Výtah

AUTOMORFISMY USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN

FRANTIŠEK ŠIK, Brno

(Došlo dne 9. června 1956)

1. $\mathfrak{M}$ všude znamená jednoduše uspořádanou množinu, Γ nějakou grupu automorfismů na $\mathfrak{M}$. Grupa Γ vzhledem k přirozenému uspořádání ($f \leqq g \Leftrightarrow f(x) \leqq g(x)$ pro všechna $x \in \mathfrak{M}$) tvoří částečně uspořádanou grupu.

Prvky f, $g \in \Gamma$ nazveme *stejně orientovanými*, jestliže pro libovolné $x \in \mathfrak{M}$ platí: $f(x) > x \Rightarrow g(x) \geqq x$; $g(x) > x \Rightarrow f(x) \geqq x$.

V práci jsou dokázány tyto hlavní věty:

Věta 1. *Transitivní grupa Γ automorfismů na $\mathfrak{M}$ je jednoduše uspořádána, když a jen když konjugované prvky jsou stejně orientovány.*

Je-li $x \in \mathfrak{M}$, $f \in \Gamma$, pak sjednocení (přes všechna přirozená n) intervalů s koncovými body $f^n(x)$, $f^{-n}(x)$ se nazývá *cyklus* automorfismu f. Obsahuje-li cyklus aspoň dva prvky z $\mathfrak{M}$, nazývá se *vlastní*. Grupa Γ je *monocyklická*, jestliže každý prvek $f \in \Gamma$ má nejvýš jeden vlastní cyklus. Pod $\mathfrak{M}(\Gamma)$ rozumíme sjednocení všech vlastních cyklů všech $f \in \Gamma$. Má-li automorfismus f vlastní cyklus A, pak automorfismus g, definovaný $x \in A \Rightarrow g(x) = f(x)$, $x \bar{\in} A \Rightarrow g(x) = x$, se nazývá *fáze* automorfismu f. Grupa Γ automorfismů má vlastnost (α), jestliže s každým prvkem $f \in \Gamma$, $f \neq e$, obsahuje nenulovou mocninu aspoň jedné jeho fáze. Grupa Γ je *divergentní*, existuje-li k libovolným $x, y \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, $x < y$, takové $f \in \Gamma$, že $f(x) \geqq y$.

Věta 3. *Na grupě Γ jsou ekvivalentní následující vlastnosti:* a) *monocykličnost,* b) *archimedovské uspořádání a divergence,* c) *$\mathfrak{M}(\Gamma)$ je cyklem každého automorfismu $\neq e$ z Γ,* d) *jednoduché uspořádání a vlastnost* (α).

2. Množina $\mathfrak{M}$ je *shora* (*zdola*) *slabě úplná* vzhledem ke Γ, když ke každé shora (zdola) omezené množině automorfismů $\{f_\nu\} \subset \Gamma$ existuje v $\mathfrak{M}$ prvek $\bigvee[f_\nu(x)]$ ($\bigwedge[f_\nu(x)]$) pro libovolné $x \in \mathfrak{M}$.

$\mathfrak{M}$ je *slabě úplná* vzhledem ke Γ, je-li shora i zdola slabě úplná vzhledem ke Γ.

Věta 4. *Je-li některá z následujících podmínek* 1, 2, 3 *splněna pro libovolnou shora omezenou část $\{f_\nu\}$ grupy Γ automorfismů na $\mathfrak{M}$, pak jsou splněny i ostatní, Γ je úplná l-grupa a pro zobrazení s a t níže definovaná platí $s = \bigvee f_\nu$, $t = \bigwedge f_\nu^{-1}$.*

1. $\mathfrak{M}$ *je shora slabě úplná vzhledem ke Γ a zobrazení* $s(x) = \bigvee_\nu [f_\nu(x)]$ *je automorfismus na* $\mathfrak{M}$;

2. $\mathfrak{M}$ *je zdola slabě úplná vzhledem ke Γ a zobrazení* $t(x) = \bigwedge_\nu [f_\nu^{-1}(x)]$ *je automorfismus na* $\mathfrak{M}$;

3. $\mathfrak{M}$ *je slabě úplná vzhledem ke Γ a pro libovolné $x \in \mathfrak{M}$ platí*

$$\bigvee_\nu \{f_\nu(\bigwedge_\mu [f_\mu^{-1}(x)])\} \geqq \bigwedge_\nu \{f_\nu^{-1}(\bigvee_\mu [f_\mu(x)])\}.$$

Věta 8. *Ať Γ je transitivní grupa automorfismů s některou z vlastností* a) *až* d) *z věty* 3 (*vlastnost* b) *bez divergence*). *Ať* $\mathfrak{M}$ *obsahuje aspoň dva prvky. Pak Γ je isomorfní s jednoduše uspořádanou aditivní grupou všech celých čísel resp. všech reálných čísel podle toho, má-li* $\mathfrak{M}$ *skok resp. nemá-li skok ani mezeru. V obou případech je Γ (co do uspořádání) podobná s jednoduše uspořádanou množinou* $\mathfrak{M}$.

Důsledek 2. *Jednoduše uspořádaná množina* $\mathfrak{M}$ *bez skoků je podobná s jednoduše uspořádanou množinou všech reálných čísel, když a jen když na* $\mathfrak{M}$ *existuje úplná transitivní l-grupa automorfismů, různá od* (e).

Věta 5. *Jednoduše uspořádaná množina* $\mathfrak{M}$ *se skokem je typu* $\omega^* \oplus \omega$, *když a jen když na* $\mathfrak{M}$ *existuje archimedovsky uspořádaná transitivní grupa automorfismů.*

3. Je-li T systém transitivity grupy Γ, pak pod Γ_T rozumíme grupu všech automorfismů na T indukovaných na T automorfismy grupy Γ a pod Γ^T grupu všech automorfismů z Γ, jež jsou fixní vně T.

Věta 10. *Ať T je systém transitivity grupy Γ automorfismů na* $\mathfrak{M}$. *Ať grupa Δ všech automorfismů na T je abelovská; pak* $\Gamma_T = \Delta$.

Věta 12. *Ať Γ je archimedovsky uspořádaná grupa automorfismů na* $\mathfrak{M}$. *Pak všechny vlastní systémy transitivity T grupy Γ jsou podobné s jednoduše uspořádanou množinou Γ a každá jednoduše uspořádaná grupa Γ_T (pro T vlastní) je isomorfní s jednoduše uspořádanou grupou Γ.*

Věta 14. *Ať Γ je archimedovská l-grupa, ať Γ má právě dva vlastní systémy transitivity T, S. Pak Γ je jednoduše uspořádaná, když a jen když* $\Gamma^T = (e) = \Gamma^S$.