \,.$$

Položme nyní v (26) $\omega = \pi$, $F_{11}(n) = F(n)$, $F_{21}(n) = 0$, $G_{11}(n + 1) = G(n + 1)$, $G_{21}(n + 1) = 0$.

Dostaneme:

$$U(n, \Theta) = - \frac{(n + 2) \sin \left[n \left(\frac{\pi}{2} + \Theta \right) \right] + n \sin \left[n \left(\frac{\pi}{2} + \Theta \right) + 2\Theta \right]}{2 \sin (n + 1) \pi} F(n) -$$
$$- \frac{\cos n \left(\frac{\pi}{2} + \Theta \right) + \cos \left[n \left(\frac{\pi}{2} + \Theta \right) + 2\Theta \right]}{2 \sin (n + 1) \pi} G(n + 1) \,. \tag{48}$$

Z (48) plyne, že zvolíme-li $-2 < \mu < \nu < 0$, potom

$$U(n, \Theta) \,, \quad -n\,U(n, \Theta) \,, \quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\Theta}(n, \Theta) \in H_{\mu\nu} \,.$$

Nyní zcela stejným způsobem jako jsme to učinili při důkaze věty 10, ukážeme, že platí bod 1 a 2 definice 7. Aby byla zaručena platnost bodu 3 definice 7, buďte μ a ν zvoleny takto: $-2 < \mu < -1 < -\frac{1}{2} < \nu < 0$. Dostáváme tak

$$\lim_{\Theta \to \frac{\pi}{2}} \int_0^\infty [f(r) - u(r, \Theta)]^2 \, r^{2x-1} \, dr = 0 ,$$

když

$$x \in \langle \mu, \nu \rangle , \quad \lim_{\Theta \to -\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty [u(r, \Theta)]^2 \, r^{2x-1} \, dr = 0 .$$

Zvolíme-li nyní $x = -\frac{1}{2}$, dostaneme bod (a) definice 7. Podobně je

$$\lim_{\Theta \to \frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[f'(r) - \frac{\partial u}{\partial r} (r, \Theta) \right]^2 r^{2x+1} \, dr = 0 ,$$

$$\lim_{\Theta \to -\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial r} (r, \Theta) \right]^2 r^{2x+1} \, dr = 0 .$$

Zvolíme-li opět $x = -\frac{1}{2}$, dostáváme bod (b) definice 7. Stejně dostaneme bod (c). Důkaz bodu 4 definice 7 probíhá stejně jako důkaz bodu 5 definice 5 při důkazu věty 10; stačí zvolit za $x = -1$.

O řešení speciálního problému pro polorovinu dokážeme nyní

Větu 15. *Nechť $u(r, \Theta) = u(x, y)$ je řešení speciálního problému pro polorovinu $(x = r \cos \Theta,\ y = r \sin \Theta)$. Potom platí:*

1. $$\lim_{x \to 0} \int_a^b [u(x, y) - f(y)]^2 \, dy = 0 , \quad \lim_{x \to 0} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial y} (x, y) - f'(y) \right]^2 dy = 0 ,$$

$$\lim_{x \to 0} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial x} (x, y) + g(y) \right]^2 dy = 0 ,$$

je-li $0 < a \leqq b < \infty$.

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0 > 0}} u(x, y) = f(y_0)$; pro skoro všecka $y_0 \in (0, \infty)$ *taková, v nichž $f(s)$ a $h(s) = \int_{-\infty}^{s} g(t) \, dt$ mají konečnou derivaci, je*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{\partial u}{\partial y} (x, y) = f'(y_0) , \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{\partial u}{\partial x} (x, y) = -g(y_0), ^{1})$$

pokud $\left| \frac{y}{x} \right| \leqq k$, *kde k je libovolná ale pevná konstanta (dostáváme tzv. úhlové prodloužení).*

---

[1]) Funkci $g(s)$ změňme po případě na množině míry nula tak, aby $h'(s) = g(s)$.

$$3. \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f'(y_0), \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -g(y_0),$$

je-li bod $y_0 > 0$ bodem spojitosti $f'(y)$ a $g(y)$.

Důkaz. Mellinův obraz našeho řešení je dán výrazem (48). Originál výrazu (48) vyjádříme vzorcem (42) poněkud upraveným: Klademe

$$G(r, \Theta) = \tfrac{1}{2}[G_1(r, \Theta, \pi) + G_2(r, \Theta, \pi)],$$
$$H(r, \Theta) = \tfrac{1}{2}[G_3(r, \Theta, \pi) + G_4(r, \Theta, \pi)].$$

Dostaneme tak

$$G(r, \Theta) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{(n+2)\sin n\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right) + n \sin\left[n\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right)+2\Theta\right]}{2\sin(n+1)\pi} r^{-n}\,dn, \tag{49}$$

$$H(r, \Theta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\cos n\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right) + \cos\left[n\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right)+2\Theta\right]}{2\sin(n+1)\pi} r^{-n}\,dn,$$

kde $-2 < x < 0$. Tyto integrály vypočítáme podle residuové věty. Uvažme nejdříve $r < 1$. Označme C_k kladně orientované obvody obdélníků D_k definovaných takto:

$$n \in D_k \Leftrightarrow -k - \tfrac{1}{2} < \operatorname{Re} n < -1, \quad -k < \operatorname{Im} n < k.$$

Protože je $r < 1$ a platí odhady typu (28), dostáváme

$$\lim_{k \to \infty} -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty}$$

pro oba integrály (49). Jednoduché póly integrandů jsou v bodech $-2, -3, \ldots$ Např. pro druhý integrál z (49) tak dostáváme

$$H(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k r^k \left[\cos k\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right) + \cos\left(k\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right) - 2\Theta\right)\right],$$

$$0 < r < 1, \ |\Theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Po sečtení těchto řad a po převodu na kartézské souřadnice $x = r\cos\Theta$, $y = r\sin\Theta$ dostáváme

$$G\left(\frac{r}{s}, \Theta\right)\frac{1}{s} = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{(x^2+(y-s)^2)^2},$$

$$H\left(\frac{r}{s}, \Theta\right) = -\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{x^2+(y-s)^2}.$$

Vzorec (42) bude mít tento jednoduchý tvar:

$$u(r, \Theta) = u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2} f(s) \, \mathrm{d}s - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + (y - s)^2} g(s) \, \mathrm{d}s \,, \tag{52}$$

kde $f(s) = g(s) = 0$ pro $s \leqq 0$.

Vypočítáme nyní Fourier-Plancherelův obraz funkce $u(x, y)$ vzhledem k proměnné y. Budeme se opírat o tuto známou větu z teorie Fourier-Plancherelovy transformace:

Lemma 3. *Nechť* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *a* $F_1(y)$ $F_2(y) \in L^2(-\infty, \infty)$. *Potom také*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - \xi) \,.\, f_2(\xi) \, d\xi \in L^2(-\infty, \infty) \quad \text{a} \quad F(y) = F_1(y) \, F_2(y) \,.$$

(Viz [6], str. 439 an.)

Např. pomocí residuové věty snadno dostaneme

$$\frac{2}{\pi} x^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iny}}{(x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}y = \begin{cases} e^{-nx}[1 + nx] & \text{pro} \quad n > 0 \,, \\ e^{nx}[1 - nx] & \text{pro} \quad n < 0 \,, \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\pi} x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iny}}{(x^2 + y^2)} \, \mathrm{d}y = \begin{cases} -xe^{-nx} & \text{pro} \quad n > 0 \,, \\ -xe^{nx} & \text{pro} \quad n < 0 \,. \end{cases}$$

Označme v tomto případě

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) \, e^{-ins} \, \mathrm{d}s = F(n) \,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \, e^{-ins} \, \mathrm{d}s = G(n) \,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) \, e^{-iny} \, \mathrm{d}y = U(x, n) \,.$$

Dostaneme tak podle lemmatu 3

$$U(x, n) = e^{-|n|x}[1 + |n| \, x] \, F(n) - xe^{-|n|x} \, G(n) \quad \text{pro} \quad x > 0 \,.$$

V prostoru $L^2(-\infty, \infty)$ je $\lim_{x \to 0} U(x, n) = F(n)$. To podle věty 3 dokazuje, že $\lim_{x \to 0} \int_a^b [u(x, y) - f(y)]^2 \, \mathrm{d}y = 0$. Podobně lze dokázat i ostatní vztahy 1 z věty 15.

Dokažme nyní bod 3 věty 15. Posuňme počátek soustavy souřadnic do bodu spojitosti $[0, y_0]$ (tak to uděláme i v dalším). Jednoduchými výpočty dostaneme z (52)

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2} f'(s) \, \mathrm{d}s + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2} g(s) \, \mathrm{d}s \,, \tag{53}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2} f'(s) \, \mathrm{d}s -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(y - s)^2}{(x^2 + (y - s)^2)^2} g(s) \, \mathrm{d}s \,. \tag{54}$$

Buď nyní ε kladné, libovolně malé číslo. K tomuto číslu ε existuje číslo $\delta > 0$ tak, že

$$|s| < \delta \Rightarrow |f'(s) - f'(0)| < \varepsilon\,, \quad |g(s) - g(0)| < \varepsilon\,.$$

Zkoumejme nejdříve rovnici (53). Je

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2} (f'(s) - f'(0))\, ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2} f'(0)\, ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2} (f'(s) - f'(0))\, ds + \frac{2}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2} (f'(s) -$$

$$- f'(0))\, ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2} (g(s) - g(0))\, ds + \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2} (g(s) -$$

$$- g(0))\, ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2} g(0)\, ds + \frac{2}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2} (g(s) - g(0))\, ds\,. \tag{55}$$

Nechť nyní $x \to 0$ a $y \to 0$. První, druhý, pátý a šestý integrál z (55) konvergují k nule. Protože

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\, ds = 1\,, \quad \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2} g(0)\, ds = 0\,,$$

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2} (f'(s) - f'(0))\, ds \right| < \varepsilon \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + (y - s)^2)^2}\, ds = \varepsilon\,,$$

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^2(y - s)}{(x^2 + (y - s)^2)^2} (g(s) - g(0))\, ds \right| < \varepsilon \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{x^2 s}{(x^2 + s^2)^2}\, ds = \varepsilon \frac{2}{\pi}\,,$$

dostáváme: Pro dosti malá x a y je

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - f'(0) \right| < \left(\frac{2}{\pi} + 1 \right) \varepsilon\,.$$

Úplně stejně dokážeme, že pro dosti malá x a y je

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + g(0)\right| < \left(\frac{2}{\pi} + 1\right)\varepsilon,$$

když využijeme toho, že platí

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^2}\,ds = 1.$$

Tím je důkaz bodu 3 dokončen.

Abychom dokázali bod 2, vraťme se k formuli (52). Úplně stejně, jako jsme dokázali bod 3, se ukáže, že

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{(x^2+(y-s)^2)^2}f(s)\,ds = f(0).$$

Dále je zřejmě $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,g(s)}{x^2+(y-s)^2}\,ds = 0$, protože $\frac{x^2}{x^2+(y-s)^2} \leqq 1$.

Buď nyní $h(s) = \int\limits_{-\infty}^{s} g(t)\,dt$. Rovnici (52) můžeme dát tento tvar:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3}{(x^2+(y-s)^2)^2}f(s)\,ds + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^2}h(s)\,ds. \tag{56}$$

Derivujeme-li (56), dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}f(s)\,ds + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4-3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}h(s)\,ds, \tag{57}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-x^4+3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}f(s)\,ds +$$

$$+\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(y-s)^3-x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}h(s)\,ds. \tag{58}$$

Nechť v bodě nula má $f(s)$ a $h(s)$ konečnou derivaci. Zvolme ε kladné, libovolně malé číslo. Existuje potom číslo δ kladné takové, že

$$|s| < \delta \Rightarrow f(s) = f(0) + f'(0)\,s + \varepsilon(s)\,.\,s,$$
$$h(s) = h(0) + g(0)\,s + \tilde{\varepsilon}(s)\,s,$$

při čemž $|\varepsilon(s)| < \varepsilon$, $|\tilde{\varepsilon}(s)| < \varepsilon$. Přepišme (57) do tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,(f(s) - f(0) - f'(0)\,s)\,\mathrm{d}s -$$

$$-\frac{8}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,(f(s) - f(0) - f'(0)\,s)\,\mathrm{d}s -$$

$$-\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,(f(0) + f'(0)\,s)\,\mathrm{d}s -$$

$$-\frac{8}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,\varepsilon(s)\,s\,\mathrm{d}s + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,(h(s) - h(0) -$$

$$-\,g(0)\,s)\,\mathrm{d}s + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,(h(s) - h(0) - g(0)\,s)\,\mathrm{d}s +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,(h(0) + g(0)\,s)\,\mathrm{d}s +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,s\,\tilde{\varepsilon}(s)\,\mathrm{d}s\,. \tag{59}$$

Nechť nyní $x \to 0$, $y \to 0$. První, druhý, pátý a šestý integrál z (59) konvergují k nule. Dále je

$$-\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,\mathrm{d}s = 0\,, \quad -\frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,s\,\mathrm{d}s = 1\,,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4 - 3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^2}\,s^i\,\mathrm{d}s = 0\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Protože platí

$$\left|-\frac{8}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{x^3(y-s)}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,s\,\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s\right| < \varepsilon\,\frac{16}{\pi}\left[\int_{0}^{\infty}\frac{x^3s^2}{(x^2+s^2)^3}\,\mathrm{d}s +\right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\infty}\frac{x^3|y|s}{(x^2+s^2)^3}\,\mathrm{d}s\right] \leqq \varepsilon\left[1 + \frac{4}{\pi}K\right],$$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{x^4-3x^2(y-s)^2}{(x^2+(y-s)^2)^3}\,s\,\tilde{\varepsilon}(s)\,\mathrm{d}s\right|<\varepsilon\frac{4}{\pi}\left[\int_0^\infty\frac{x^4s}{(x^2+s^2)^3}\,\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty\frac{x^4|y|}{(x^2+s^2)^3}\,\mathrm{d}s+3\int_0^\infty\frac{x^2s^3}{(x^2+s^2)^3}\,\mathrm{d}s+3\int_0^\infty\frac{x^2|y|s^2}{(x^2+s^2)^3}\,\mathrm{d}s\right]\leqq\varepsilon\left[\frac{4}{\pi}+K\right],$$

dostáváme

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)-f'(0)\right|<\varepsilon\left(1+\frac{4}{\pi}\right)(1+K)$$

pro dostatečně malá x a y.

Úplně stejně dokážeme, že $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=-g(0)$, pokud je $\left|\frac{y}{x}\right|\leqq k$. Tím je věta 15 dokázána.

Zkoumejme nyní vlastnosti řešení biharmonického problému pro klín, jestliže $f_1(r)=g_1(r)=0$.

Věta 16. *Nechť $u(r,\Theta)\in B$ a nechť $f_1(r)=g_1(r)=0$, $0<r<\infty$. Potom existuje číslo ε kladné a funkce $u^*(r,\Theta)$ definovaná pro $0<r<\infty$, $-\frac{\omega}{2}<\Theta<<\frac{\omega}{2}+\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, taková, že je $u^*(r,\Theta)=u(r,\Theta)$ pro $0<r<\infty$, $|\Theta|<\frac{\omega}{2}$, a dále $u^*\left(r,\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\partial u^*}{\partial r}\left(r,\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial\Theta}\left(r,\frac{\omega}{2}\right)=0$ a $u^*\left(r,\vartheta+\frac{\varepsilon}{2}\right)=v(r,\vartheta)\in B$. Při tom je $0<r<\infty$, $|\vartheta|<\frac{\omega}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$ a $v(r,\Theta)$ přísluší stejné konstanty γ, δ.*

Důkaz. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že $f_2(r)=g_2(r)=0$ pro $r\geqq2$. Okrajové podmínky pro $\Theta=-\frac{\omega}{2}$ můžeme totiž rozdělit tak, jako jsme to učinili ve větě 10, tj. psát

$$f_2(r)=f_{21}(r)+f_{22}(r)\,,\quad g_2(r)=g_{21}(r)+g_{22}(r)\,.$$

Vzhledem k unicitě pak platí: $u(r,\Theta)=u_1(r,\Theta)+u_2(r,\Theta)$. (Označení viz v důkaze věty 10.) Ve vzorci (26) položme

$$F_{11}(n)=0\,,\quad G_{11}(n+1)=0\,,\quad F_{21}(n)=F_2(n)\,,$$
$$G_{21}(n+1)=G_2(n+1)\,.$$

Po úpravě pak z (26) dostaneme

$$U(n,\Theta)=Z_1(n,\Theta)\,F_2(n)+Z_2(n,\Theta)\,G_2(n+1)\,.$$

Výpočtem analogickým jako při důkazu bodu (b) věty 10 dostaneme pro $|y|\geqq1$

$$|n\, Z_i(n, \Theta)| \leqq M(x)|y|^3\, e^{-|y|\left(\omega - \left|\frac{\omega}{2} - \Theta\right|\right)},$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta} Z_i(n, \Theta)\right| \leqq M(x)|y|^3\, e^{-|y|\left(\omega - \left|\frac{\omega}{2} - \Theta\right|\right)},$$

$$\Theta \in \left\langle 0, \frac{\omega}{2} + \varepsilon \right\rangle, \quad i = 1, 2,$$

při čemž za ε můžeme zvolit každé číslo menší než ω a $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$. Nyní můžeme již k dokončení důkazu věty 16 užít mechanismu z důkazu věty 10. Podotkněme jen, že odhady 5 definice 5 platí v tomto případě pro $-\frac{\omega}{2} < -\varphi \leqq \Theta \leqq \leqq \frac{\omega}{2} + \varepsilon$.

Podobného obsahu jako věta 16 je

Věta 17. *Buď $u(r, \Theta) \in B$ a nechť $f_2(r) = g_2(r) = 0$ pro $0 < r < \infty$ a $f_1(r) = g_1(r) = 0$ pro $0 < a \leqq r \leqq b < \infty$. Potom*

$$\lim_{\substack{r \to r_0 \\ \Theta \to \frac{\omega}{2}}} u(r, \Theta) = \lim_{\substack{r \to r_0 \\ \Theta \to \frac{\omega}{2}}} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) = \lim_{\substack{r \to r_0 \\ \Theta \to \frac{\omega}{2}}} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) = 0,$$

je-li $r_0 \in (a, b)$.

Důkaz. Biharmonickou funkci $u(r, \Theta)$ napišme ve tvaru (42). Proveďme nyní bližší zkoumání vlastností funkcí $\frac{\partial^k}{\partial \Theta^k} G_i(r, \Theta, \omega)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $k = 0, 1$, pro $r \neq 1$ a $\Theta \to \pm \frac{\omega}{2}$. Zkoumejme např. nejdříve funkci $G_1(r, \Theta, \omega)$, když $\Theta \to \frac{\omega}{2}$. V integrálu (38) proveďme substituci $n + 1 = m$. Protože integrand $I(n, \Theta)$ má tu vlastnost, že je $I(\bar{n}, \Theta) = \overline{I(n, \Theta)}$, dostáváme

$$G_1(r, \Theta, \omega) = \operatorname{Re} \frac{r}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{A}}{m \sin \omega + \sin m\omega}\, r^{-m}\, \mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{A} = (m + 1) \sin (m + 1) \frac{\omega}{2} \cos (m - 1)\, \Theta - (m - 1) \sin (m - 1) \frac{\omega}{2} \cos (m + 1)\, \Theta,$$

kde $x' + iy = m$, $x + 1 = x'$. Položme nyní

$$A_1(m, \Theta) = (m + 1) \frac{i}{4}\, \mathrm{e}^{-i\left[(m+1)\frac{\omega}{2} + (m-1)\Theta\right]} - (m - 1) \frac{i}{4}\, \mathrm{e}^{-i\left[(m-1)\frac{\omega}{2} + (m+1)\Theta\right]},$$

$$B_1(m, \Theta) = (m + 1) \sin (m + 1) \frac{\omega}{2} \cos (m - 1)\, \Theta - (m - 1) \sin (m - 1) \frac{\omega}{2} \,.\, \cos (m + 1)\, \Theta.$$

Pro $0 \leqq \Theta < \frac{\omega}{2}$, $0 < r < \infty$ buď

$$S_1(r, \Theta, x') = \operatorname{Re} \frac{2r^{1-x'}}{\pi i} e^{ix'\frac{\omega}{2}} \int_0^\infty A_1(m, \Theta)\, e^{-y\omega} r^{-iy}\, \mathrm{d}y\,,$$

$$R_1(r, \Theta, x') = \operatorname{Re} \frac{r^{1-x'}}{\pi} \int_0^\infty \frac{B_1(m, \Theta) - A_1(m, \Theta)}{m \sin \omega + \sin m\omega}\, r^{-iy}\, \mathrm{d}y +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{r^{1-x'}}{\pi} \int_0^\infty A_1(m, \Theta) \left[\frac{1}{m \sin \omega + \sin m\omega} - \frac{1}{\frac{i}{2} e^{-i\omega m}} \right] r^{-iy}\, \mathrm{d}y\,.$$

Zřejmě je $G_1(r, \Theta, \omega) = S_1(r, \Theta, x') + R_1(r, \Theta, x')$. Dále platí pro $k = 0, 1$

$$\left| \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\Theta^k} \frac{B_1(m, \Theta) - A_1(m, \Theta)}{m \sin \omega + \sin m\omega} \right| \leqq M(x')\, y^{k+1} e^{-\frac{\omega}{2} y}\,,$$

kde $0 \leqq \Theta < \frac{\omega}{2}$, $y \geqq 1$ a $m(x')$ je konstanta závislá pouze na x'. Vzhledem k tomu, že platí

$$\left| \frac{1}{m \sin \omega + \sin m\omega} - \frac{1}{\frac{i}{2} e^{-i\omega m}} \right| \leqq \overline{M}(x')\, y e^{-2y\omega}$$

pro $y \geqq 1$ ($\overline{m}(x')$ je opět konstanta závislá pouze na x'), je pro $k = 0, 1$

$$\left| \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\Theta^k} A_1(m, \Theta) \left[\frac{1}{m \sin \omega + \sin m\omega} - \frac{1}{\frac{i}{2} e^{-i\omega m}} \right] \right| \leqq \overline{\overline{M}}(x')\, y^{k+1} e^{-y\omega}\,.$$

Dále platí

$$B_1\left(m, \frac{\omega}{2}\right) = m \sin \omega + \sin m\omega\,, \quad A_1\left(m, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{i}{2} e^{-i\omega m}$$

a odtud plyne $\lim\limits_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} R_1(r, \Theta, x') = 0$. Zrovna tak vypočteme, že

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \frac{\partial}{\partial \Theta} R_1(r, \Theta, x') = \lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \frac{\partial}{\partial r} R_1(r, \Theta, x') = 0\,.$$

Výraz $S_1(r, \Theta, x')$ můžeme bez obtíží vyčíslit. Přesvědčíme se tak, že pro $r \neq 1$ je

$$\lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} S_1(r, \Theta, x) = \lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \frac{\partial}{\partial \Theta} S_1(r, \Theta, x) = \lim_{\Theta \to \frac{\omega}{2}} \frac{\partial}{\partial r} S_1(r, \Theta, x) = 0\,.$$

Bez obtíží dostaneme také tyto odhady:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\Theta^k} R_1(r, \Theta, x')\right| \leqq M(x')\, r^{-x}\,, \quad \left|\frac{\partial}{\partial r} R_1(r, \Theta, x')\right| \leqq M(x')\, r^{-x-1}\,,$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial\Theta^k} S_1(r, \Theta, x')\right| \leqq M(x', \varepsilon)\, r^{-x}\,, \quad k = 0, 1\,, \quad \left|\frac{\partial}{\partial r} S_1(r, \Theta, x')\right| \leqq M(x')\, r^{-x-1}\,, \tag{59a}$$

pokud r non $\epsilon\ (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ a $0 \leqq \Theta < \frac{\omega}{2}$. Buď tedy nyní $r_0 \in (a, b)$. Pak platí

$$\int_0^\infty G_1\left(\frac{r}{s}\, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^a \ldots + \int_b^\infty \ldots\,. \tag{60}$$

Uvažme například první integrál z (60). Buď $r \in (a', b')$, kde $a < a' < b' < b$. Je $\frac{r}{s} > \frac{a'}{a} = 1 + \varepsilon'$, kde $\varepsilon' > 0$. Z odhadů (59) pro $0 < \tau < \lambda_1(\omega) - 1$ dostáváme

$$\left|G_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\right| \leqq M(\tau)\, r^{-\tau}\, |f_1(s)|\, s^{\tau-1}\,,$$

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial\Theta}\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\right| \leqq M(\tau)\, r^{-\tau}\, |f_1(s)|\, s^{\tau-1}\,,$$

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial r}\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\right| \leqq M(\tau)\, r^{-\tau-1}\, |f_1(s)|\, s^{\tau-1}\,.$$

Odtud dostáváme již snadno

$$\lim_{\substack{\Theta \to \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0}} \int_0^a G_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\, \mathrm{d}s = 0$$

a podobně pro první derivaci podle r a Θ.

Úplně stejně lze ukázat, že tytéž vlastnosti má také integrál

$$\int_b^\infty G_1\left(\frac{r}{s}, \Theta, \omega\right) \frac{1}{2s} f_1(s)\, \mathrm{d}s,$$

a naprosto analogicky můžeme postupovat i při posuzování ostatních integrálů z (42). Tím je důkaz věty 17 proveden.

Z vět 14, 15, 16, 17 plyne snadno

Věta 18. *Nechť je $u(r, \Theta) \in B$ a nechť přísluší funkcím $f_i(r)$, $g_i(r)$, $i = 1, 2$. Je-li $0 < a \leqq b < \infty$, potom platí:*

1. $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_a^b [u(x, y) - f_1(y)]^2\, \mathrm{d}y = 0\,, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - f_1'(y)\right]^2 \mathrm{d}y = 0\,,$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + g_1(y)\right]^2 dy = 0\,,$$

kde kartézské souřadnice x, y jsou zavedeny tak, že osa $y > 0$ je totožná s ramenem klínu $\Theta = \frac{\omega}{2}$. Je-li totožná s ramenem $\Theta = -\frac{\omega}{2}$, pak platí

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \int_a^b [u(x, y) - f_2(y)]^2 \, dy = 0\,, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - f_2'(y)\right]^2 dy = 0\,,$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - g_2(y)\right]^2 dy = 0\,.$$

2. *Dále platí:* $\lim\limits_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0 > 0}} u(r, \Theta) = f_{\substack{1\\2}}(r_0)$ *a pro skoro všechna* $r_0 \in (0, \infty)$ *taková, že* $f_{\substack{1\\2}}(r)$ *a* $\int^r g_{\substack{1\\2}}(s)\, ds$ *mají konečnou derivaci, a je*

$$\lim_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0}} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) = f_{\substack{1\\2}}'(r_0)\,, \quad \lim_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0}} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) = \pm\, g_{\substack{1\\2}}(r_0)\,.$$

Při tom body $[r, \Theta]$ leží v libovolném, ale pevném trojúhelníku Δ tak, že $\Delta \subset K$ a $\bar{\Delta}\bar{K} = \left[r_0, \pm \frac{\omega}{2}\right]$. Funkce $g_{\substack{1\\2}}(r)$ jsou případně změněné na množině míry nula tak, aby $[\int^r g_{\substack{1\\2}}(s)\, ds]' = g_{\substack{1\\2}}(r)$ platilo tam, kde derivace je konečná.

3. *Je-li bod $r_0 > 0$ bodem spojitosti funkcí $f_{\substack{1\\2}}'(r)$ a $g_{\substack{1\\2}}(r)$, potom*

$$\lim_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0}} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) = f_{\substack{1\\2}}'(r_0)\,, \quad \lim_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to r_0}} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) = \pm\, g_{\substack{1\\2}}(r_0)\,.$$

Důkaz. Buď $\langle a, b\rangle$ uvažovaný interval. Stačí, když dokážeme vlastnosti 2 a 3 pro $r_0 \in (a, b)$ vzhledem k tomu, že za a, b jsme mohli zvolit libovolná čísla $0 < a \leqq b < \infty$. Zřejmě bez újmy obecnosti stačí, když budeme zkoumat případ $\Theta \to \frac{\omega}{2}$.

Buďte nyní funkce $f_{11}(r)$, $f_{12}(r)$ absolutně spojité a $g_{11}(r)$, $g_{12}(r)$ takové, že

$$f_1(r) = f_{11}(r) + f_{12}(r)\,, \quad g_1(r) = g_{11}(r) + g_{12}(r)\,;$$

pak existují konstanty $0 < a' < a \leqq b < b' < \infty$ takové, že

$$f_{12}(r) = 0\,, \quad r \operatorname{non} \in (a', b')\,, \quad g_{12}(r) = 0\,, \quad r \operatorname{non} \in (a', b')\,,$$

$$\int_{a'}^{b'} [f_{12}'(r)]^2 \, dr < \infty\,, \quad \int_{a'}^{b'} [g_{12}(r)]^2 \, dr < \infty\,.$$

Podle (42) platí

$$u(r, \Theta) = u_1(r, \Theta) + u_2(r, \Theta) + u_3(r, \Theta) .$$

Zde funkce $u_1(r, \Theta)$ je definována formulí (42), dosadíme-li za $f_1(r)$ i za $g_1(r)$ nulu, funkce $u_2(r, \Theta)$ formulí (42), když dosadíme za $f_2(r)$ i za $g_2(r)$ nulu a za $f_1(r)$ resp. $g_1(r)$ funkci $f_{11}(r)$ resp. $g_{11}(r)$; posléze funkce $u_3(r, \Theta)$ je definována formulí (42), když za $f_2(r)$ i za $g_2(r)$ dosadíme nulu a za $f_1(r)$ resp. $g_1(r)$ funkci $f_{12}(r)$ resp. $g_{12}(r)$. Podle věty 16 je funkce $u_1(r, \Theta)$ (a její derivace) spojitě prodlužitelná na rameno klínu $\Theta = \frac{\omega}{2}$ a platí

$$u_1\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = \frac{\partial u}{\partial r}\left(r, \frac{\omega}{2}\right) = 0$$

pro $r > 0$ a podle věty 17 je $u_2(r, \Theta)$ (a její prvé derivace) spojitě prodlužitelná k nule pro $r_0 \in (a', b')$.

Zaveďme nyní kartézské souřadnice, tak aby osa $y > 0$ byla totožná s ramenem klínu $\Theta = \frac{\omega}{2}$. Dosaďme do (52) za $f(s)$ funkci $f_{12}(s)$ a za $g(s)$ funkci $g_{12}(s)$. Takto získanou funkci nazveme $u_4(r, \Theta)$. Dále od funkce $u_4(r, \Theta)$ odečteme funkci $u_5(r, \Theta)$, kterou získáme, když v (42) za $f_1(s)$ i za $g_1(s)$ dosadíme nulu, za $f_2(s)$ položíme $u_4\left(s, -\frac{\omega}{2}\right)$ a za $g_2(s)$ položíme $-\frac{1}{r}\frac{\partial u_4}{\partial \Theta}\left(s, -\frac{\omega}{2}\right)$. Vzhledem k unicitě a k tomu, že $u_4(r, \Theta) \in B$, platí

$$u_3(r, \Theta) = u_4(r, \Theta) - u_5(r, \Theta) .$$

Opět podle věty 16 má funkce $u_5(r, \Theta)$ na horním rameni klínu tytéž vlastnosti jako funkce $u_1(r, \Theta)$. Funkce $u_4(r, \Theta)$ má však vlastnosti dané větou 15. To jsou však právě vlastnosti požadované větou 18. Tím je důkaz proveden.

Nyní se budeme poněkud blížeji zabývat chováním řešení ve vrcholu nekonečného klínu. V prvé řadě provedeme bližší analysu vztahu mezi konstantami μ, ν a γ, δ a pak vyslovíme některé postačující podmínky pro to, aby první derivace řešení byly spojitě prodlužitelné i ve vrcholu klínu.

Věta 19. *Nechť* $\mu < 0$. (Viz definice 5.) *Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby* $\mu = \gamma$, *je: Funkce* $f_i(s)$ *jsou absolutně spojité v intervalu* $\langle 0, \infty)$ *a je* $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Podobně platí: Nechť $\nu > 0$. *Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby* $\nu = \delta$, *je: Funkce* $f_i(s)$ *jsou absolutně spojité v intervalu* $\langle 0, \infty\rangle$ *a je* $f_1(\infty) = f_2(\infty) = 0$ *(to znamená, že* $\lim_{r\to\infty} f_1(r) = \lim_{r\to\infty} f_2(r) = 0$).

Důkaz. Zabývejme se např. první částí věty 19. Shodně s důkazem věty 10 pišme $f_1(r) = f_{11}(r) + f_{12}(r)$ atd. Zkoumejme nyní formuli (26), což je obraz funkce $u_1(r, \Theta)$. Místo $F_{i1}(n)$ pišme podle (25) $-\frac{1}{n}\int\limits_0^\infty r^n f'_{i1}(r)\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{n}$. $H_i(n+1)$. Nyní platí, že je $\mu = \gamma$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $U(n, \Theta)$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta} U(n, \Theta)$ nemají póly v bodě $n = 0$. Jestliže je totiž tato podmínka splněna, potom na základě odhadů z důkazu věty (10) je $U(n, \Theta)$, $n\,U(n, \Theta)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta}$. $U(n, \Theta) \in H_{\mu,\nu'}$ a odtud již plyne podobně jako při důkazu věty 10, že $\mu = \gamma$. (Viz označení v důkaze věty 10.) Z formule (26) vyplývá, že to nastává právě tehdy, když $\int\limits_0^\infty f'_{i1}(r)\,\mathrm{d}r = 0$, $i = 1, 2$, což je ekvivalentní s podmínkou, že funkce $f_i(s)$ jsou spojité v počátku zprava a že je $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Druhá část věty 19 se dokáže stejně a tím se důkaz věty 19 dokončí.

Chování biharmonické funkce v rohu popisuje

Věta 20. *Buď $u(r, \Theta) \in B$. Nechť platí, že $f_i(r)$ a $\int\limits_1^r g_i(s)\,\mathrm{d}s$ mají v bodě nula konečnou derivaci zprava $f'_i(0)$ a $g_i(0)$. Nechť dále platí, že $f_1(0) = f_2(0)$,*

$$f'_1(0) \cos\frac{\omega}{2} - g_1(0) \sin\frac{\omega}{2} = f'_2(0) \cos\frac{\omega}{2} - g_2(0) \sin\frac{\omega}{2},$$

$$f'_1(0) \sin\frac{\omega}{2} + g_1(0) \cos\frac{\omega}{2} = -f'_2(0) \sin\frac{\omega}{2} - g_2(0) \cos\frac{\omega}{2}. \tag{61}$$

Předpokládejme dále, že

$$\int\limits_0^1 [f'_i(r) - f'_i(0)]^2\, r^{2\alpha+1}\,\mathrm{d}r < \infty\,, \quad \int\limits_0^1 [g_i(r) - g_i(0)]^2 \,.\, r^{2\alpha+1}\,\mathrm{d}r < \infty\,,$$

kde $\alpha < -1$. Potom platí

$$\lim_{r\to 0} u(r, \Theta) = f_1(0)\,, \quad |\Theta| < \frac{\omega}{2}\,, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = f'_1(0)\,,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -g_1(0)\,.$$

Předpokládáme při tom, že je $[\int\limits_1^r g_i(s)\,\mathrm{d}s]' = g_i(0)$ pro $r = 0$ a $i = 1, 2$. Body $[x, y]$ leží v nějakém klínu K_1, libovolném ale pevně zvoleném, obsaženém v našem klínu K, s vrcholovým úhlem $0 < \varphi < \omega$ a vrcholem ve vrcholu klínu K; osa y kartézských souřadnic splývá s ramenem klínu $\Theta = \frac{\omega}{2}$. $\Big($Analogické výsledky dostaneme pro rameno $\Theta = -\frac{\omega}{2}\Big)$.

Jestliže jsou $f_i'(r)$ a $g_i(r)$, $i = 1, 2$, spojité v bodě 0 a platí-li podmínky (61), *potom*

$$\lim_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to 0}} \frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta) = f_{\frac{1}{2}}'(0) , \quad \lim_{\substack{\Theta \to \pm \frac{\omega}{2} \\ r \to 0}} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta) = \pm g_{\frac{1}{2}}(0) .$$

Důkaz. Najdeme nejdříve konstanty a, b, c tak, aby funkce $u_1(r, \Theta) = a + br \cos \Theta + cr \sin \Theta$ splňovala tyto podmínky:

$$u_1(0, 0) = f_1(0) , \quad \frac{\partial u_1}{\partial r}\left(0, \pm \frac{\omega}{2}\right) = f_{\frac{1}{2}}'(0) , \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \Theta}\left(0, \pm \frac{\omega}{2}\right) = \pm g_{\frac{1}{2}}(0) .$$

Pak dostaneme pro konstanty a, b, c tyto podmínky:

$$a = f_1(0) , \quad b \cos \frac{\omega}{2} + c \sin \frac{\omega}{2} = f_1'(0) , \quad b \cos \frac{\omega}{2} - c \sin \frac{\omega}{2} = f_2'(0) ,$$

$$- b \sin \frac{\omega}{2} + c \cos \frac{\omega}{2} = g_1(0) , \quad b \sin \frac{\omega}{2} + c \cos \frac{\omega}{2} = - g_2(0) . \tag{62}$$

Snadno se přesvědčíme, že pro systém (62) vzhledem k platnosti (61) je splněna Frobeniova podmínka. Zřejmě je $u_1(r, \Theta) \in B$ a funkci $u(r, \Theta) = u_1(r, \Theta)$ přísluší konstanta $\gamma = \alpha$. Postačí, dokážeme-li tvrzení věty 20 pouze pro $\Theta \to \frac{\omega}{2}$ a $0 \leqq \Theta$.

Funkci $u(r, \Theta) - u_1(r_0, \Theta)$ rozdělme opět, podobně jako v důkaze věty 18, na několik sčítanců. Podle (42) je

$$u(r, \Theta) - u_1(r, \Theta) = u_2(r, \Theta) + u_3(r, \Theta) + u_4(r, \Theta) ,$$

kde $u_2(r, \Theta)$ dostaneme z 42, když za $f_1(r)$ i za $g_1(r)$ dosadíme nulu, za $f_2(r)$ resp. $g_2(r)$ dosadíme $f_2(r) - f_2(0) - f_2'(0)\, r$ resp. $g_2(r) - g_2(0)$. Funkci $u_3(r, \Theta)$ dostaneme tak, že za $f_2(r)$ i za $g_2(r)$ dosadíme nulu a za $f_1(r)$ resp. $g_1(r)$ dosadíme $f_{12}(r)$ resp. $g_{12}(r)$ (viz označení v důkaze věty 10). Funkci $u_4(r, \Theta)$ dostaneme posléze tak, že za $f_2(r)$ i za $g_2(r)$ dosadíme nulu a za $f_1(r)$ resp. $g_1(r)$ dosadíme $f_{11}(r)$ resp. $g_{11}(r)$. Nyní podle věty 19 a 16 je

$$|u_2(r, \Theta)| \leqq Mr^{-\alpha} , \quad \left| \frac{\partial}{\partial r} u_2(r, \Theta) \right| \leqq Mr^{-\alpha-1} ,$$

$$\left| \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \Theta} u_2(r, \Theta) \right| \leqq Mr^{-\alpha-1} ,$$

pokud $0 < r \leqq 1$ a $0 \leqq \Theta \leqq \frac{\omega}{2}$, a podle odhadů (59b) platných pro $\alpha < < \tau < -1$

$$|u_3(r, \Theta)| \leqq Mr^{-\tau} , \quad \left| \frac{\partial}{\partial r} u_3(r, \Theta) \right| \leqq Mr^{-\tau-1} , \quad \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \Theta}(r, \Theta) \right| \leqq Mr^{-\tau-1} ,$$

pokud $0 < r \leqq \frac{1}{2}$, $0 \leqq \Theta \leqq \frac{\omega}{2}$. Dosaďme nyní $F_{11}(n)$ resp. $G_{11}(n + 1)$ do (48) za $F(n)$ resp. $G(n + 1)$. Z věty 19 plyne, že $F_{11}(n)$ a $G_{11}(n + 1) \in H_{\alpha\nu}$, kde ν $(\alpha < \nu < 0)$ je libovolné číslo. Formule (48) dává obraz funkce $u_5(r, \vartheta)$, $U_5(n, \vartheta)$, pro nějž platí

$$U_5(n, \vartheta)\,, \quad - n\, U_5(n, \vartheta)\,, \quad \frac{dU_5}{d\Theta}(n, \vartheta) \in H_{\alpha\nu}$$

(bez újmy obecnosti předpokládáme, že $-2 < \alpha$).

Funkce

$$u_5(r, \vartheta) = u_5\left(r, \Theta + \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right) = \tilde{u}_5(r, \Theta) \in B$$

má tyto vlastnosti

$$\left|\tilde{u}_5\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)\right| \leqq Mr^{-\alpha}\,, \quad \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)\right| \leqq Mr^{-\alpha-1}\,, \quad 0 < r \leqq 1\,,$$

$$\left|\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)\right| \leqq Mr^{-\alpha-1}\,,$$

což plyne z (48). Jestliže nyní označíme $u_6(r, \Theta)$ funkci, kterou dostaneme z (42), když za $f_1(r)$ i za $g_1(r)$ dosadíme nulu a za $f_2(r)$ resp. $g_2(r)$ dosadíme $\tilde{u}_5\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)$ resp. $-\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}_5}{\partial \Theta}\left(r, -\frac{\omega}{2}\right)$, pak pro $u_6(r, \Theta)$ dostaneme podobně jako pro funkci $u_2(r, \Theta)$

$$|u_6(r, \Theta)| \leqq Mr^{-\alpha^*}\,, \quad \left|\frac{\partial u_6}{\partial r}(r, \Theta)\right| \leqq Mr^{-\alpha^*-1}\,,$$

$$\left|\frac{1}{r}\frac{\partial u_6}{\partial \Theta}(r, \Theta)\right| \leqq Mr^{-\alpha^*-1}\,, \quad 0 < r \leqq 1\,, \quad 0 < \Theta \leqq \frac{\omega}{2}\,.$$

Zde je $\alpha < \alpha^* < -1$. Vzhledem k unicitě platí $u_4(r, \Theta) = \tilde{u}_5(r, \Theta) - u_6(r, \Theta)$.

Dále napišme funkci $u_5(r, \vartheta)$ ve tvaru (52). Protože funkce $f_1(r) - f_1(0) - r f_1'(0)$ a $\int_1^r (g(s) - g(0))\, ds$ mají v bodě nula derivaci rovnou nule, jsou splněny podmínky věty 15 pro funkce $f(s)$ a $g(s)$ z vzorce (52). Protože je

$$u(r, \Theta) = u_1(r, \Theta) + u_2(r, \Theta) + u_3(r, \Theta) + \tilde{u}_5(r, \Theta) - u_6(r, \Theta)\,,$$

dostáváme odtud již tvrzení věty 20.

Závěrečné poznámky

Poznamenejme na závěr, že s biharmonickým problémem pro nekonečný klín je svázáno ještě mnoho zajímavých otázek. Tak v práci [8] jsou funkce $f_i'(r)$ a $g_i(r)$ po částech spojité, o bodech nespojitosti je předpokládáno, že jsou prvého druhu a že jejich hromadným bodem může být pouze nekonečno. Kromě toho se předpokládá, že v počátku funkce $f_i'(r)$ a $g_i(r)$ jsou $O(r^{-\alpha-1})$, kde $\alpha < \lambda_1(\omega) - 1$, a že v nekonečnu jsou $O(r^{-\beta-1})$, kde $\beta > -\lambda_1(\omega) - 1$. Definice biharmonického problému podaná v [8] je klasická. Požaduje mimo jiné, aby první derivace řešení $u(r, \Theta)$ byly stejnoměrné vzhledem $\Theta \in \left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right)$ v okolí počátku $O(r^{-\gamma-1})$, kde $-\lambda_1(\omega) - 1 < \gamma < \lambda_1(\omega) - 1$, a v okolí nekonečna $O(r^{-\delta-1})$, kde $-\lambda_1(\omega) - 1 < \delta < \lambda_1(\omega) + 1$. Je dokázána existence a unicita takto definovaného problému.

Zajímavá je role Papkovičových čísel a Papkovičových funkcí. Třída řešení vyšetřovaná v tomto pojednání obsahuje prvky, které mají buď omezený Dirichletův integrál, nebo jsou rozumnou limitou takových prvků. Kdybychom kladli konstanty γ resp. δ např. do intervalu $\lambda_1(\omega) - 1$, $\lambda_2(\omega) - 1$, kde $\lambda_2(\omega) = \operatorname{Re} p_2$ (p_2 je další Papkovičovo číslo s větší reálnou částí, než $\operatorname{Re} p_1$), nebyla by výše uvedená podmínka s Dirichletovým integrálem splněna. Papkovičovy funkce (viz poznámku uvedenou po důkaze unicity) nepatří do žádné definované třídy B. V práci [8] jsou tyto otázky probírány podrobněji a důkazové metody jsou do velké míry založeny právě na vlastnostech Papkovičových funkcí.

Je známo, že na biharmonický problém vedou úlohy rovinné elasticity. Okrajové funkce $f_i'(r)$, $g_i(r)$ udávají vnější zatížení (při tzv. prvním problému rovinné elasticity). Naše definice biharmonického problému zahrnuje v sobě většinu prakticky důležitých případů, jako např. vnějšího zatížení osamělým břemenem na ramenech klínu nebo i ve vrcholu klínu, dále pak osamělými břemeny velikosti 1, které působí v bodech $r_k = a + bk$, kde $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $k = 1, 2, \ldots$ apod.

Pro biharmonickou funkci jistého typu definovanou na nekonečném klínu se dá dokázat v jistém smyslu věta o maximu. Její znění je toto:

Věta 21. *Buď funkce $u(r, \Theta) \in B$ a μ, ν jí příslušející čísla taková, že platí:*

1. $-\lambda_1(\omega) - 1 < \mu < \nu < \lambda_1(\omega) - 1$,

2. *je-li $\nu > 0$, potom nechť $f_1(\infty) = f_2(\infty) = 0$, je-li $\mu < 0$, potom nechť $f_1(0) = f_2(0) = 0$,*

3. $\mu \neq 0 \neq \nu$.

Potom existuje konstanta $M(\mu, \nu)$ (závislá pouze na μ, ν a nikoli na funkci $u(r, \Theta)$) taková, že platí

$$\max\left\{\int_0^\infty [u(r, \Theta)]^2\, r^{2x-1}\, dr\,,\quad \int_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial r}(r, \Theta)\right]^2 r^{2x+1}\, dr\,,\right.$$

$$\left.\int_0^\infty \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \Theta}(r, \Theta)\right]^2 r^{2x+1}\, dr\right\} \leqq M(\mu, \nu)\left\{\int_0^\infty \left[\frac{\partial u}{\partial r}\left(r, \frac{\omega}{2}\right)\right]^2 r^{2x+1}\, dr + \right.$$

$$+\int_0^\infty\left[\frac{\partial u}{\partial r}\left(r,-\frac{\omega}{2}\right)\right]^2 r^{2x+1}\,\mathrm{d}r+\int_0^\infty\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\Theta}\left(r,\frac{\omega}{2}\right)\right]^2 r^{2x+1}\,\mathrm{d}r+$$

$$+\int_0^\infty\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\Theta}\left(r,-\frac{\omega}{2}\right)\right]^2 r^{2x+1}\,\mathrm{d}r\Bigg\}\,,$$

kde x je buď rovno μ nebo ν.

Důkaz. Stejně jako jsme to učinili v důkaze věty 10, pišme

$$f_i(r)=f_{i1}(r)+f_{i2}(r)\,,\quad g_i(r)=g_{i1}(r)+g_{i2}(r)\,,\quad i=1,2\,.$$

Předpokládejme např., že $\mu<0$, $\nu<0$. Rovnost

$$\int_0^\infty f_{i1}(r)\,r^{n-1}\,\mathrm{d}r=-\frac{1}{n}\int_0^\infty f_{i1}(r)\,r^n\,\mathrm{d}r \tag{63}$$

platí pro $\operatorname{Re} n>0$. Protože $f_{i1}(0)=0$, $i=1,2$, platí, že funkce $-\frac{1}{n}\int_0^\infty f'_{i1}(r)\,.$ $.\,r^n\,\mathrm{d}r\in H_{\mu\beta}$, kde β je libovolné číslo větší než ν. Odtud plyne, že $f_{i1}\in h_{\mu\beta}$. Rovnost (63) tedy platí pro $\mu<\operatorname{Re} n<\beta$. Rovnost

$$\int_0^\infty f_{i2}(r)\,r^{n-1}\,\mathrm{d}r=-\frac{1}{n}\int_0^\infty f'_{i2}(r)\,r^n\,\mathrm{d}r \tag{64}$$

platí pro $\mu<\operatorname{Re} n<\nu<0$. Sečtením (63) a (64) dostaneme pro $\mu<\operatorname{Re} n<$ $<\nu<0$

$$\int_0^\infty f_i(r)\,r^{n-1}\,\mathrm{d}r=-\frac{1}{n}\int_0^\infty f'_i(r)\,r^n\,\mathrm{d}r\,. \tag{65}$$

Dosadíme-li (65) do (26) a užijeme-li odhadů zlomků a jejich derivací podle Θ z důkazu věty 10 a posléze Parcevalovy rovnosti 3 z věty 5, dostaneme tvrzení věty 21. Ostatní případy bychom dokázali úplně stejně.

Závěrem uveďme hlavní myšlenku, na níž je založeno řešení biharmonického problému konvexního mnohoúhelníka v [9]. Pro jednoduchost to ukážeme pro rovnostranný trojúhelník.

Rozdělme strany tohoto trojúhelníka body A_1, B_1, C_1 postupně na dvě stejné části. Hledejme biharmonickou funkci $u(x,y)$, která (zatím v blíže nedefinovaném smyslu) nabývá na hranici trojúhelníka hodnotu $f(s)$ (s je délka oblouku hranice) a její derivace podle normály hodnotu $g(s)$. Pokusme se funkci $u(x,y)$ vyjádřit jako součet $u_{A_0}(x,y)+u_{B_0}(x,y)+u_{C_0}(x,y)$, kde $u_{A_0}(x,y)$ je biharmonická funkce na klínu s vrcholem v A_0, s vrcholovým úhlem $\frac{\pi}{3}$, který obsahuje