Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

POZNÁMKA K THEORII RIEMANNOVA INTEGRÁLU

KAREL DRBOHLAV, Praha

DT:517.65

(Došlo dne 12. června 1956)

V článku je dokázán vzorec $\int\limits_{\Phi(\alpha)}^{\overline{\Phi(\beta)}} F(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\overline{\beta}} F[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,dt$ za předpokladu, že funkce Φ má v každém bodě intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ nezápornou derivaci a že existuje Riemannův integrál $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi'(x)\,dx$. Předpoklad existence tohoto integrálu nelze nahradit předpokladem omezenosti funkce Φ'.

Budiž f libovolná omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li D libovolné dělení tohoto intervalu určené dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, pak označme symbolem $S(f, D)$ příslušný horní součet a symbolem $s(f, D)$ příslušný dolní součet. Jak známo, je Riemannův horní integrál $\int\limits_{a}^{\overline{b}} f$ definován jako infimum množiny všech horních součtů funkce f. Podobně je definován Riemannův dolní integrál $\int\limits_{\underline{a}}^{b} f$ a platí $\int\limits_{\underline{a}}^{b} (-f) = -\int\limits_{a}^{\overline{b}} f$.

Věta 1. *Budiž f omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, φ nezáporná funkce v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ s Riemannovým integrálem $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi = b - a$. Definujme funkce Φ, g předpisem $\Phi(t) = a + \int\limits_{\alpha}^{t} \varphi$, $g(t) = f[\Phi(t)]\,\varphi(t)$. Potom platí*

$$\int\limits_{a}^{\overline{b}} f = \int\limits_{\alpha}^{\overline{\beta}} g\,. \tag{1}$$

Důkaz. Budiž D libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b\}$, a budiž M_i supremum funkce f v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Ze spojitosti funkce Φ a ze vztahů $\Phi(\alpha) = a$, $\Phi(\beta) = b$ vyplývá, že existují body $t_i \in \langle\alpha, \beta\rangle$ takové, že platí $\Phi(t_i) = x_i$, $t_0 = \alpha$, $t_n = \beta$. Pro $t \in \langle t_{i-1}, t_i\rangle$ jest $\Phi(t) \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a tedy $g(t) \leq M_i\varphi(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Odtud plyne $\int\limits_{\alpha}^{\overline{\beta}} g = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{\overline{t_i}} g \leq \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f, D)$ a tedy

$$\int\limits_{\alpha}^{\overline{\beta}} g \leq \int\limits_{a}^{\overline{b}} f\,. \tag{2}$$

Vezměme nyní libovolné dělení D_0 intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ a zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Označme písmenem M supremum funkce $|f|$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Z existence $\int_\alpha^\beta \varphi$ plyne, že je možno najít takové dělení D_1 intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, pro které $M[S(\varphi, D_1) - s(\varphi, D_1)] \leqq \varepsilon$. Budiž $D_2 = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ společné zjemnění obou dělení D_0, D_1 a označme symbolem μ_i (resp. ν_i) supremum (resp. infimum) funkce φ v intervalu $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$. Budiž ještě $x_i = \Phi(t_i)$, M_i supremum funkce f v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $\eta = \varepsilon(b - a)^{-1}$. Zřejmě existují čísla ξ_i taková, že $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$, $f(\xi_i) \geqq M_i - \eta$; dále existují čísla τ_i taková, že $t_{i-1} \leqq \tau_i \leqq t_i$, $\Phi(\tau_i) = \xi_i$. Protože $x_i - x_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi = \varrho_i(t_i - t_{i-1})$, kde $\nu_i \leqq \varrho_i \leqq \mu_i$, platí

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n} f[\Phi(\tau_i)]\, \varphi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| = \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\varphi(\tau_i) - \varrho_i](t_i - t_{i-1})\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} M(\mu_i - \nu_i)(t_i - t_{i-1}) = \\
&= M[S(\varphi, D_2) - s(\varphi, D_2)] \leqq M[S(\varphi, D_1) - s(\varphi, D_1)] \leqq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Odtud plyne $S(g, D_0) \geqq S(g, D_2) \geqq \sum_{i=1}^{n} f[\Phi(\tau_i)]\, \varphi(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \geqq$

$$\geqq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon \geqq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \eta(b - a) - \varepsilon \geqq \overline{\int_a^b} f - 2\varepsilon,$$

takže $\overline{\int_\alpha^\beta} g \geqq \overline{\int_a^b} f - 2\varepsilon$. Ježto ε bylo libovolné, platí

$$\overline{\int_\alpha^\beta} g \geqq \overline{\int_a^b} f\,. \tag{3}$$

Vzorec (1) plyne srovnáním (2) a (3).

Věta 2. *Budiž f omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, φ nekladná funkce v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ s Riemannovým integrálem $\int_\alpha^\beta \varphi = a - b$. Definujme funkce Φ, g předpisem $\Phi(t) = b + \int_\alpha^t \varphi$, $g(t) = f[\Phi(t)] \cdot |\varphi|$. Potom platí vztah* (1).

Důkaz. Definujme funkce ψ, Ψ předpisem $\psi = -\varphi$, $\Psi(t) = a + \int_\alpha^t \psi$. Platí $\Psi(t) + \Phi(t) = a + b$. Ze zřejmého vztahu $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(a + b - x)\,dx$ plyne podle věty 1 $\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_\alpha^\beta} f[a + b - \Psi]\,\psi = \overline{\int_\alpha^\beta} f[\Phi]|\varphi| = \overline{\int_\alpha^\beta} g$.

Poznámka 1. Klademe-li ve vztahu (1) funkci $-f$ místo f, dostaneme za předpokladů věty 1 nebo věty 2 rovnost

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_\alpha^\beta} g\,. \tag{4}$$