Резюме

АФТОМОРФИЗМЫ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

ФРАНТИШЕК ШИК, Брно

(Поступило в редакцию 9/VI 1956 г.)

1. $\mathfrak{M}$ означает просто упорядоченное множество, Γ — какую-нибудь группу афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$. Естественное упорядочение ($f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x)$ для всех $x \in \mathfrak{M}$) превращает группу Γ в частично упорядоченную группу. Два элемента $f, g \in \Gamma$ называются одинаково ориентированными, если для любого $x \in \mathfrak{M}$ $f(x) > x \Rightarrow g(x) \geqq x$; $g(x) > x \Rightarrow f(x) \geqq x$.

В работе доказаны следующие главные теоремы.

Теорема 1. *Транзитивная группа Γ афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$ просто упорядочена тогда и только тогда, если сопряженные элементы одинаково ориентированы.*

Если $x \in \mathfrak{M}$, $f \in \Gamma$, то соединение (для всех натуральных n) интервалов, ограниченных точками $f^n(x)$, $f^{-n}(x)$, называется *циклом* афтоморфизма f. Если цикл содержит по крайней мере два элемента из $\mathfrak{M}$, то он называется *истинным циклом.* Группа Γ — *моноциклическая,* если каждый элемент $f \in \Gamma$ обладает самое больше одним истинным циклом. Под $\mathfrak{M}(\Gamma)$ подразумевается соединение всех инстинных циклов всех $f \in \Gamma$. Если афтоморфизм f обладает истинным циклом A, то афтоморфизм g называется *фазой* афтоморфизма f, если он обладает следующим свойством: $x \in A \Rightarrow g(x) = f(x)$; $x \bar{\in} A \Rightarrow g(x) = x$. Группа Γ афтоморфизмов обладает свойством (α), если с каждым элементом $f \in \Gamma$, $f \neq e$, содержит от нуля отличную степень по крайней мере одной его фазы. Группа Γ *дивергентна,* если к любым $x, y \in \mathfrak{M}$, $x < y$, существует такое $f \in \Gamma$, что $f(x) \geqq y$.

Теорема 3. *На группе Γ эквивалентны следующие свойства* а) *моноцикличность,* б) *архимедово простое упорядочение и дивергенция,* в) $\mathfrak{M}(\Gamma)$ *является циклом каждого афтоморфизма $\neq e$ из Γ,* д) *простое упорядочение и свойство* (α).

2. Множество $\mathfrak{M}$ — *сверху* (*снизу*) *слабо полное* относительно Γ, если для каждого сверху (снизу) ограниченного множества афтоморфизмов $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ существует в $\mathfrak{M}$ элемент $\bigvee_\nu [f_\nu(x)]$ ($\bigwedge_\nu [f_\nu(x)]$) для любого $x \in \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ — слабо полное относительно Γ, если $\mathfrak{M}$ — сверху и снизу слабо полное относительно Γ.

Теорема 4. *Если некоторое из условий* 1, 2, 3 *выполнено для любого сверху ограниченного подмножества $\{f_\nu\}$ группы Γ афтоморфизмов на $\mathfrak{M}$, то выполнены тоже остальные, Γ — полная l-группа, и для определенных в условиях* 1 *и* 2 *преобразований s и t* $s = \bigvee f_\nu$, $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$.

1. $\mathfrak{M}$ — *сверху слабо полное относительно* Γ, *и преобразование* $s(x) = \bigvee_\nu [f_\nu(x)]$ *является афтоморфизмом на* $\mathfrak{M}$;

2. $\mathfrak{M}$ — *снизу слабо полное относительно* Γ, *и преобразование* $t(x) = \bigwedge_\nu [f_\nu^{-1}(x)]$ *является афтоморфизмом на* $\mathfrak{M}$;

3. $\mathfrak{M}$ — *слабо полное относительно* Γ, *и для любого* $x \in \mathfrak{M}$ *имеет место* $\bigvee_\nu \{f_\nu(\bigwedge_\mu [f_\mu^{-1}(x)])\} \geqq \bigwedge_\nu \{f_\nu^{-1}(\bigvee_\mu [f_\mu(x)])\}$.

Теорема 8. *Пусть* Γ — *транзитивная группа афтоморфизмов, обладающая некоторым из свойств* а)—д) *из теоремы* 3 (*свойство* б) *без дивергенции*). *Пусть* $\mathfrak{M}$ *содержит по крайней мере два элемента. Тогда* Γ *изоморфна просто упорядоченной аддитивной группе всех целых чисел, соотв. всех действительных чисел, смотря по тому, обладает ли* $\mathfrak{M}$ *скачком, соотв. не обладает ли* $\mathfrak{M}$ *ни скачком ни просветом. В обоих случаях* Γ *подобна просто упорядоченному множеству* $\mathfrak{M}$.

Следствие 2. *Просто упорядоченное множество* $\mathfrak{M}$ *без скачков подобно просто упорядоченному множеству всех действительных чисел тогда и только тогда, если существует на* $\mathfrak{M}$ *полная транзитивная* l-*группа афтоморфизмов, отличная от* (e).

Теорема 5. *Просто упорядоченное множество* $\mathfrak{M}$, *обладающее скачком, является множеством типа* $\omega^* \oplus \omega$ *тогда и только тогда, если существует на* $\mathfrak{M}$ *архимедова просто упорядоченная транзитивная группа афтоморфизмов.*

3. Если T — система транзитивности группы Γ, то под Γ_T подразумевается группа всех афтоморфизмов на T, индуцированных на T афтоморфизмами группы Γ, а под Γ^T — группа всех афтоморфизмов из Γ, для которых точки вне T неподвижны.

Теорема 10. *Пусть* T — *система транзитивности группы* Γ *афтоморфизмов на* $\mathfrak{M}$. *Пусть группа* Δ *всех афтоморфизмов на* T *абелева. Тогда* $\Gamma_T = \Delta$.

Теорема 12. *Пусть* Γ — *архимедова просто упорядоченная группа афтоморфизмов на* $\mathfrak{M}$. *Тогда каждая истинная система транзитивности* T *группы* Γ *подобна просто упорядоченному множеству* Γ, *и каждая просто упорядоченная группа* Γ_T (*для истинных* T) *изоморфна просто упорядоченной группе* Γ.

Теорема 14. *Пусть* Γ — *архимедова* l-*группа, пусть* Γ *обладает двумя истинными системами транзитивности* T, S. *Группа* Γ *просто упорядочена тогда и только тогда, если имеют место равенства* $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$.