Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O CENTRÁLNÍ AXONOMETRII

LADISLAV DRS, Praha

(Došlo dne 10. září 1957) DT:515.69

Věty obsažené v této práci umožňují vytvoření takové rovinné bodové konfigurace, kterou lze považovat za středový průmět bodů určujících pravoúhlou souřadnicovou soustavu v prostoru s jednotkovými body na osách souřadnic.

Úvahy jsou vázány na eukleidovský prostor rozšířený o nevlastní rovinu.

Definice 1. *Souřadnicová konfigurace* je konfigurace bodů O', J'_1, J'_2, J'_3, U'_1 U'_2, U'_3 splňujících tyto podmínky:

1. body O', J'_1, J'_2, J'_3 jsou vlastní;
2. úsečky $\overline{O'J'_1}$, $\overline{O'J'_2}$, $\overline{O'J'_3}$ jsou stejně dlouhé a navzájem kolmé;
3. body U'_1, U'_2, U'_3 jsou nevlastní body přímek $x'_i = O'J'_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Definice 2. *Přípustná konfigurace* je konfigurace bodů O, J_1, J_2, J_3, U_1, U_2, U_3 vlastní roviny ϱ splňujících tyto podmínky:

1. body O, J_i, U_i jsou různé body téže přímky x_i $(i = 1, 2, 3)$;
2. alespoň dvě z přímek x_1, x_2, x_3 jsou různé;
3. body U_1, U_2, U_3 neleží na přímce.

Jsou-li přímky x_1, x_2, x_3 navzájem různé, zaveďme toto označení: $A_i = J_jJ_k \cap U_jU_k$.*) Body A_1, A_2, A_3 leží podle Desarguesovy věty na přímce p. Je-li např. $x_i = x_j$, označme $A_i = J_jJ_k \cap U_jU_k$, $A_j = J_iJ_k \cap U_iU_k$, $p = A_iA_j$, $A_k = p \cap x_i$. Stanovme harmonický pól P přímky p vzhledem k trojúhelníku $U_1U_2U_3$.**) Kuželosečka určená polárním trojúhelníkem $U_1U_2U_3$ a pólem P s polárou p je imaginární. Neprotíná totiž reálně žádnou stranu svého polárního trojúhelníka, jak se snadno dokáže. Involuce sdružených pólů, kterou tato kuželosečka indukuje na přímce U_iU_j, má jeden pár U_i, U_j a druhý pár $A_k = p \cap U_iU_j$, $\bar{A}_k = PU_k \cap U_iU_j$ je jím rozdělován.

*) Indexy i, j, k jsou navzájem různá čísla 1, 2, 3.

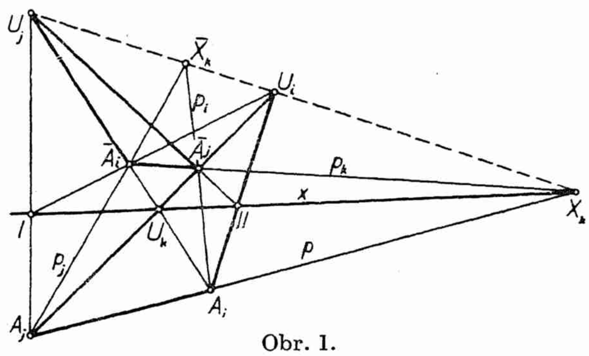
**) Slovem „trojúhelník" rozumíme trojici nekolineárních bodů vlastních nebo nevlastních.

Involuce je eliptická a její samodružné body, tj. hledané průsečíky, jsou imaginární.

V dalších úvahách nahradíme tuto kuželosečku kuželosečkou k, která ji reálně zastupuje. Nazveme ji kuželosečkou *přidruženou* k přípustné konfiguraci. Kuželosečka k je tedy definována antipolárním trojúhelníkem $U_1U_2U_3$ a antipolárním párem P, p. Jestliže je tato kuželosečka kružnicí, pak její Laguerrovy body jsou na kolmici vedené středem kružnice k k její rovině ϱ ve vzdálenosti rovné poloměru kružnice k.

Platí tato základní věta:

Přípustná konfigurace je středovým průmětem souřadnicové konfigurace právě tehdy, když je přidružená kuželosečka k kružnicí. Střed promítání S je Laguerrův bod kružnice k.



Obr. 1.

Důkaz je uveden v práci [2].

Poznamenejme jen, že přípustnou konfigurací s přidruženou kružnicí není souřadnicová konfigurace určena jednoznačně. Bod O' lze totiž zvolit kdekoli na přímce SO, kromě jejího bodu nevlastního a bodu S.

Věta 1. *Má-li přípustná konfigurace přidruženou kružnici k, pak platí: Body A_k, $\overline{A}_k = PU_k \cap U_iU_j$ jsou společným párem dvou involucí: involuce I'_k, jejíž samodružné body jsou U_i, U_j, a involuce I''_k sdružených antipólů kružnice k na přímce U_iU_j.*

Důkaz. Bod P je harmonickým pólem přímky p vzhledem k trojúhelníku $U_1U_2U_3$ a proto platí: $(U_i, U_j, A_k, \overline{A}_k) = -1$; body A_k, $\overline{A}_k$ jsou párem involuce I'_k. Protože pár P, p je antipolární pár kružnice k, náleží pár A_k, $\overline{A}_k$ involuci I''_k. Involuce I'_k je hyperbolická, neboť má reálné samodružné elementy. Involuce I''_k je, jak známo, eliptická. Společný pár A_k, $\overline{A}_k$ obou involucí je reálný.

Sestrojíme-li body A_i, $\overline{A}_i$ ($i = 1,2\ 3$) na přímce $U_j\,U_k$, leží vždy po třech na čtyřech přímkách. Uvažujme nejprve jen dva páry A_i, $\overline{A}_i$; A_j, $\overline{A}_j$ (obr. 1).

Určují čtyřroh o stranách $p = A_iA_j$, $p_i = A_i\bar{A}_j$, $p_j = \bar{A}_iA_j$, $p_k = \bar{A}_i\bar{A}_j$. Bod U_k je vrcholem diagonálního trojúhelníka tohoto čtyřrohu, body U_i, U_j leží na protilehlé straně diagonálního trojúhelníka a jeho další dva vrcholy $X_k = p_k \cap p$, $\bar{X}_k = p_i \cap p_j$ jsou a) harmonicky sdružené vzhledem k základním bodům U_i, U_j, jak plyne z vlastností úplného čtyřrohu, b) antipolárně sdruženy vzhledem ke kružnici k, jak dokážeme.

Antipolára x bodu $\bar{X}_k$ je spojnicí antipólů I, II přímek p_i, p_j, tj. bodů $I = \bar{A}_iU_i \cap A_jU_j$, $II = \bar{A}_jU_j \cap A_iU_i$. Antipolára $x = I\,II$ prochází bodem X_k, neboť je to osa perspektivních trojúhelníků $A_iA_jU_i$, $\bar{A}_i\bar{A}_jU_j$, a proto obsahuje průsečík sobě odpovídajících přímek A_iA_j, $\bar{A}_i\bar{A}_j$, tj. bod X_k. Body X_k, $\bar{X}_k$ jsou proto společnými body involucí I'_k, I''_k na přímce U_iU_j. Kdyby byl tento pár jiný, než dříve sestrojený pár A_k, $\bar{A}_k$, měly by obě involuce více než jeden společný pár, což není možné, a proto $X_k = A_k$, $\bar{X}_k = \bar{A}_k$.

Věta 2. *Má-li přípustná konfigurace přidruženou kružnici k, jsou body A_k, $\bar{A}_k$ samodružnými body involuce I na přímce U_iU_j, jejíž páry L^a, L^h jsou takto definovány:*

K libovolnému bodu $L \in U_iU_j$ je bod L^a antipolárně sdružen vzhledem ke kružnici k, bod L^h harmonicky sdružen vzhledem k základním bodům U_i, U_j.

Důkaz je uveden v práci [2].

Věty 1, 2 charakterisovaly projektivní vlastnosti přímky p. Uvažujme nyní o významu přímky p v prostoru.

Věta 3. *Má-li přípustná konfigurace přidruženou kružnici k, leží přímka p v rovině π jdoucí středem promítání S rovnoběžně s rovinou $J'_1J'_2J'_3$ z příslušné souřadnicové konfigurace.* (Je to tedy úběžnice roviny $J'_1J'_2J'_3$.)

Důkaz. Nevlastní přímka p' roviny $J'_1J'_2J'_3$ je osou prostorové perspektivity mezi trojúhelníky $J'_1J'_2J'_3$, $U'_1U'_2U'_3$. Její průmět p je proto přímka v rovině, kterou udává věta.

Dále uvedeme věty, umožňující konstrukci přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí, jsou-li známy jen některé body a přímky přípustné konfigurace. Na základě přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí lze pak řešit až na podobnost, vzhledem k poznámce za základní větou, metrické úlohy centrální axonometrie nepřímo a to tím způsobem, že je převedeme na tytéž úlohy v jakémkoli jiném promítání, které užívá také souřadnicovou soustavu a ve kterém lze tyto úlohy řešit snadněji. Na příklad v promítání Mongeově by bodům O, J_1, U_1 odpovídaly projektivně na ose x_{12} body O_{12} J^x_{12} (libovolně volitelný) a nevlastní bod osy x_{12}; bodům J_2, J_3 by odpovídaly body J^y_1 na ose y_1 (kde $\overline{O_{12}J^y_1} = \overline{O_{12}J^x_{12}}$) a J^z_2 na ose z_2 (kde $\overline{O_{12}J^z_2} = \overline{O_{12}J^x_{12}}$), a bodům U_2, U_3 nevlastní body os y_1, z_2.

Až do konce budeme předpokládat, že dané a volené body a přímky splňují tytéž předpoklady, jako stejně označené body a přímky přípustné konfigurace.

Věta 4. *Mějme dány body U_1, U_2, U_3. Pak přípustná konfigurace s přidruženou kružnicí existuje právě tehdy, když*

a) *jsou body U_i, U_j vlastní a bod U_k leží uvnitř pásu, omezeného kolmicemi na přímku U_iU_j jdoucími body U_i, U_j a současně vně kruhu nad průměrem U_iU_j;*

b) *je bod U_i vlastní, U_j nevlastní a bod U_k leží kdekoli na kolmici bodem U_i k přímce U_iU_j kromě bodu U_i;*

c) *jsou body U_i, U_j nevlastní, směry je určující kolmé a bod U_k vlastní.*

Důkaz. Podmínky jsou nutné a vyplývají z toho, že trojúhelník $U_1U_2U_3$ přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí je antipolárním trojúhelníkem této kružnice. Podmínky jsou dostačující. Kružnice k, mající $U_1U_2U_3$ za antipolární trojúhelník, je v případě a) určena jednoznačně, v případě b) má za střed jakýkoliv vnitřní bod úsečky U_iU_k, je-li U_k vlastní, a bod U_i, je-li U_k nevlastní; v případě c) má střed v bodě U_k a libovolný poloměr. Sestrojíme dále přímku p podle některé z předcházejících vět. Zvolíme bod O a tím i přímky x_1, x_2, x_3 ($x_i = OU_i$). Na přímce x_i zvolíme bod J_i a zbývající body J_j, J_k sestrojíme tak, aby trojice bodů J_1, J_2, J_3 byla perspektivní s trojúhelníkem $U_1U_2U_3$ vzhledem k ose perspektivity p. Tím je určena přípustná konfigurace s přidruženou kružnicí a věta je dokázána.

Věta 5. *Nechť jsou dány body O, J_i, J_j, U_i, U_j. Pak přípustná konfigurace O, J_1, J_2, J_3, U_1, U_2, U_3 s přidruženou kružnicí k existuje,*

α) *je-li nejvýše jeden z bodů U_i, U_j nevlastní, vždy;*

β) *jsou-li oba body U_i, U_j nevlastní, právě tehdy, když přímky x_i, x_j jsou kolmé a $\overline{OJ_i} = \overline{OJ_j}$.*

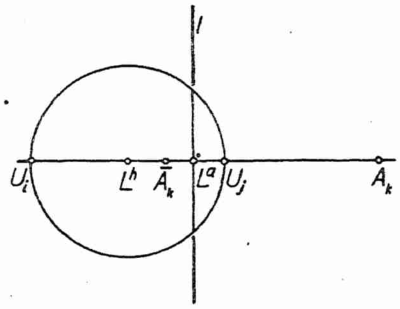
Důkaz. a) Budiž $x_i \neq x_j$. Sestrojme na přímce U_iU_j body $A_k = J_iJ_j \cap U_iU_j$, $\bar{A}_k$, kde $(A_k, \bar{A}_k, U_i, U_j) = -1$, (obr. 2). Body A_k, $\bar{A}_k$ jsou samodružnými body involuce I z věty 2. K nevlastnímu bodu L přímky U_iU_j je bod L^h z involuce I určen podmínkou $(L, L^h, U_i, U_j) = -1$ a jemu odpovídající bod L^a v involuci I vztahem $(L^h, L^a, A_k, \bar{A}_k) = -1$. Antipolára l bodu L prochází bodem L^a kolmo k přímce U_iU_j a na ní leží bod U_k. Zvolme přímku x_k tak, aby průsečík $x_k \cap l = U_k$ splňoval větu 4. Jsou-li body U_i, U_j vlastní, zvolíme ji tak, aby bod U_k byl vně kruhu nad průměrem $\overline{U_iU_j}$, neboť bod L^a je vnitřním bodem úsečky $\overline{U_iU_j}$ a tedy přímka l uvnitř pásu, omezeného kolmicemi k přímce U_iU_j jdoucími body U_i, U_j. Je-li bod U_i vlastní, U_j nevlastní, je $L^h = U_i = L^a$ a bod U_k zvolme kdekoli na přímce l. Jsou-li body U_i, U_j nevlastní, je podmínka $x_i \perp x_j$ nutná, jak vyplývá z věty 4. Jako bod U_k zvolme libovolný bod a sestrojme kružnici k se středem U_k a libovolným poloměrem. Dále musí platit $J_iJ_j \parallel p = (k \cap U_iU_k) \cup (k \cap U_jU_k)$, což nastane tehdy, když $\overline{OJ_i} = \overline{OJ_j}$. Je zřejmé, že podmínky jsou též dostačující.

b) Budiž $x_i = x_j$. Obě trojice J_1, J_2, J_3; U_1, U_2, U_3 přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí jsou perspektivní. Střed perspektivity je bod O, osou přímka p. Pro bod $A_k = p \cap x_i$ platí proto podmínka $(O, A_k, J_i, U_i) = (O, A_k, J_j, U_j)$; určíme-li ještě bod $\overline{A}_k$ tak, aby platilo $(A_k, \overline{A}_k, U_i, U_j) = -1$, lze potom postupovat stejně, jako v části a).

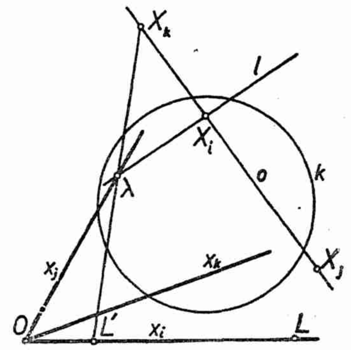
Věta 6. *Mějme dánu kružnici k a přímky x_1, x_2, x_3. Pak přípustná konfigurace s přidruženou kružnicí k a s body J_i, U_i ($i = 1, 2, 3$) na přímce x_i existuje*

a) *pro $x_i \neq x_j$ právě tehdy, když involuce I, definovaná v důkazu věty, na přímce x_i je hyperbolická;*

b) *pro $x_i = x_j$ právě tehdy, jsou-li přímky x_i, x_k antipolárně sdruženy vzhledem ke kružnici k.*



Obr. 2.



Obr. 3.

Důkaz. a) Budiž $x_i \neq x_j$ (obr. 3). Podmínka je nutná: Trojúhelník $U_1U_2U_3$ přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí k je antipolární vzhledem ke kružnici k. Proto prochází každá jeho strana antipólem X_i přímky x_i ($i = 1, 2, 3$) vzhledem ke k. Tyto body leží na antipoláře o bodu O vzhledem ke k. Máme tedy sestrojit trojúhelník, jehož strany procházejí body X_1, X_2, X_3 a který je antipolárním trojúhelníkem kružnice k. Zvolme libovolný bod $L \in x_i$. Budiž l jeho antipolára, $\lambda = x_j \cap 1$, $\lambda X_k \cap x_i = L'$. Tím je definována involuce I párů L, L' na přímce x_i. Kdyby byl $L = L'$, byla by příslušná antipolára l stranou hledaného trojúhelníka a dále by byl $U_j = l \cap x_j$, $U_k = l \cap x_k$, $U_i = L$. Je tedy samodružný bod involuce I hledaným bodem U_i. Aby byl reálný, musí být involuce I hyperbolická. Podrobněji o tom pojednávají práce [1], [2]. Je-li naopak podmínka splněna, sestrojíme trojúhelník $U_1U_2U_3$ a pokračujeme jako v důkazu věty 4.

b) Budiž $x_i = x_j$. Podmínka je nutná. Přímka $x_i = x_j$ přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí k je stranou antipolárního trojúhelníka kružnice k, bod U_k jejím antipólem a tedy přímka x_k ($U_k \in x_k$) antipolárně sdružena s přímkou x_i. Podmínka je dostačující: Bod U_i zvolíme na přímce x_i libovolně, bod U_j sestrojíme tak, aby byl s bodem U_i antipolárně sdružen vzhledem ke k a pokračujeme jako v důkazu věty 4.