

Werk

Label: Other

Jahr: 1958

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0083|log144

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

REFERÁTY

PROBLÉM STABILITY ŘEŠENÍ ELIPTICKÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC
(VZHLED K MALÝM ZMĚNÁM DEFINIČNÍ OBLASTI)

(Referát o přednášce I. BABUŠKY v matematické obci pražské
dne 4. listopadu 1957)

Přednášející se nejprve stručně zabýval významem pěti základních problémů v souvislosti s diferenciálními rovnicemi matematické fyziky. Jsou to: a) existence řešení, b) unicita řešení, c) spojitá závislost řešení na okrajových podmínkách, d) spojitá závislost řešení na změně koeficientů rovnice, e) spojitá závislost řešení na změně definiční oblasti.

V přednášce bylo zdůrazněno, že poslední problém je právě tak důležitý jako problémy ostatní, při čemž však tyto otázky nejsou skoro vůbec studovány. S výjimkou práce M. V. KELDYŠE není přednášejícímu známo jiné podrobnější studium tohoto problému.

Definice 1. Omezená oblast $\Omega \subset E_n$ byla nazvána *normální oblastí*, jestliže existuje posloupnost oblastí $\Omega_j, j = 1, 2, \dots$, taková, že $\Omega_{j+1} \subset \Omega_j, \bar{\Omega} \subset \Omega_j, \Omega = \bigcap \Omega_j$.

Pro normální oblast Ω existuje vždy posloupnost oblastí $\Omega_j^{(i)}, i = 1, 2; j = 1, 2, \dots$ takových, že $\bar{\Omega}_{j+1}^{(2)} \subset \Omega_j^{(2)}, \bar{\Omega} \subset \Omega_j^{(2)}, \bar{\Omega}_j^{(1)} \subset \Omega_{j+1}^{(1)}, \bar{\Omega}_j^{(1)} \subset \Omega, \Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j^{(1)} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j^{(2)}$, při čemž oblasti $\Omega_j^{(i)}, i = 1, 2; j = 1, 2, \dots$, jsou sjednocením konečného počtu koulí; tyto oblasti jsou tedy regulární oblasti vůči řešení Dirichletova problému pro Laplaceovu rovnici.¹⁾

Dále byla vyslovena definice stabilní oblasti pro Laplaceův operátor podle Keldyše.

Definice 2. Normální oblast $\Omega \subset E_n$ nazýváme *stabilní*, jestliže pro každou spojitou funkci f definovanou v E_n platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{(1)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{(2)}(x), \quad x \in \Omega,$$

kde $u_n^{(i)}(x), i = 1, 2; n = 1, 2, \dots$, je řešení Dirichletova problému pro Laplaceovu rovnici na oblasti $\Omega_n^{(i)}$, když na hranici $\Omega_n^{(i)}$ nabývá funkce $u_n^{(i)}(x)$ téžže hodnot jako funkce f .

Lze ukázat, že existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{(i)}(x) = u^{(i)}(x), i = 1, 2$, při čemž $u^{(i)}(x)$ je harmonická funkce; funkce $u^{(i)}(x)$ nezávisí na volbě systému oblastí $\Omega_n^{(i)}$ a na průběhu funkce mimo hranici oblasti Ω .

V přednášce byla zavedena nová definice stability, spočívající na funkcionálně analytickém základě a vycházející z problematiky variačních principů. Bylo ukázáno, že tato nová definice je ekvivalentní s definicí Keldyšovou.

Tato nová definice pak dovoluje zavést pojem stability pro obecný, lineární, samo-adjungovaný, pozitivně definitní operátor.

¹⁾ Oblast Ω nazývá se *regulární oblastí*, jestliže pro každou spojitou funkci definovanou na hranici existuje řešení Dirichletova problému spojitě na $\bar{\Omega}$ a nabývající na hranici Ω předepsaných hodnot.

Pak byly vysloveny některé postačující podmínky pro stabilitu oblasti. Uvedeme zde jen tu nejjednodušší:

Věta 1. Každá hvězdicová oblast je stabilní oblastí pro každý lineární, samoadjungovaný, pozitivně definitní operátor.

V další části přednášky byly naznačeny některé vlastnosti stabilních resp. nestabilních oblastí. Např. platí tyto věty:

Věta 2. Oblast Ω je stabilní vůči obecnému eliptickému operátoru tehdy a jen tehdy, je-li stabilní vůči polyharmonickému operátoru stejného řádu.²⁾

Věta 3. K polyharmonickému operátoru stupně p existuje v E_n vždy nestabilní oblast, je-li n dostatečně veliké.

V závěru přednášky byla pak ještě vyslovena některá tvrzení o stabilitě jedné oblasti vůči operátorům různého řádu a byly naznačeny některé nejdůležitější otevřené a neřešené problémy.

Ivo Babuška, Praha

JEDNOZNAČNOST NĚKTERÝCH OKRAJOVÝCH ÚLOH PRO ROVNICE PARABOLICKÉHO TYPU

(Přednáška R. VÝBORNÉHO se konala v matematické obci pražské dne
2. prosince 1957)

Přednášející po krátkém historickém úvodu referoval o svých výsledcích, které jsou otištěny v DAH CCCP 117 (1957), 4, 563—565.

Rudolf Výborný, Praha

O INTEGRÁLNÍ STABILITĚ

(Referát o přednášce Ivo VRKOČE konané ve schůzi matematické obce pražské dne
6. ledna 1958.)

Aby vynikl význam nově zavedených pojmů stability, je třeba uvést některé již dobře známé definice stability v chronologickém pořadí a jejich základní vztahy.

Nejdříve uvedu Ljapunovovu definici stability (v literatuře se často užívá názvu stejnoměrná stabilita). Budeme přitom uvažovat systém n diferenciálních rovnic, který zapíšeme vektorově

$$x = [x_1, \dots, x_n], \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad X(t, 0) = 0. \quad (1)$$

Z počátku budeme předpokládat, že pravé strany $X_i(t, x)$ jsou spojité v oblasti

$$t \geq 0, \quad \|x\| \leq a, \quad a > 0. \quad (2)$$

²⁾ Pojem obecného eliptického operátoru nebudeme zde přesně definovat.

Definice 1. Řešení $x \equiv 0$ rovnice (1) je stabilní, jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ (nezávislé na t_0) tak, že platí $\|x(t)\| < \varepsilon$ pro $t \geq t_0$ pro všechna řešení $x(t)$ rovnice (1), které splňují vztah $\|x(t_0)\| < \delta$.

Jestliže vyšetřujeme stabilitu nějakého řešení $x = f(t)$, je vidět, že jej můžeme jednoduchou transformací proměnných převést na $x \equiv 0$.

Definice 2. Řešení $x \equiv 0$ rovnice (1) je asymptoticky stabilní, jestliže: 1. je stabilní, 2. platí $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ pro všechna řešení $x(t)$ rovnice (1), které splňují nerovnost $\|x(t_0)\| < b \leq a$.

V teorii stability jsou pro určení stability a asymptotické stability velmi obecná kritéria, tzv. Ljapunovovy věty. Pro nás má význam pouze:

2. Ljapunovova věta. Jestliže pro systém (1) lze nalézt funkci $V(t, x)$, která je definována v oblasti $t \geq 0$, $\|x\| \leq b \leq a$, kde má spojitě parciální derivace a splňuje následující podmínky:

1. $V(t, x)$ je pozitivně definitní,
2. $V(t, x)$ je stejnoměrně malá, tj. existuje spojitá funkce $U(x)$ taková, že $U(0) = 0$ a $V(t, x) \leq U(x)$,
3. $\frac{dV}{dt}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(t, x)$ je negativně definitní,

pak $x \equiv 0$ je asymptoticky stabilní.

Vznikla otázka, existuje-li funkce $V(t, x)$ požadovaných vlastností, je-li $x \equiv 0$ asymptoticky stabilní, tj. zda existence funkce $V(t, x)$ s požadovanými vlastnostmi je nutnou a postačující podmínkou pro asymptotickou stabilitu řešení $x \equiv 0$. Ukázalo se, že v 2. Ljapunovově větě můžeme o $x \equiv 0$ tvrdit více, a to že $x \equiv 0$ je silně stabilní.

Definice 3. Řešení $x \equiv 0$ nazveme silně stabilní jestliže:

1. je stabilní,
2. k libovolné dvojici čísel $\delta > 0$, $\eta > 0$ můžeme najít číslo $T(\delta, \eta) > 0$ (nezávislé na t_0) tak, že platí $\|x(t)\| < \eta$ pro $t \geq t_0 + T(\delta, \eta)$, jestliže řešení $x(t)$ splňuje vztah $\|x(t_0)\| < \delta$.

Nyní již platí, že existence funkce $V(t, x)$, která splňuje podmínky 2. Ljapunovovy věty, je nutná a postačující podmínka, aby řešení $x \equiv 0$ bylo silně stabilní. J. KURZWEIL dokonce sestavil tuto funkci tak, že má spojitě parciální derivace všech řádů.

Nevýhodou těchto pojmů stability je, že připouštíme jen takové poruchy, které vzniknou nesprávným nastavením počáteční polohy. Na každou mechanickou nebo elektrickou soustavu však působí vnější prostředí neustále rušivými silami. Proto soustava je vyjádřena diferenciální rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + R(t, x), \quad (3)$$

kde o členech $R(t, x)$ víme pouze, že jsou malé. Aby se odstranil tento nedostatek, byl v literatuře zaveden pojem poruchové stability.

Definice 4. Řešení $x \equiv 0$ rovnice (1) je poruchově stabilní, jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existují čísla $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ taková, že pro řešení $x(t)$ rovnice (3) platí $\|x(t)\| < \varepsilon$ pro $t \geq t_0$, jestliže $\|x(t_0)\| < \eta_1$ a jestliže $\|R(t, x)\| < \eta_2$ pro $t \geq t_0$, $\|x\| \leq \varepsilon$.

Všimněme si, že velikost poruch $R(t, x)$ přitom měříme výrazem

$$\sup_{t \geq t_0} \left(\sup_{\|x\| \leq \varepsilon} \|R(t, x)\| \right).$$

Toto pojetí má dvě nevýhody:

1. $\|R(t, x)\|$ musí být stále malé — nepřipouští se možnost lehkého nárazu, při kterém $\|R(t, x)\|$ může být velké na malém intervalu.

2. Je známa postačující podmínka pro to, aby řešení $x \equiv 0$ bylo poruchově stabilní, ale není známa nutná a postačující podmínka.

Oba tyto nedostatky odstraníme, jestliže velikost poruch $R(t, x)$ budeme měřit pomocí výrazu $\int_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leq \varepsilon} \|R(t, x)\| dt$; tím obdržíme nově zavedené pojmy integrální a asymptotické integrální stability.

Definice 5. Řešení $x \equiv 0$ rovnice (1) nazveme *integrálně stabilní*, jestliže k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ můžeme najít číslo $\delta > 0$ (nezávislé na t_0) tak, že pro řešení $x(t)$ rovnice (3) platí $\|x(t)\| < \varepsilon$ pro $t \geq t_0$, jestliže

$$\|x(t_0)\| < \delta, \quad \int_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leq \varepsilon} \|R(t, x)\| dt < \delta.$$

Definice 6. Řešení $x \equiv 0$ rovnice (1) nazveme *asymptoticky integrálně stabilní*, jestliže

1. je integrálně stabilní,
2. k libovolné dvojici čísel $\delta > 0, \eta > 0$ lze nalézt dvojici čísel $T(\delta, \eta) > 0, \gamma(\delta, \eta) > 0$, (které nezávisí na t_0) tak, že pro řešení $x(t)$ rovnice (3) platí $\|x(t)\| < \eta$ pro $t \geq t_0 + T(\delta, \eta)$, jestliže $\|x(t_0)\| < \delta, \int_{t_0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leq \varepsilon} \|R(t, x)\| dt < \gamma(\delta, \eta)$.

Integrální stabilitu můžeme charakterisovat následující větou:

Věta 1. Jestliže pro rovnici (1) můžeme nalézt spojitou funkci $V(t, x)$ definovanou v oblasti $t \geq 0, \|x\| \leq b$ ($0 < b < a$), která splňuje podmínky:

1. $V(t, x)$ je pozitivně definitní,
2. $|V(t, x) - V(t, y)| \leq K \|x - y\|$ (K nezávisí na t),
3. $D^+V(t, x(t)) \leq 0$,

pak $x \equiv 0$ je integrálně stabilní. Naopak jestliže řešení $x \equiv 0$ je integrálně stabilní, potom existuje funkce $V(t, x)$, která má spojitě parciální derivace všech řádů a splňuje podmínky 1, 2, 3.

Podmínku 3 nyní můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{dV}{dt}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i \leq 0.$$

Pro asymptotickou integrální stabilitu platí obdobná věta.

Věta 2. Jestliže pro rovnici (1) můžeme nalézt spojitou funkci $V(t, x)$ definovanou v oblasti $t \geq 0, \|x\| \leq b \leq a$, která splňuje podmínku 1 a 2 z věty 1 a podmínku

3'. $D^+V(t, x(t)) \leq -U(x(t))$ kde $U(x)$ je spojitá funkce, $U(x) > 0$ pro $x \neq 0$, pak $x \equiv 0$ je asymptoticky integrálně stabilní.

Naopak, jestliže $x \equiv 0$ je asymptoticky integrálně stabilní, potom existuje funkce $V(t, x)$, která má spojitě parciální derivace všech řádů a splňuje podmínky 1, 2, a 3'.

Podmínku 3' můžeme nyní vyjádřit tak, že

$$\frac{dV}{dt}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i$$

je negativně definitní.

Jestliže o pravých stranách $X_i(t, x)$ systému diferenciálních rovnic (1) (který je vyjádřen vektorově) nebudeme předpokládat, že to jsou spojité funkce, ale pouze, že $X_i(t, x)$ splňují Carathéodoryho podmínky, nelze sestavit funkci $V(t, x)$, která by splňovala podmínky 1, 2, a 3 z věty 1 a přitom měla spojité parciální derivace všech řádů v případě, že $x \equiv 0$ je integrálně stabilní. V tomto případě platí věty:

Věta 3. Řešení $x \equiv 0$ rovnice (1), která nyní splňuje Carathéodoryho podmínky, je integrálně stabilní tehdy a jen tehdy, existuje-li spojitá funkce $V(t, x)$ definovaná v oblasti $t \geq 0$, $\|x\| \leq b \leq a$, kde splňuje podmínky 1, 2, 3 z věty 1.

Věta 4. Řešení $x \equiv 0$ rovnice (1), která nyní splňuje Carathéodoryho podmínky, je asymptoticky integrálně stabilní tehdy a jen tehdy, jestliže existuje spojitá funkce $V(t, x)$ definovaná v oblasti $t \geq 0$, $\|x\| \leq b \leq a$, kde splňuje podmínky 1, 2, 3' z věty 2.

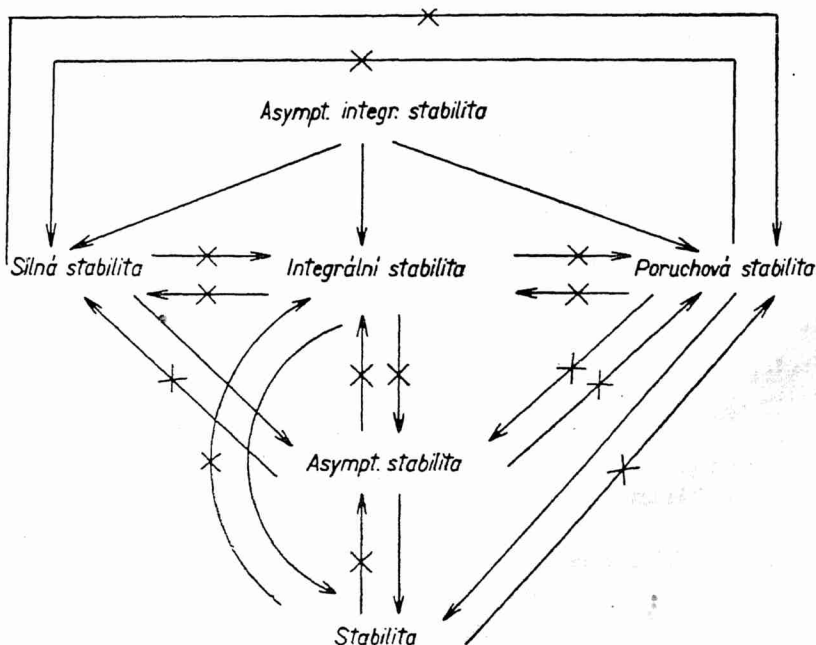
Velmi důležité je vyšetřování stability v autonomním případě. Při něm pravé strany diferenciálních rovnic nezávisí explicitně na čase t :

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \quad X(0) = 0. \quad (4)$$

V tomto případě se snažíme charakterisovat stabilitu řešení $x \equiv 0$ funkcemi $V(x)$, které také nezávisí na t . Tento problém nelze redukovat na předchozí, kdy funkce X_i závisely na t , ale také V mohlo záviset na t .

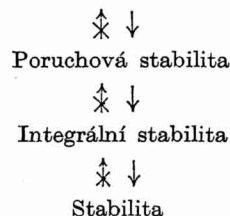
Pro integrální a asymptotickou integrální stabilitu platí zde věty úplně obdobné větám 3 a 4, jedině s výjimkou, že funkce V nezávisí na t .

Závěrem jsem provedl srovnání mezi jednotlivými druhy stability zde uvedenými: (Šipka znamená implikaci, škrtnutá šipka znamená, že implikace ve směru šipky neplatí)



V autonomním případě se vztahy mezi jednotlivými druhy stability změnil. Je:

Asymptotická st. $\Leftrightarrow$ Silná st. $\Leftrightarrow$ Asympt. integrální stabilita



Ivo Vrkoč, Praha

O DIRACOVĚ FUNKCI V NELINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH

(Referát o přednášce dr. JAROSLAVA KURZWEILA konané ve schůzi matematické obce pražské dne 13. ledna 1958.)

Nášim cílem je popsat průběh řešení diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x) \cdot \varphi_k(t), \quad (1)$$

jestliže posloupnost $\varphi_k(t)$ se blíží k Diracově funkci. Předpokládáme, že x je vektor z n -dimensionálního Euklidova prostoru E_n , že funkce $f(x, t)$ a $g(x)$ jsou spojité pro $x \in \bar{D}$, $t \in \langle -T_1, T_1 \rangle$, kde $\bar{D}$ je uzávěr omezené otevřené množiny $D \subset E_n$, a nabývají hodnot z E_n ; nechť reálné funkce $\varphi_k(t)$ jsou spojité pro $t \in \langle -T_1, T_1 \rangle$.

Říkáme, že posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci, jestliže

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{-T_1}^{T_1} |\varphi_k(t)| dt = L < \infty,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\xi}^{\xi} |\varphi_k(t)| dt = 0$$

pro každé $\xi > 0$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-T_1}^{\xi} \varphi_k(\tau) d\tau = 0$ resp. 1 pro $-T_1 \leq t < 0$ resp. $0 < t \leq T_1$. Posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci pozitivně, konverguje-li k Diracově funkci a je-li $\varphi_k(t) \geq 0$ pro $t \in \langle -T_0, T_0 \rangle$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Věta 1. Nechť posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci a nechť funkce $g(x)$ splňuje podmínku

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \chi_1(\|x_1 - x_2\|), \quad x_1, x_2 \in D,$$

kde $\chi(\eta)$ je spojitá rostoucí pro $\eta \geq 0$, $\chi(0) = 0$, $\int_0^1 \frac{d\eta}{\chi(\eta)} = \infty$. Nechť $y_k \rightarrow y \in D$, $0 < T_0 <$

$< T_1$. Předpokládejme, že řešení $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$, rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (2)$$

je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $u(-T_0) = y$, že řešení $v(t)$ rovnice

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \quad (3)$$

$v\left(-\frac{1}{2}\right) = u(0)$, je definováno na intervalu $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ (toto řešení je jednoznačně určeno podle Osgoodovy věty) a že řešení $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0 \rangle$, rovnice (2) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $w(0) = v(\frac{1}{2})$.

Potom pro dosti velká k existuje řešení $x_k(t)$, $t \in \langle -T_0, T_0 \rangle$, rovnice (1), $x_k(-T_0) = y_k$ a platí $x_k(t) \rightarrow u(t)$ resp. $w(t)$ pro $k \rightarrow \infty$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$ resp. $(0, T_0)$. Posloupnost $x_k(t)$ konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, který neobsahuje bod 0.

Věta 2. Necht posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci pozitivně. Necht $y_k \rightarrow y \in D$, $0 < T_0 < T_1$. Předpokládejme, že řešení $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$, rovnice (2) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $u(-T_0) = y$, že řešení $v(t)$, $t \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, rovnice (3) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $v(-\frac{1}{2}) = u(0)$ a že řešení $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0 \rangle$, rovnice (2) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $w(0) = u(\frac{1}{2})$.

Potom pro dosti velká k existuje řešení $x_k(t)$, $t \in \langle -T_0, T_0 \rangle$, rovnice (1), $x_k(-T_0) = y_k$ a platí: $x_k(t) \rightarrow u(t)$ resp. $w(t)$ pro $k \rightarrow \infty$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$ resp. $t \in (0, T_0)$. Posloupnost $x_k(t)$ konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, který neobsahuje bod 0.

Jaroslav Kurzweil, Praha

SYSTÉMY GENERÁTORŮ ABELOVÝCH GRUP

(Referát o přednášce VLASTIMILA DLABA přednesené v Matematické obci pražské dne 17. února 1958.)

V úvodu připomněl přednášející některé definice a základní výsledky teorie grup;¹⁾ používal při tom terminologie, kterou navrhuje akademik V. KOŘÍNEK: Grupu, jejíž každý nenulový prvek má konečný (resp. nekonečný) řád, nazveme *periodickou* (resp. *aperiodickou*). Podgrupu všech prvků konečného řádu dané grupy nazveme *periodickou částí* této grupy. Řekneme, že grupa G je *divisibilní*, jestliže každá rovnice $n \cdot x = g$, kde n je celé nenulové číslo, $g \in G$, má v G aspoň jedno řešení; G je tedy divisibilní právě tehdy, když pro každé nenulové celé n platí $nG = G$.

Budiž $\mathfrak{M}$ neprázdná množina prvků grupy G ; symbolem $\{\mathfrak{M}\}$ označme nejmenší podgrupu grupy G , obsahující všechny prvky množiny $\mathfrak{M}$. Řekneme, že $\mathfrak{G}$ je *systém generátorů* grupy G jestliže $\{\mathfrak{G}\} = G$, tj. jestliže každý prvek grupy G je možno vyjádřit jako lineární kombinaci prvků z $\mathfrak{G}$.

Vlastním obsahem přednášky bylo pak vyšetřování systémů generátorů. Přednášející ukázal nejprve na příkladech těžkosti, s nimiž se při tomto vyšetřování setkáváme. Tyto těžkosti jsou typické pro grupy, jež nemají konečný systém generátorů. Zdůrazňují to i výsledky H. PRÜFERA, *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Zeit., 17 (1923), 35—61, kterých dosahuje pomocí pojmu „hodnosti“ grupy, založeném na pojmu systému generátorů.

Literatura, týkající se studia systémů generátorů Abelových grup, je velmi chudá; jsou to jen dvě práce polských matematiků: J. ŁOŚ, E. SĄSIADA and Z. SZLIMSKI,

¹⁾ Grupou rozumí se vždy aditivně psaná Abelova grupa.

On groups with hereditarily generating systems, Publ. Math. Debrecen, 4 (1956), 351–356 a J. Loš, *On the torsion-free abelian groups with hereditarily generating sequences*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III., 4 (1956), 169–171. Autoři zde studují grupy, jež mají tzv. dědičné posloupnosti generátorů. Přednášející podrobně rozebral a kriticky zhodnotil výsledky obou prací (které jsou pouze částečné a dosti složité). Hlavním nedostatkem je to, že autoři nechápou systém generátorů jako množinu (tentýž prvek se může i nekonečněkrát opakovat).

Přednášející pak přistoupil k vlastním výsledkům; zavedl nejprve následující definice:

Definice 1. Soustavu generátorů $\mathfrak{G}$ grupy G nazveme *ireducibilní*, jestliže pro každý prvek $g \in G$ platí $\{\mathfrak{G} \setminus (g)\} \neq G$;²⁾ v opačném případě mluvíme o *reducibilní* soustavě generátorů. Soustavu generátorů $\mathfrak{G}$ nazveme *silně reducibilní*, jestliže pro každý prvek $g \in \mathfrak{G}$ je $\{\mathfrak{G} \setminus (g)\} = G$. Jestliže $\mathfrak{G}$ je reducibilní systém generátorů grupy G s vlastností, že každá jeho podmnožina, která je systémem generátorů grupy G , je též reducibilní, řekneme, že $\mathfrak{G}$ je *dědičně reducibilní*. Ve stejném smyslu mluvíme o *dědičně silně reducibilním* systému generátorů.

Definice 2. Řekneme, že grupa G je *dostižitelná*, jestliže existuje vlastní podgrupa $H \subset G$ a prvek $g \in G$ tak, že $\{H, g\} = G$.

Potom platí:

Věta 1. *Budiž G divisibilní. Potom G není dostižitelná.*

Věta 2. *Nechť $G \neq 0$ není dostižitelná. Potom každý systém generátorů grupy G je silně reducibilní.*

Věta 3. *Nechť každý systém generátorů grupy G je silně reducibilní. Potom G je divisibilní.*

Odtud tedy mimo jiné dostáváme další dvě charakterisace divisibilních grup:

1. $G \neq 0$ je divisibilní $\Leftrightarrow$ ³⁾ každý systém generátorů grupy G je silně reducibilní $\Leftrightarrow$ každý systém generátorů grupy G je dědičně silně reducibilní.

2. G je divisibilní $\Leftrightarrow G$ není dostižitelná.

Na příkladě grupy $G_1 = G(p^\infty) + G(p)$ bylo ukázáno,⁴⁾ že k tomu, aby G byla divisibilní, nestačí, aby každý systém generátorů byl dědičně reducibilní. Podle definice 1 je logicky možných šest typů systémů generátorů:

- (I) reducibilní systém generátorů, který není silně reducibilní ani dědičně reducibilní;
- (II) silně reducibilní systém generátorů, který není dědičně reducibilní (a tedy ani dědičně silně reducibilní);
- (III) dědičně reducibilní systém generátorů, který není silně reducibilní;
- (IV) dědičně reducibilní systém generátorů, který je zároveň silně reducibilní a není dědičně silně reducibilní;
- (V) dědičně silně reducibilní systém generátorů;
- (VI) ireducibilní systém generátorů.

Příklad grupy $G_2 = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$ ukazuje, že grupa může mít všechny zavedené typy generátorů.

²⁾ Symbol $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$ značí rozdíl množin $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$.

³⁾ $\Leftrightarrow$ značí logickou ekvivalenci.

⁴⁾ $G(p^\infty)$ značí Prüferovu grupu typu p^∞ , $G(p)$ cyklickou grupu řádu p (p je prvočíslo).

Přednášející postavil pak obrácenou otázku:

Budiž dána grupa G ; jaké kombinace zavedených typů systémů generátorů mohou v grupě G nastat?

Odpověď na tuto otázku usnadňují následující věty, jejichž důkazy jsou na rozdíl od důkazů vět 1, 2 a 3 složitější (s výjimkou věty 5).

Věta 4. Dostižitelná grupa, která má systém generátorů typu (V), má též systém generátorů typu (III).

Věta 5. Grupa, mající systém generátorů typu (IV), má též systém generátorů typu (III).

Věta 6. Má-li grupa systém generátorů typu (III), má též systém generátorů typu (IV).

Důkaz věty 6 se opírá o dvě důležitá lemmata:

Lemma 1. Budiž $\mathfrak{G}$ dědičně reducibilní systém grupy G , $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$ konečná podmnožina. Potom též $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)$ je dědičně reducibilní systém generátorů grupy G .

Lemma 2. Budiž $\mathfrak{G}$ ireducibilní systém generátorů grupy G ; budiž dále $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$ konečná podmnožina taková, že platí: Existuje $\bar{g} \in \mathfrak{G}$ tak, že

$$\bar{g} \in \{\mathfrak{G} \setminus (\bar{g}), \mathfrak{G}_0\} \quad \text{a} \quad \bar{g} \text{ non} \in \{\mathfrak{G} \setminus (\bar{g}), \mathfrak{G}'_0\}, \quad \text{kde } \mathfrak{G}'_0 \subsetneq \mathfrak{G}_0.$$

Potom existuje ireducibilní systém generátorů $\bar{\mathfrak{G}}$ grupy G s vlastnostmi

$$\bar{\mathfrak{G}} \subset (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0), \quad \bar{\mathfrak{G}} \supseteq \mathfrak{G}_0, \quad \bar{g} \text{ non} \in \bar{\mathfrak{G}}.$$

Z těchto výsledků pak snadno usoudíme na tyto možnosti kombinací: Grupa G má systémy generátorů

1. pouze typu (VI) ($\Leftrightarrow G = 0$);
2. typů (VI) a (I) ($\Leftrightarrow G = G(2)$);
3. typů (VI), (I) a (II) (např. každá nenulová grupa $G \neq G(2)$ s konečným počtem generátorů);

$$4. \text{ typů (VI), (I), (II), (III) a (IV) (např. grupa } G_3 = G(p^\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p));$$

$$5. \text{ typů (VI), (I), (II), (III), (IV) a (V) (např. grupa } G_2);$$

$$6. \text{ typů (III), (IV) a (V) (např. grupa } G_1);$$

$$7. \text{ pouze typu (V) } (\Leftrightarrow G \neq 0 \text{ divisibilní}).$$

Jedinou další možnou kombinací by mohla být:

$$8. \text{ Grupa } G \text{ má systémy generátorů typu (III) a (IV).}$$

Odpověď na otázku, zda tato možnost může nastat (tj. zda taková grupa G existuje) nebo ekvivalentně: zda existuje grupa, jež nemá systém generátorů typu (V) ani typu (VI), zůstává zatím otevřeným problémem.

První část práce je otištěna v časopise Чех. мат. журнал, 8 (1958), 54–61.

Vlastimil Dlab, Praha

TRANSFORMACE VÍCEROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ

(Vlastní referát JOSEFA KRÁLE o přednášce proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 24. února 1958.)

Bud G otevřená množina v E_m a nechť Φ je „hladké“ zobrazení množiny G do E_m . Označme symbolem $D_\Phi(t)$ jakobián transformace Φ v bodě t a předpokládejme, že

$\int_G |D_\Phi(t)| dt < \infty$. Potom pro skoro všechna $x \in E_m$ je množina $\Phi^{-1}(x)$ konečná a vztah

$$\int_G F(t) |D_\Phi(t)| dt = \int_{E_m} \left(\sum_{\Phi(t)=x} F(t) \right) dx \quad (1)$$

platí pro každou funkci F na G , pro niž existuje Lebesgueův integrál vlevo (součet za integračním znaménkem vpravo má pak smysl pro skoro všechna x , integrál vpravo rovněž existuje a je roven integrálu vlevo). Jednoduchý důkaz obecnějšího tvrzení podal J. MAŘÍK v článku „Transformation of m -dimensional Lebesgue integrals“, Чех. мат. журнал 6 (81), 1956. Lze očekávat, že integrál na pravé straně formule (1) bude mít smysl i pro jiná zobrazení Φ , než jsou zobrazení „hladká“. To nás vede k následující definici:

Buď G množina typu F_σ v E_m a buď Φ spojitě zobrazení množiny G do E_m . Označme symbolem $N_\Phi(G, x)$ počet bodů množiny $\Phi^{-1}(x) \cap G$ (je-li tato množina nekonečná, klademe $N_\Phi(G, x) = +\infty$) a položíme

$$V_\Phi(G) = \int_{E_m} N_\Phi(G, x) dx.$$

Řekneme, že zobrazení Φ má konečnou variaci na množině G , jestliže $V_\Phi(G) < \infty$.

Snadno se zjistí, že funkce $N_\Phi(G, x)$ je borelovsky měřitelná, takže uvedená definice má smysl. (Zobrazení s konečnou variací studoval po prvé S. BANACH v článku „Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie“, Fund. Math., vol. 7, 1925.) Stejným způsobem můžeme ovšem definovat symbol $V_\Phi(M)$ pro každou množinu M typu F_σ , jež je obsažena v G . V případě, že zobrazení Φ má konečnou variaci na G , můžeme množinovou funkci V_Φ (definovanou zatím jen na těch podmnožinách množiny G , jež mají typ F_σ) rozšířit na úplnou a úplně konečnou míru na G . Potom platí

$$\int_G F(t) dV_\Phi(t) = \int_{E_m} \left(\sum_{\Phi(t)=x} F(t) \right) dx$$

pro každou funkci F na G , pro niž existuje integrál vlevo. Srovnáním tohoto vztahu se vzorcem (1) dostáváme (za příslušných předpokladů o funkci F)

$$\int_G F(t) |D_\Phi(t)| dt = \int_G F(t) dV_\Phi(t)$$

pro „hladké“ zobrazení Φ s integrovatelným jacobianem na otevřené množině G .

Pro transformaci integrálů podle míry V_Φ při spojitě záměně proměnných lze odvodit následující větu:

Buď Ψ spojitě zobrazení otevřené množiny $O \subset E_m$ na množinu $G \subset E_m$ a buď Φ spojitě zobrazení množiny G do E_m . Označme symbolem $\Phi * \Psi$ zobrazení, jež vznikne složením zobrazení Φ , Ψ (tj. $(\Phi * \Psi)(t) = \Phi(\Psi(t))$ pro každé $t \in O$). Má-li zobrazení $\Phi * \Psi$ konečnou variaci na množině O , pak zobrazení Φ má konečnou variaci na množině G a vztah

$$\int_O F(\Psi(t)) dV_{\Phi * \Psi}(t) = \int_G F(x) N_\Psi(O, x) dV_\Phi(x)$$

platí pro každou funkci F na G , pro niž existuje některý z uvedených integrálů (pak existuje i druhý integrál a platí rovnost).

Je-li mimo to zobrazení Ψ prosté, pak $N_\Psi(O, x) = 1$ pro všechna $x \in G$ a uvedená formule ukazuje, že v integrálu $\int_G F(x) dV_\Phi(x)$ můžeme „provést substituci $x = \Psi(t)$ “, aniž bychom změnili jeho hodnotu (nebo porušili jeho existenci).

¹⁾ V dalším nevystačíme s otevřenými množinami; budeme totiž vyšetřovat také obrazy takových množin při spojitých zobrazeních. Proto vyslovujeme naši definici hned pro množiny typu F_σ . Omezení na množiny tohoto typu není ovšem podstatné.

Nyní si všimneme podobných otázek v souvislosti s „orientovanými“ integrály typu $\int_G F(t) D_\Phi(t) dt$; omezíme se pouze na případ $m = 2$.

Je-li Φ spojitě zobrazení otevřené množiny $G \subset E_2$ do E_2 , pak v každém bodě $t \in G$, jenž je izolovaným bodem množiny $\Phi^{-1}(\Phi(t))$, je definován lokální index zobrazení Φ , který označíme $\iota_\Phi(t)$. Zhruba řečeno, má index $\iota_\Phi(t)$ tento názorný význam: Označíme-li K uzavřenou orientovanou křivku, ve kterou přejde zobrazením Φ „dostatečně malá“ kladně orientovaná Jordanova křivka, obsahující bod t ve svém vnitřku, pak $\iota_\Phi(t)$ je topologický index bodu $\Phi(t)$ vzhledem ke křivce K .

Předpokládejme nyní, že zobrazení Φ je „hladké“ a má integrovatelný jakobián na G . Potom platí

$$\begin{aligned} \int_G F(t) D_\Phi(t) dt &= \int_G F(t) \operatorname{sgn} D_\Phi(t) \cdot |D_\Phi(t)| dt = (\text{viz (1)}) = \\ &= \int \left(\sum_{\Phi(t)=x} F(t) \operatorname{sgn} D_\Phi(t) \right) dx, \end{aligned}$$

jakmile existuje výchozí integrál. Avšak $\operatorname{sgn} D_\Phi(t) = \iota_\Phi(t)$ pro každé $t \in G$, pro něž je $D_\Phi(t) \neq 0$. Protože množina $E[t; t \in G, D_\Phi(t) = 0]$ přejde zobrazením Φ v množinu Lebesgueovy míry 0, dostáváme

$$\int_G F(t) D_\Phi(t) dt = \int \left(\sum_{\Phi(t)=x} F(t) \iota_\Phi(t) \right) dx. \quad (2)$$

Poslední integrál má opět smysl pro mnohem širší třídu transformací, než jsou „hladké“ transformace s integrovatelným jakobiánem. Je-li např. Φ spojitě zobrazení otevřené množiny $G \subset E_2$ do E_2 takové, že $V_\Phi(G) < \infty$, pak index $\iota_\Phi(t)$ je definován pro V_Φ — skoro všechna $t \in G$ a funkce ι_Φ je V_Φ — měřitelná na G . Jak ukázal T. RADÓ, je mimo to množina $E[t; t \in G, |\iota_\Phi(t)| > 1]$ spočetná. Jsme tedy oprávněni definovat na G zobecněnou míru $\tilde{V}_\Phi$ předpisem

$$\tilde{V}_\Phi(M) = \int_M \iota_\Phi(t) dV_\Phi(t)$$

(pro každou množinu $M \subset G$, jež je měřitelná vzhledem k míře V_Φ). Za příslušných předpokladů o funkci F platí pak vztah

$$\int_G F(t) d\tilde{V}_\Phi(t) = \int_G F(t) \iota_\Phi(t) dV_\Phi(t) = \int \left(\sum_{\Phi(t)=x} F(t) \iota_\Phi(t) \right) dx.$$

Odtud dostáváme srovnáním s (2)

$$\int_G F(t) D_\Phi(t) dt = \int_G F(t) d\tilde{V}_\Phi(t)$$

pro ten případ, že zobrazení Φ je „hladké“ a má integrovatelný jakobián. Poslední vztah platí také pro mnohem obecnější diferencovatelné transformace. Podobné otázky jsou vyšetřeny v monografii T. RADÓ: Length and area. O tom, jak se transformují integrály podle míry $\tilde{V}_\Phi$ při spojitě záměně proměnných, nás poučuje např. tato věta:

Buď Ψ spojitě zobrazení otevřené množiny $O \subset E_2$ na množinu $G \subset E_2$ a buď Φ spojitě zobrazení množiny G do E_2 . Položme $\tilde{N}_\Psi(O, x) = \sum_{\Psi(t)=x} \iota_\Psi(t)$ pro každé $x \in G$, pro něž je množina $\Psi^{-1}(x) \cap O$ konečná. Je-li $V_{\Phi \circ \Psi}(O) < \infty$, pak je též $V_\Phi(G) < \infty$, funkce $\tilde{N}_\Psi(O, x)$ je definována V_Φ — skoro všude na G a vztah

$$\int_O F(\Psi(t)) d\tilde{V}_{\Phi \circ \Psi}(t) = \int_G F(x) \tilde{N}_\Psi(O, x) d\tilde{V}_\Phi(x)^2$$

platí pro každou funkci F na G , pro niž existuje integrál vlevo.

²⁾ G° je vnitřek množiny G .

V tom případě, že O je oblast a Ψ je homeomorfismus, máme buď $\tilde{N}_{\Psi}(O, x) = 1$ pro všechna $x \in G = G^{\circ}$ nebo $\tilde{N}_{\Psi}(O, x) = -1$ pro všechna $x \in G$; uvedená formule pak ukazuje, že integrál $\int_G F(x) d\tilde{V}_{\Phi}(x)$ je (až na znaménko) „invariantní vůči substituci $x = \Psi(t)$ “.

Stejná tvrzení platí také pro jednorozměrný případ. Integrál podle míry $\tilde{V}_{\Phi}$ přejde v Lebesgue - Stieltjesův integrál podle funkce Φ ; zvláště jednoduchý význam má funkce $\tilde{N}_{\Psi}$. Z výše uvedené věty dostáváme pak snadno jednoduchou větu o záměně proměnných v Lebesgue-Stieltjesově integrálu.

Josef Král, Praha