ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 83 * PRAHA, 25. XI. 1958 * ČÍSLO 4

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

ВЛАСТИМИЛ ПТАК (Vlastimil Pták), Прага

(Поступило в редакцию 27/VII 1956 г.) DT: 517.9 513.81

Пусть в пространстве Банаха X дан оператор H. Далее пусть дано конечномерное подпространство $\tilde{X} \subset X$ и проектор P пространства X на $\tilde{X}$. Если на $\tilde{X}$ существует оператор, обратный к оператору $E - PH$, то существуют операторы, обратные к операторам $E - PH$, $E - HP$, $E - PHP$ на всем пространстве X. При некоторых условиях тогда можно решение уравнения $(E - H)\,x = y$ апроксимировать решением уравнения $(E - PHP)\,\tilde{x} = y$, а также дать оценку погрешности $|x - \tilde{x}|$.

В работе автора [2], примыкающей к работе [1] Л. В. Канторовича, были намечены некоторые результаты, касающиеся использования методов функционального анализа для оценки погрешности при приближенном решении интегральных уравнений. Основная идея состояла в использовании проекций на конечномерные пространства; эта идея получает дальнейшее развитие в настоящей работе. Разработанный метод является более эффективным, чем метод, описанный в [2].

Обозначения. На протяжении всей статьи через X будет обозначено данное пространство Банаха (т. е. полное нормированное линейное пространство). Под оператором (на пространстве X) мы понимаем отображение пространства X в X, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1. Если λ_1, λ_2 — действительные (соотв. комплексные) числа и если x_1, x_2 — элементы X, то $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$.

2. Существует число $\alpha > 0$ так, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $|Ax| \leqq \alpha |x|$. (Условие 2 равносильно требованию, чтобы отображение A было непрерывным.) Нормой оператора A мы назовем число

$$|A| = \sup_{|x| \leqq 1} |Ax| .$$

В множество $\mathbf{E}(X)$ всех операторов на пространстве X можно очевидным образом ввести операции αA, $A + B$, AB (α — действительное (соотв. комплексное) число, $A, B \in \mathbf{E}(X)$). Тогда множество $\mathbf{E}(X)$ является нормированным линейным пространством; из полноты пространства X следует, что и пространство $\mathbf{E}(X)$ является полным. Кроме того $\mathbf{E}(X)$ представляет собой (в нетривиальных случаях некоммутативное) кольцо с единичным элементом E (тождественный оператор).

Если далее $A \in \mathbf{E}(X)$, то пусть $\mathbf{R}(A)$ — множество всех Ax, где $x \in X$; пусть $\mathbf{N}(A)$ — множество всех $x \in X$, для которых $Ax = 0$.

Если $A, B \in \mathbf{E}(X)$, $AB = E$, то мы скажем, что оператор B (соотв. A) является правым (соотв. левым) обратным оператором к оператору A (соотв. B). Если для оператора A существует такой оператор B, что $AB = BA = E$, то мы пишем $B = A^{-1}$ и говорим, что B есть оператор, обратный к A (или что существует $A^{-1} = B$ и т. п.). Если $AB = E = CA$, то $B = CAB = C = A^{-1}$; следовательно оператор A имеет не более одного обратного оператора. Если оператор A отображает X на X просто (т. е. если $\mathbf{R}(A) = X$, $\mathbf{N}(A) = 0$), то по известной теореме Банаха обратное отображение также непрерывно, так что оператор A имеет обратный оператор. Пространство всех линейных функционалов, определенных на X, обозначим через X'.

1. Существование обратного оператора

В этом параграфе будут доказаны две теоремы, которые позволяют по поведению операторов определенного типа на каком-либо подпространстве судить о существовании обратного оператора на всем пространстве. Эти теоремы образуют абстрактное ядро вычислительного алгорифма, который будет в дальнейшем описан.

(1,1) Теорема. *Пусть $\tilde{X}$ — замкнутое подпространство; пусть P, $H \in \mathbf{E}(X)$. Предположим, что имеют место следующие соотношения:*

1° $\mathbf{R}(P) \subset \tilde{X}$,

2° $\mathbf{R}(E - PH) \supset \tilde{X}$,

3° $\mathbf{N}(E - PH) \cap \tilde{X} = \{0\}$.

Тогда на пространстве $\tilde{X}$ существует оператор, обратный к оператору $E - PH$.

Доказательство. Согласно 1° будет $(E - PH)\,\tilde{x} \in \tilde{X}$ для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Если, наоборот, дано $\tilde{y} \in \tilde{X}$, то согласно 2° существует $x \in X$ так, что $x - PHx = \tilde{y}$. Но так как согласно 1° $PHx \in \tilde{X}$, будет и $x \in \tilde{X}$; мы видим, что $E - PH$ отображает $\tilde{X}$ на $\tilde{X}$. Согласно 3° отображение $E - PH$

является простым на $\tilde{X}$. Итак, к оператору $E - PH$ на пространстве $\tilde{X}$ существует обратный оператор.

(1,2) Теорема. (*Условия как и в предыдущей теореме.*) *Пусть W — оператор, обратный к оператору $E - PH$ на пространстве $\tilde{X}$. Для любого $x \in X$ положим $Vx = W(Px)$. Тогда будет $V \in \mathbf{E}(X)$; для операторов $E - PH$, $E - HP$ существуют (на всем X) обратные операторы и имеет место $(E - PH)^{-1} = E + VH$, $(E - HP)^{-1} = E + HV$.*

Более того, если $P^2 = P$, $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$, то и оператор $E - PHP$ обладает обратным оператором и $(E - PHP)^{-1} = E + VHP = E + V - P$.

Доказательство. Так как $\mathbf{R}(P) \subset \tilde{X}$ и так как для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ имеет место $W(E - PH)\,\tilde{x} = (E - PH)\,W\tilde{x} = \tilde{x}$, то можно написать

$$W(E - PH)\,P = (E - PH)\,WP = P$$

или $V - VHP = V - PHV = P$.

Отсюда следует $VH - VHPH - PH = VH - PHVH - PH = 0$ (соотв. $HV - HVHP - HP = HV - HPHV - HP = 0$) и, следовательно,

$$(E + VH)(E - PH) = E + VH - PH - VHPH = E,$$
$$(E - PH)(E + VH) = E + VH - PH - PHVH = E$$

(соотв.

$$(E + HV)(E - HP) = E + HV - HP - HVHP = E,$$
$$(E - HP)(E + HV) = E + HV - HP - HPHV = E).$$

Пусть теперь $P^2 = P$, $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$. Тогда, очевидно, $PV = V$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}(E + VHP)(E - PHP) &= E + VHP - PHP - VHPHP = \\ &= E + (V - P - VHP)\,HP = E,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E - PHP)(E + VHP) &= E + VHP - PHP - PHPVHP = \\ &= E + (V - P - PHV)\,HP = E,\end{aligned}$$

так что, действительно, $E + VHP = (E - PHP)^{-1}$. Но так как $VHP = V - P$, мы получаем $E + VHP = E + V - P$.

Замечание. Соотношения $x_1 - PHx_1 = y$, $x_2 - HPx_2 = y$, $x_3 - PHPx_3 = y$ имеют, следовательно, при соответствующих условиях тот смысл, что

$$x_1 = y + z_1, \quad \text{где } z_1 \in \tilde{X},\ (E - PH)\,z_1 = PHy,$$
$$x_2 = y + Hz_2, \quad \text{где } z_2 \in \tilde{X},\ (E - PH)\,z_2 = Py,$$
$$x_3 = y - Py + z_2.$$

Обратимся теперь к особенно важному случаю, когда подпространство $\mathbf{R}(P)$ конечномерно.

(1,3) Теорема. *Пусть* $H \in \mathbf{E}(X)$, $P \in \mathbf{E}(X)$. *Пусть* $\mathbf{R}(P)$ *конечномерно. Пусть* $e_1, \ldots, e_n$ *— базис пространства* $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$. *Существуют* $f_1, \ldots$ $\ldots, f_n \in X'$ *так, что* $Px = \sum_1^n \langle x, f_i\rangle e_i$ *для любого* $x \in X$. *Пусть* $x = \sum_1^n \xi_i e_i$, $y = \sum_1^n \eta_i e_i$. *Тогда будет* $x - PHx = y$ *тогда и только тогда, если*

$$\xi_i - \sum_{k=1}^n h_{ik}\xi_k = \eta_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1}$$

где $h_{ik} = \langle He_k, f_i\rangle$. *Условия теоремы* (1,1) *выполняются тогда и только тогда, если матрица чисел* $\delta_{ik} - h_{ik}$ *регулярна. Соотношение* $P^2 = P$ *справедливо тогда и только тогда, если* $\langle e_i, f_j\rangle = \delta_{ij}$ *для* $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Имеем $Hx = \sum_{k=1}^n \xi_k He_k$, $PHx = \sum_{k=1}^n \xi_k PHe_k = \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{i=1}^n \langle He_k, f_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^n h_{ik}\xi_k)\, e_i$. Итак, $x - PHx = y$, тогда и только тогда, если справедливо (1). Если выполняются условия теоремы (1,1), то оператор $E - PH$ обладает на пространстве $\tilde{X}$ обратным оператором и, следовательно, система (1) имеет всегда решение; значит матрица $(\delta_{ik} - h_{ik})$ регулярна. Наоборот, если эта матрица регулярна, то, очевидно, выполняются условия теоремы (1,1). (Пространство $\tilde{X}$ замкнуто, поскольку оно конечномерно.) Эквивалентность соотношений $P^2 = P$ и $\langle e_i, f_k\rangle = \delta_{ik}$ очевидна.

(1,4) Теорема. *(Сохраняются обозначения предыдущей теоремы.) Пусть матрица* $(\delta_{ik} - h_{ik})$ *регулярна. Тогда существуют операторы, обратные к операторам* $E - PH$, $E - HP$. *Если* $x - PHx = y$ *(соотв.* $x - HPx = y$*), то* $x = y + z$ *(соотв.* $x = y + H\tilde{z}$*), причем* $z = \sum_i \zeta_i e_i$, $\tilde{z} = \sum_i \tilde{\zeta}_i e_i$, *где*

$$\zeta_i - \sum_k h_{ik}\zeta_k = \langle Hy, f_i\rangle\,, \quad \tilde{\zeta}_i - \sum_k h_{ik}\tilde{\zeta}_k = \langle y, f_i\rangle \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Если кроме того $P^2 = P$, *то существует также оператор, обратный к оператору* $E - PHP$, *и решением уравнения* $x - PHPx = y$ *будет элемент* $x = y - Py + \tilde{z}$.

Доказательство: Следует непосредственно из теоремы (1,2), замечания к последней и из теоремы (1,3).

Замечание. Теорема (1,4) не только позволяет доказать существование оператора, обратного к $E - H_0$, где H_0 — какой-либо из операторов PH, HP, PHP, но дает и конкретное предписание, при помощи которого можно уравнение $x - H_0x = y$ действительно решить.

2. Аппроксимация оператора

Поставим себе следующую задачу: Пусть оператор H_0 является аппроксимацией оператора H; пусть существует $(E - H_0)^{-1}$. Решается вопрос о существовании оператора $(E - H)^{-1}$, далее мы ищем приближенное решение уравнения $x - Hx = y$, а также оценку погрешности.

(2,1) *Пусть* $A \in \mathbf{E}(X)$, $|A| < 1$. *Тогда существует* $(E - A)^{-1}$.

Доказательство. Из полноты пространства $\mathbf{E}(X)$ легко вытекает сходимость ряда $E + A + A^2 + \ldots$. Для его суммы V, очевидно, справедливо равенство

$$(E - A)\, V = V(E - A) = E\,.$$

(2,2) *Пусть* A, $B \in \mathbf{E}(X)$, $AB = C$; *пусть существует* C^{-1}. *Тогда оператор* A *обладает правым обратным, а оператор* B *обладает левым обратным оператором. Если, более того, существует* A^{-1} (*соотв.* B^{-1}), *то существует и* B^{-1} (*соотв.* A^{-1}).

Доказательство. Из соотношений $ABC^{-1} = C^{-1}AB = E$ следует, что A (соотв. B) имеет правый (соотв. левый) обратный оператор. Если существует, напр., A^{-1}, то $BC^{-1}A = A^{-1}ABC^{-1}A = A^{-1}CC^{-1}A = E$, так что B также имеет правый обратный оператор.

Обозначения. Пусть H, $H_0 \in \mathbf{E}(X)$; пусть существует $V_0 = (E - H_0)^{-1}$. Для любого целого $m \geqq 0$ положим

$$G_m = \sum_{i=0}^{m-1} H^i \quad (\text{таким образом } G_0 = 0)\,,$$

$$V_m = G_m + V_0 H^m\,,$$

$$W_m = G_m + H^m V_0 \quad (\text{таким образом } W_0 = V_0)\,,$$

$$\begin{aligned} M_{m,1} &= V_0(H - H_0)\, H^m\,, & M_{m,2} &= H^m V_0 (H - H_0)\,,\\ M_{m,3} &= (H - H_0)\, V_0 H^m\,, & M_{m,4} &= H^m (H - H_0)\, V_0\,,\\ M_{m,5} &= (H_0 - H)\, G_m\,, & M_{m,6} &= G_m (H_0 - H)\,. \end{aligned}$$

(2,3) *Пусть* m — *целое неотрицательное число. Тогда*

$$\begin{aligned} M_{m,1} &= E - V_m(E - H)\,, & M_{m,2} &= E - W_m(E - H)\,,\\ M_{m,3} &= E - (E - H)\, V_m\,, & M_{m,4} &= E - (E - H)\, W_m\,,\\ M_{m,5} &= E - (E - H_0)\, V_m\,, & M_{m,6} &= E - W_m(E - H_0)\,. \end{aligned}$$

Доказательство. Из очевидных соотношений $G_m(E - H) = E - H^m$, $V_0(E - H_0) = E$ следует $E - V_m(E - H) = E - (E - H^m) -$
$- V_0(H^m - H^{m+1}) = (E - V_0(E - H))\, H^m = V_0((E - H_0) - (E - H))\, H^m =$
$= V_0(H - H_0)\, H^m = M_{m,1}$;
аналогично доказываются равенства для $M_{m,2}$, $M_{m,3}$, $M_{m,4}$. Далее имеем

$$E - (E - H_0)\, V_m = E - (E - H_0)\, G_m - H^m = (E - H)\, G_m - (E - H_0)\, G_m = $$
$$= (H_0 - H)\, G_m = M_{m,5}\,;$$

аналогично докажем соотношение для $M_{m,6}$.

(2,4) Теорема. *Пусть m — целое неотрицательное число. Если $|M_{m,1}| < 1$ или $|M_{m,2}| < 1$ (соотв. $|M_{m,3}| < 1$ или $|M_{m,4}| < 1$), то оператор $E - H$ обладает левым (соотв. правым) обратным оператором. Для существования оператора, обратного к $E - H$, достаточно, чтобы соотношение $|M_{m,i}| < 1$ выполнялось для обеих значений i какой-либо из следующих пар: (1,5), (3,5), (2,6), (4,6).*

Доказательство. Пусть, напр., $|M_{m,1}| < 1$. Из (2,1) и (2,3) следует, что оператор $V_m(E - H)$ обладает обратным оператором. Согласно (2,2) оператор $E - H$ обладает левым обратным оператором. Если, кроме того, $|M_{m,5}| < 1$, то существует оператор, обратный к $(E - H_0)\, V_m$, и согласно (2,2) существуют также операторы, обратные к операторам V_m и $E - H$. Остальные случаи исследуются аналогично.

Замечание. Если норма $|H - H_0|$ достаточно мала, то оператор V_m приблизительно равен $(E - H)^{-1}$, так что элемент $V_m y$ является приближенным решением уравнения $x - Hx = y$. Более подробные сведения об этом дает теорема (2,5). Обратим еще внимание на то, что элемент $\tilde{x} = V_0 y$ является решением уравнения $\tilde{x} - H_0\tilde{x} = y$.

(2,5) Теорема. *Пусть m — целое неотрицательное число; пусть элементы $x, y \in X$ удовлетворяют соотношению $x - Hx = y$. Положим $v = V_m y$. Тогда имеет место*

$$x - v = M_{m,1}x\,. \tag{3}$$

Если в частности $\alpha = |M_{m,1}| < 1$, то

$$|x - v| \leqq (1 - \alpha)^{-1}\, |M_{m,1}v|\,. \tag{4}$$

Доказательство. Согласно (2,3) $M_{m,1}x = x - V_m(E - H)\,x = x - v$ и, следовательно,

$$|x - v| \leqq |M_{m,1}|\, |x - v| + |M_{m,1}v|\,.$$

(2,6) Теорема. *Пусть $H, P \in \mathbf{E}(X)$, $P^2 = P$; положим $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$. Пусть m — целое неотрицательное число. Предположим, что $E - PH$ обладает на $\tilde{X}$ обратным оператором W и положим $WP = V$,*

$$M = (E + VH)(E - P)\, H^{m+1}\,, \quad N = G_m + (E + VH)\, H^m\,,$$
$$N^* = G_m + (E - P + V)\, H^m\,.$$

Пусть $x, y \in X$, $x - Hx = y$; пусть $v = Ny$, $v^* = N^*y$. Если $|M| = \alpha < 1$, то

$$|x - v| \leqq (1 - \alpha)^{-1}\, |Mv|\,, \tag{5}$$

$$|x - v^*| \leqq (1 - \alpha)^{-1}(|Mv^*| + |VH(E - P)\, H^m y|)\,. \tag{6}$$

Доказательство. Положим $H_0 = PH$, $H_0^* = PHP$. По теореме (1,2) имеем $(E - H_0)^{-1} = E + VH$, $(E - H_0^*)^{-1} = E - P + V = E + VHP$. Соотношение (5) тождественно соотношению (4); согласно (3) имеем $x - v = Mx$. Далее, $v - v^* = ((E + VH)\, H^m - (E + VHP)\, H^m)\, y =$

$= VH(E - P)\, H^m y$ и, следовательно, $x - v^* = x - v + v - v^* = Mx + VH(E - P)\, H^m y = M(x - v^*) + Mv^* + VH(E - P)\, H^m y$. Отсюда легко вытекает (6).

Замечание. Если положить $M^* = (E - P + V)(H - PHP)\, H^m$, то согласно (4) мы, конечно, получим непосредственно

$$|x - v^*| \leqq (1 - \alpha^*)^{-1}\, |M^* v^*| \tag{7}$$

(если только $\alpha^* = |M^*| < 1$). Оценку (6) мы вывели потому, что может оказаться более легким произвести оценку нормы $|M|$, чем нормы $|M^*|$. На первый взгляд оценка (5) представляется более выгондой, чем оценка (6); не следует, однако, забывать, что элемент v должен быть приближенным решением уравнения $x - Hx = y$ (y дано, x нужно найти) и что для вычисления элемента v дам необходим элемент $H^{m+1}y$, без которого мы обходимся при вычислении элемента v^*. Если, напр., $m = 0$, то получаем $v^* = y_1 + y_2$, где $y_1 = y - Py$, $y_2 = Vy$ (следовательно $y_2 - PHy_2 = Py$),

$$|x - v^*| \leqq (1 - \alpha)^{-1}(|Mv^*| + |VHy_1|)\,. \tag{8}$$

3. Расстояние оператора от подпространства

Пусть дано подпространство $\tilde{X}$ пространства X и оператор $H \in \mathbf{E}(X)$. Тогда расстоянием оператора H от подпространства $\tilde{X}$ мы назовем число

$$\varrho(H, \tilde{X}) = \sup_{|x| \leqq 1}\ \inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}} |Hx - \tilde{x}|\,.$$

Очевидно, всегда имеет место $\varrho(H, \tilde{X}) \leqq |H|$. Значение этого понятия для наших оценок будет описано в следующих леммах.

(3,1) *Пусть* A, B, $P \in \mathbf{E}(X)$, *пусть* $P^2 = P$. *Положим* $\tilde{X} = \mathbf{R}(P)$. *Тогда*

$$\varrho(A, \tilde{X}) \leqq |(E - P)\, A|\,, \tag{1}$$

$$|B(E - P)\, A| \leqq |B(E - P)|\, \varrho(A, \tilde{X})\,. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $x \in X$. Так как $PAx \in \tilde{X}$, то

$$\inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}} |Ax - \tilde{x}| \leqq |(E - P)\, Ax|\,. \tag{3}$$

Так как для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ имеет место $B(E - P)\, Ax = B(E - P)(Ax - \tilde{x})$, получаем

$$|B(E - P)\, Ax| \leqq |B(E - P)| \inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}} |Ax - \tilde{x}|\,. \tag{4}$$

Если теперь образовать верхнюю грань для всех $x \in X$, $|x| \leqq 1$ в обеих частях неравенства (3) (соотв. (4)), то получим оценку (1) (соотв. (2)).