Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O ABSOLUTNĚ KONVEXNÍM OBALU MNOŽINY V KONEČNĚ DIMENSIONÁLNÍM VEKTOROVÉM PROSTORU

VLASTIMIL PTÁK, Praha

(Došlo dne 25. září 1957)

DT:519.5

Úkolem článku jest popsati absolutně konvexní obal (tj. symetrický a konvexní obal) dané množiny v konečně dimensionálním vektorovém prostoru.

V nedávné autorově práci [2] bylo ukázáno, že jedna důležitá věta o aproximaci spojitých funkcí úzce souvisí s vlastnostmi absolutně konvexního obalu kompaktní množiny v konečně dimensionálním vektorovém prostoru. Popis těchto vlastností je obsahem tohoto článku.

1. Úvod. Budiž E daný vektorový prostor nad tělesem čísel reálných. Množinu $K \subset E$ nazveme konvexní, jestliže s každými dvěma body obsahuje i úsečku, spojující tyto body. Jinými slovy: množina K je konvexní, jestliže platí $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in K$, jakmile $x_1 \in K$ a $x_2 \in K$ a $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Snadno se zjistí, že celý prostor E je konvexní a že průnik libovolného systému konvexních množin je zase množina konvexní. Je-li tedy dána neprázdná množina $M \subset E$, můžeme utvořit průnik všech konvexních množin, které obsahují M. Tato množina je zřejmě nejmenší konvexní množinou, obsahující M. Nazveme ji konvexním obalem množiny M. Snadno se dokáže, že konvexní obal množiny M je totožný s množinou všech vektorů tvaru $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i m_i$, kdež p je libovolné přirozené číslo, body m_i náleží do M a čísla λ_i jsou nezáporná a splňují rovnost $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

Nechť nyní E je konečně dimensionální a nechť n je jeho dimense. Pro tento případ dokázal C. CARATHÉODORY [1], že konvexní obal libovolné kompaktní množiny $M \subset E$ je totožný s množinou všech vektorů tvaru $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_i$, kdež $m_i \in M$, $\lambda_i \geqq 0$ a $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Není však obtížné nahlédnouti, že tato věta platí i bez jakéhokoli předpokladu o množině M.

Vzhledem k významným aplikacím pojmu konvexního obalu jest účelné podati co možná nejjednodušší důkaz této věty. V tomto článku podáváme jednoduché důkazy vět o konvexním a absolutně konvexním obalu libovolné množiny $M \subset E$, založené jen na definici konvexní množiny. Jak mne upozornil recensent, je základní myšlenka důkazu věty 1 v podstatě totožná s myšlenkou E. STEINITZE [3]. V podaných důkazech se nepoužívá věty o existenci opěrné nadroviny.

2. Konvexní obal. V konečně dimensionálním prostoru platí následující dvě věty o konvexním obalu:

Věta 1. *Nechť E je n-dimensionální vektorový prostor. Nechť $A \subset E$. Potom konvexní obal množiny A je totožný s množinou všech vektorů tvaru $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i$, kde $a_i \in A, \lambda_i \geqq 0$ a $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.*

Důkaz. Zřejmě stačí dokázati následující tvrzení: Jestliže $a_1, \ldots, a_p$ jsou dané vektory a $x = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i a_i$, při čemž $\sigma_i \geqq 0$ a $\sum_{i=1}^{p} \sigma_i = 1$, potom existují nezáporná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tak, že $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ a $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$, při čemž nejvýše $n + 1$ z čísel λ_i je různých od nuly. Důkaz tohoto tvrzení provedeme úplnou indukcí podle p.

Pro $p \leqq n + 1$ věta zřejmě platí. Buď tedy $p \geqq n + 2$ a předpokládejme, že věta platí pro skupiny o menším počtu vektorů. Mějme nyní vektory $a_1, \ldots, a_p$ a nezáporná čísla σ_i tak, že $\sum_{i=1}^{p} \sigma_i = 1$. Protože vektory $a_i - a_p$ $(i = 1, \ldots, p-1)$ jsou lineárně závislé, existují čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, tak, že $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i = 0$ a zároveň $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$. Aspoň jedno z čísel α_i je kladné. Položme nyní $\xi = \min \frac{\sigma_j}{\alpha_j}$, kde j probíhá ty indexy, pro něž $\alpha_j > 0$. Je tedy $\xi \geqq 0$. Snadno zjistíme, že čísla $\mu_i = \sigma_i - \xi \alpha_i$ jsou nezáporná a jejich součet je 1; zároveň platí

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i a_i = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i a_i - \xi \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i a_i .$$

Protože aspoň jedno z čísel μ_i je nula, můžeme na vektor $\sum_{i=1}^{p} \mu_i a_i$ aplikovat indukční předpoklad, čímž je důkaz dokončen.

Věta 2. *Nechť E je n-dimensionální vektorový prostor. Nechť $A \subset E$ je kompaktní. Potom konvexní obal množiny A je kompaktní.*

Důkaz. Buď k_r $(r = 1, 2, \ldots)$ libovolná posloupnost bodů konvexního obalu množiny A. Podle předešlého výsledku máme vyjádření $k_r = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ri} a_{ri}$, kde

$a_{ri} \in A$. Existuje nyní nekonečná podmnožina R množiny všech přirozených čísel tak, že pro každé i existují limity: $\lim\limits_{r \in R} a_{ri} = a_i \in A$, $\lim\limits_{r \in R} \lambda_{ri} = \lambda_i$. Bude tedy $\lim\limits_{r \in R} k_r = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i$ a tento bod náleží do konvexního obalu množiny A.

3. Absolutně konvexní obal. Budiž E nějaký vektorový prostor. Množinu $A \subset E$ nazveme symmetrickou, jestliže pro každý prvek $x \in A$ také $-x \in A$. Snadno se zjistí, že množina A je symetrická a konvexní, právě když platí implikace: Jakmile $x_1, x_2 \in A$ a čísla λ_1, λ_2 splňují rovnost $|\lambda_1| + |\lambda_2| = 1$, pak také $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$. Z tohoto důvodu nazýváme někdy množiny symmetrické a konvexní také absolutně konvexní. Stejným způsobem jako v případě konvexního obalu se ukáže, že ke každé množině $M \subset E$ existuje nejmenší absolutně konvexní množina, obsahující M. Budeme ji nazývat absolutně konvexním obalem množiny M. Snadno se zjistí, že absolutně konvexní obal množiny M je totožný s množinou všech vektorů tvaru $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i m_i$, kde p je libovolné přirozené číslo, body m_i náleží do M a čísla λ_i splňují nerovnost $\sum\limits_{i=1}^{p} |\lambda_i| \leqq 1$.

V konečně dimensionálním prostoru platí potom následující věta o absolutně konvexním obalu.

Věta 3. *Nechť E je n-dimensionální vektorový prostor. Nechť $A \subset E$. Potom absolutně konvexní obal množiny A je totožný s množinou všech vektorů tvaru $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, kde $a_i \in A$ a $\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqq 1$.*

Důkaz. Absolutně konvexní obal množiny A zřejmě splývá s konvexním obalem množiny B, která se skládá ze všech bodů $a \in A$ a všech bodů tvaru $-a$, kde $a \in A$. Budiž x prvkem absolutně konvexního obalu množiny A. Podle věty o konvexním obalu existují nezáporná čísla λ_i se součtem rovným jedné a body $b_i \in B$ tak, že $x = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i b_i$. Protože E má dimensi n, existují čísla $\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}$, z nichž aspoň jedno je od nuly různé, tak, že $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \omega_i b_i = 0$. Můžeme zřejmě předpokládati, že $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \omega_i \geqq 0$. Mezi čísly ω_i bude tedy jistě aspoň jedno kladné. Označme nyní $\xi = \min \dfrac{\lambda_j}{\omega_j}$ pro ty indexy j, pro které $\omega_j > 0$. Bude nyní $x = \sum\limits_{i=1}^{n+1} (\lambda_i - \xi\omega_i)\, b_i$. Čísla $\lambda_i - \xi\omega_i$ jsou zřejmě nezáporná a aspoň jedno z nich je nulové. Zároveň $\sum\limits_{i=1}^{n+1} (\lambda_i - \xi\omega_i) = 1 - \xi \sum\limits_{i=1}^{n+1} \omega_i \leqq 1$, čímž důkaz je dokončen.