Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

PROJEKTIVNÍ VLASTNOSTI MINIMÁLNÍCH PLOCH S KRUŽNICEMI NORMÁLNÍ KŘIVOSTI

KAREL SVOBODA, Brno

(Došlo dne 17. června 1957) DT: 513.736.36

V této práci jsou vyšetřovány projektivní vlastnosti ploch n-rozměrného prostoru konstantní křivosti, jejichž indikatrice normální křivosti v každém bodě plochy jsou až do určitého řádu kružnicemi se středy v bodě plochy. Jsou odvozeny nutné a postačující podmínky k tomu, aby plocha n-rozměrného projektivního prostoru mohla býti považována za plochu vnořenou do n-rozměrného prostoru konstantní křivosti a mající uvedené metrické vlastnosti. Tyto podmínky vyplývají z vlastností sdružených sítí, které jsou na plochách vytvořeny jejich minimálními křivkami.

Úvahy o těchto plochách navazují na výsledky O. Borůvky, obsažené v pojednání *Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante* a v několika jiných pracích.

1. Úvod

1.1. V n-rozměrném prostoru S_n ($n \geqq 4$) konstantní křivosti c uvažujme pohyblivý bod M a přiřaďme ke každé jeho poloze n jednotkových a navzájem kolmých vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Soustava složená z bodu M a uvedených vektorů tvoří pohyblivý reper a zvláště platí rovnice

$$\begin{aligned} dM &= \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_n\mathbf{e}_n\,, \\ d\mathbf{e}_i &= -c\omega_i M + \omega_{i1}\mathbf{e}_1 + \omega_{i2}\mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_{in}\mathbf{e}_n \\ &(i = 1, 2, \ldots, n)\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

jejichž koeficienty ω jsou lineárními formami v diferenciálech parametrů, na nichž závisí uvažovaný reper. Formy ω vyhovují vzhledem k předpokladům o vektorech $\mathbf{e}$ vztahům

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

a kromě toho splňují vnější kvadratické relace

$$[d\omega_i] = [\omega_1\omega_{1i}] + [\omega_2\omega_{2i}] + \ldots + [\omega_n\omega_{ni}]\,, \tag{1.3}$$

$$[d\omega_{ij}] = [\omega_{i1}\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\omega_{2j}] + \ldots + [\omega_{in}\omega_{nj}] - c[\omega_i\omega_j] \tag{1.3}$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

které jsou rovnicemi struktury prostoru $\mathbf{S}_n$ konstantní křivosti c.

Abychom nemuseli přerušovati pozdější úvahy, uveďme nejprve několik předběžných poznámek a označme za tím účelem znakem $\mathbf{P}_n$ projektivní rozšíření prostoru $\mathbf{S}_n$. Soustava diferenciálních rovnic (1.1) spolu s relacemi (1.2) a rovnicemi struktury (1.3) prostoru $\mathbf{S}_n$ může býti považována za soustavu rovnic, definujících v n-rozměrném projektivním prostoru $\mathbf{P}_n$ geometrické místo bodu M a současně pohyblivý reper tvořený body M, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ prostoru $\mathbf{P}_n$. Vzhledem k tomuto souřadnicovému systému lze vyjádřiti každý bod X prostoru $\mathbf{P}_n$ ve tvaru lineární kombinace

$$X = xM + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n\,, \tag{1.4}$$

jejíž koeficienty jsou souřadnicemi bodu X vzhledem k uvažované soustavě souřadnic.

Je-li $c = 0$, je prostor $\mathbf{S}_n$ eukleidovský a snadno lze odvoditi, že kvadrika $\mathbf{A}$, určená rovnicemi

$$x = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0\,, \tag{1.5}$$

je pevná a že je to absolutní kvadrika, která z projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$ vytváří eukleidovský prostor $\mathbf{S}_n$.

Podobně v případě $c \neq 0$, kdy prostor $\mathbf{S}_n$ je neeukleidovský, lze ukázati, že kvadrika $\mathbf{A}$ o rovnici

$$\frac{1}{c}\,x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \tag{1.6}$$

je pevná a že jest absolutní kvadrikou, která vytváří z projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$ neeukleidovský prostor $\mathbf{S}_n$.

V obou uvedených případech leží body $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ v polární nadrovině bodu M vzhledem ke kvadrice $\mathbf{A}$ (pro $c = 0$ považujeme za polární nadrovinu bodu M nevlastní nadrovinu příslušného eukleidovského prostoru) a jsou po dvou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice $\mathbf{A}$. Zavedeme-li do dalších výpočtů body

$$E_k = \mathbf{e}_{2k-1} + i\mathbf{e}_{2k}\,,\quad E_{-k} = \mathbf{e}_{2k-1} - i\mathbf{e}_{2k} \tag{1.7}$$
$$(i = +\sqrt{-1}\,;\ k = 1, 2, \ldots, [\tfrac{1}{2}n])\,,$$

je patrno, že body E_k (E_{-k}) leží na kvadrice $\mathbf{A}$ a že jsou při každé volbě pohyblivého reperu vzhledem k ní po dvou polárně sdruženy. Odtud plyne, že každý lineární podprostor prostoru $\mathbf{P}_n$, určený libovolnou skupinou bodů E_k (E_{-k}), leží na kvadrice $\mathbf{A}$.

1.2. Buď m přirozené číslo takové, že $2 \leqq m \leqq [\frac{1}{2}n]$. V dalších úvahách *se budeme zabývati plochami prostoru* $\mathbf{S}_n$, *jejichž indikatrice normální křivosti řádu* 1, 2, ..., $m - 1$ *jsou v každém bodě* M *plochy kružnicemi se středy v bodě* M.

Podle výsledků, odvozených O. Borůvkou v pojednání [3], jsou tyto plochy definovány soustavou diferenciálních rovnic (1.1), pro jejíž koeficienty ω platí kromě rovnic (1.2) vztahy

$$
\begin{aligned}
&\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_n = 0 \,, \\
&\omega_{2k-1,2k+1} + i\omega_{2k,2k+1} = R_k(\omega_1 - i\omega_2) \,, \\
&\omega_{2k-1,2k+1} - i\omega_{2k,2k+1} = R_k(\omega_1 + i\omega_2) \,, \\
&\omega_{2k-1,2k+2} + i\omega_{2k,2k+2} = iR_k(\omega_1 - i\omega_2) \,, \\
&\omega_{2k-1,2k+2} - i\omega_{2k,2k+2} = - iR_k(\omega_1 + i\omega_2) \,, \\
&\omega_{2k-1,2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1,n} = 0 \,, \\
&\omega_{2k,2k+3} = \omega_{2k,2k+4} = \ldots = \omega_{2k,n} = 0 \\
&(i = + \sqrt{-1} \,; \ k = 1, 2, \ldots, m - 1 \,; \ R_k > 0) \,,
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

z nichž je třeba vypustit rovnice vzniklé z rovnic napsaných v předposledních dvou řádcích pro $k = m - 1$, jestliže $2m = n$.

Podmínky integrability soustavy diferenciálních rovnic (1.8) jsou vyjádřeny vnějšími kvadratickými relacemi

$$
\begin{gathered}
\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} + i \,.\, \overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0 \,, \\
\left[(\omega_1 + i\omega_2)\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} - i \,.\, \overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0 \,, \\
[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})] = 0 \,, \quad [(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})] = 0 \\
(k = 1, 2, \ldots, m - 1 \,; \ j = 2m + 1 \,, \ 2m + 2, \ldots, n) \,,
\end{gathered}
\tag{1.9}
$$

z nichž je třeba vynechati rovnice napsané v předposledním řádku, jestliže $2m = n$. Tyto rovnice ukazují, že v každém prostoru $\mathbf{S}_n$ konstantní křivosti existují uvažované plochy, a to i v tom případě, že formy některé ze soustav $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ a $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ $(j = 2m + 1, \ 2m + 2, \ldots, n)$, případně formy obou soustav jsou současně identicky rovny nule.

Soustava diferenciálních rovnic (1.8), která definuje analyticky uvažované plochy, má dvě soustavy charakteristických křivek, určených diferenciální rovnicí $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0$. Poněvadž pro lineární element plochy je $\mathrm{d}s^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$, jsou tyto křivky minimálními křivkami na uvažovaných plochách. V dalších úvahách položíme

$$
\Omega_1 = \omega_1 + i\omega_2 \,, \quad \Omega_{-1} = \omega_1 - i\omega_2 \tag{1.10}
$$

a diferenciální rovnici minimálních křivek budeme psát ve tvaru $\Omega_1\Omega_{-1} = 0$.

Poněvadž indikatrix normální křivosti prvního řádu má střed v bodě plochy, je vektor střední křivosti nulový podél celé plochy a uvažované plochy jsou tedy minimálními plochami. Abychom zjednodušili vyjadřování v následujících úvahách, nazveme každou plochu prostoru S_n, jejíž indikatrice normální křivosti řádu 1, 2, ..., $m - 1$ jsou v každém bodě M plochy kružnicemi se středy v bodě M, *minimální plochou s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti* a označíme ji $\boldsymbol{M}$.

Úkolem tohoto pojednání je podat nutné a postačující podmínky k tomu, aby reálná plocha projektivního prostoru P_n mohla býti považována za minimální plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořenou do eukleidovského nebo neeukleidovského prostoru S_n vzniklého z prostoru P_n vhodnou volbou kvadriky A prostoru P_n za absolutní kvadriku prostoru S_n. Úvahy, které je třeba za tím účelem provést, jsou odlišné v obou uvedených případech a budou proto probrány odděleně.

2. Plochy vnořené do eukleidovského prostoru

2.1. Předpokládejme nejprve, že prostor S_n jest eukleidovský ($c = 0$). Každá plocha $\boldsymbol{M}$ je podle předcházejícího analyticky určena soustavou diferenciálních rovnic (1.1), pro jejíž koeficienty platí rovnice (1.2) a (1.8). Užijeme-li označení zavedeného v rovnicích (1.7) a (1.10), můžeme zmíněnou soustavu nahradit ekvivalentní soustavou diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_1 &= -\,i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_{-1} &= i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1 E_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_k &= -\,R_{k-1}\Omega_1 E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-k} &= -\,R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1 E_{-(k+1)}\,,\\
\mathrm{d}E_m &= -\,R_{m-1}\Omega_1 E_{m-1} - i\omega_{2m-1,2m}E_m + \sum_{j=2m+1}^{n}(\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}E_{-m} &= -\,R_{m-1}\Omega_{-1}E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1,2m}E_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n}(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,h} - i\omega_{2m,h})\,E_m - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,h} + i\omega_{2m,h})\,E_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n}\omega_{hj}\mathbf{e}_j
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$$(k = 2,3,\ldots, m - 1;\ h = 2m+1, 2m+2, \ldots, n)\,.$$

Vycházejíce z této soustavy dokážeme nejprve následující vlastnost minimálních křivek na uvažované ploše $\boldsymbol{M}$ eukleidovského prostoru S_n.

Věta 2.1. *Minimální křivky na minimální ploše $\boldsymbol{M}$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do n-rozměrného eukleidovského prostoru S_n, tvoří sdruženou síť, jejíž posloupnost laplaceovských transformací se ukončí v obou směrech po první transformaci Laplaceovým způsobem na křivkách, které leží i se svými* *oskulačními prostory řádu $m - 1$ na absolutní kvadrice* $\boldsymbol{A}$ *prostoru* $\boldsymbol{S}_n$. *Uvedená síť má oba invarianty rovné nule.*

Důkaz. Považujme plochu $\boldsymbol{M}$ za plochu projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$, který je projektivním rozšířením uvažovaného eukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$. Tato plocha je v prostoru $\boldsymbol{P}_n$ analyticky určena soustavou diferenciálních rovnic (2.1).

Ze soustavy (2.1) je však patrno, že bod E_1 (E_{-1}) opisuje křivku $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{E}_{-1}$), jejíž tečna v každém bodě prochází bodem E_2 (E_{-2}), a že je pevný, pohybuje-li se bod M po určité křivce soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$). Zvolíme-li na ploše $\boldsymbol{M}$ libovolnou křivku soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$), prochází tečna každé křivky soustavy $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$), sestrojená v průsečíku se zvolenou křivkou, pevným bodem E_1 (E_{-1}). Odtud plyne, že křivky obou soustav $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ tvoří na ploše $\boldsymbol{M}$ sdruženou síť a že plochy tvořené tečnami křivek $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$) v jejich průsečících s křivkami soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$) jsou kuželovými plochami s vrcholy na křivce $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{E}_{-1}$). Posloupnost laplaceovských transformací uvedené sítě na ploše $\boldsymbol{M}$ se tedy ukončí Laplaceovým způsobem po první transformaci v obou směrech na křivkách $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$, ležících na absolutní kvadrice $\boldsymbol{A}$ prostoru $\boldsymbol{S}_n$.

Oskulační prostor řádu $m - 1$ křivky $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{E}_{-1}$) jest určen body E_1, $dE_1, \ldots$ $\ldots, d^{m-1}E_1$ ($E_{-1}, dE_{-1}, \ldots, d^{m-1}E_{-1}$). Ze soustavy (2.1) je však snadno patrno, že pro $k = 1, 2, \ldots, m - 1$ je bod $d^k E_1$ ($d^k E_{-1}$) lineární kombinací bodů E_1, E_2, $\ldots, E_{k+1}$ ($E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-(k+1)}$), takže tedy uvažovaný oskulační prostor jest určen lineárně nezávislými body $E_1, E_2, \ldots, E_m$ ($E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-m}$), které leží na absolutní kvadrice $\boldsymbol{A}$ a jsou po dvou vzhledem k ní polárně sdruženy. Odtud vychází, že oskulační prostory řádu $m - 1$ uvažovaných křivek leží na kvadrice $\boldsymbol{A}$.

Položíme-li $\Omega_1 = e^p\, du$, $\Omega_{-1} = e^q\, dv$, jest $i\omega_{12} = q_u\, du - p_v\, dv$ a ze soustavy diferenciálních rovnic (2.1) dostaneme po jednoduchém výpočtu $M_{uv} = 0$. Odtud plyne, že invarianty uvažované sítě jsou rovny nule, čímž je důkaz všech tvrzení předcházející věty proveden.

Vzhledem k tomu, že v následujících úvahách o plochách $\boldsymbol{M}$ eukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$ budeme neustále jednati o sdružených sítích majících vlastnost uvedenou v předcházející větě, *nazveme libovolnou sdruženou síť na ploše n-rozměrného projektivního prostoru* $\boldsymbol{P}_n$ *sítí* (U), *jestliže její posloupnost laplaceovských transformací se ukončí v obou směrech po první transformaci Laplaceovým způsobem na křivkách, které leží i se svými oskulačními prostory řádu $m - 1$ na regulární kvadrice* $\boldsymbol{A}$ *lineárního* ($n - 1$)*-rozměrného podprostoru projektivního prostoru* $\boldsymbol{P}_n$. Při přechodu od projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ k eukleidovskému prostoru $\boldsymbol{S}_n$ budeme vždy předpokládati, že právě uvedená kvadrika $\boldsymbol{A}$ jest absolutní kvadrikou eukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$.

Výsledek odvozený v předcházející větě doplníme tím, že ukážeme, že uvažované plochy jsou uvedenými projektivními vlastnostmi dokonale charakterisovány. Za tím účelem rozlišíme příslušné úvahy podle toho, zda pro $j = 2m+1, 2m+2, \dots, n$ všechny formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ a podobně všechny formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ nejsou nebo jsou současně rovny nule. Dostaneme tím tři navzájem odlišné druhy uvažovaných ploch, jejichž vlastnosti vyšetříme v následujících úvahách.

2.2. Předpokládejme nejprve, že pro všechna $j = 2m+1, 2m+2, \dots, n$ nejsou ani formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$, ani formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule. Vzhledem k předcházejícímu předpokladu a vzhledem k tomu, že formy ω_{ij} $(i, j = 2m+1, 2m+2, \dots, n)$ nejsou podrobeny žádným podmínkám, nemůže býti dimense n prostoru $\mathbf{S}_n$ menší než $2m+1$. Označme $\boldsymbol{M}_1$ každou minimální plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, která je v n-rozměrném eukleidovském prostoru $\mathbf{S}_n$ určena za uvedeného předpokladu soustavou diferenciálních rovnic (2.1). Pro tyto plochy dokážeme následující větu, podávající jejich charakteristické projektivní vlastnosti.

Věta 2.2. *Plocha n-rozměrného projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$ může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do n-rozměrného eukleidovského prostoru $\mathbf{S}_n$, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť (U). Křivky, které vzniknou po první transformaci sítě (U) v obou směrech, jsou libovolné až na podmínku, že žádná z nich není vnořena do lineárního podprostoru dimense $m - 1$ prostoru $\mathbf{P}_n$.*

Důkaz. Ve větě 2.1 jsme dokázali, že na každé ploše s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do eukleidovského prostoru $\mathbf{S}_n$, existuje sdružená síť (U), vytvořená minimálními křivkami uvažované plochy. Důkaz zmíněné věty je třeba doplniti v tom směru, že křivky $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ nejsou za daných předpokladů vnořeny do lineárních podprostorů dimense $m - 1$. Vskutku, na základě rovnic (2.1) je patrno, že bod $\mathrm{d}^m E_1$ $(\mathrm{d}^m E_{-1})$ není lineární kombinací pouze bodů $E_1, E_2, \dots, E_m (E_{-1}, E_{-2}, \dots, E_{-m})$, nýbrž závisí také na bodech $\mathbf{e}_{2m+1}, \mathbf{e}_{2m+2}, \dots, \mathbf{e}_n$. Odtud plyne, že oskulační prostory řádu m křivek $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ mají dimensi větší než $m - 1$, takže uvedené křivky nejsou vnořeny do lineárních podprostorů dimense $m - 1$.

Předcházející úvahou je doplněn důkaz věty 2.1, čímž bylo úplně dokázáno, že na každé uvažované ploše $\boldsymbol{M}_1$ eukleidovského prostoru existuje sdružená síť (U) mající uvedené vlastnosti. Předpokládejme nyní naopak, že na ploše projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$ existuje sdružená síť (U) s výše uvedenými vlastnostmi, a ukažme, že lze tuto plochu považovat za plochu $\boldsymbol{M}_1$ eukleidovského prostoru $\mathbf{S}_n$.

Přiřaďme ke každému bodu M projektivního prostoru $\mathbf{P}_n$ pohyblivý reper tvořený lineárně nezávislými body $M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Pro každý bod X prostoru $\mathbf{P}_n$ pak platí vztah (1.4) a zvláště je

$$\mathrm{d}M = \omega_0 M + \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \omega_n \mathbf{e}_n ,$$

$$
\mathrm{d}\mathbf{e}_i = \omega_{i0} M + \omega_{i1}\mathbf{e}_1 + \omega_{i2}\mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_{in}\mathbf{e}_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{2.2}
$$

Z těchto rovnic plyne, že bod X nezávisí na volbě reperu tehdy a jen tehdy, když jeho souřadnice vyhovují diferenciálním rovnicím

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x + x\omega_0 + x_1\omega_{10} + x_2\omega_{20} + \ldots + x_n\omega_{n0} &= 0\,, \\
\mathrm{d}x_i + x\omega_i + x_1\omega_{1i} + x_2\omega_{2i} + \ldots + x_n\omega_{ni} &= 0 \\
(i = 1, 2, \ldots, n)\,. &
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Vyjádříme-li požadavek, že regulární kvadrika $\boldsymbol{A}$ lineárního $(n - 1)$-rozměrného podprostoru prostoru $\boldsymbol{P}_n$ je v každém z uvažovaných reperů vyjádřena rovnicemi (1.5), dostaneme vztahy

$$
\omega_{i0} = 0\,, \quad \omega_{ii} = \omega_0\,, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{2.4}
$$

k nimž lze připojiti rovnici $\omega_0 = 0$, která vyjadřuje, že determinant utvořený ze souřadnic základních bodů reperu má konstantní hodnotu.

Zvolme reper přiřazený k uvažované ploše tak, aby body $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ležely v tečné rovině plochy v bodě M. Tato volba je vyjádřena rovnicemi

$$
\omega_j = 0 \qquad (j = 3, 4, \ldots, n)\,, \tag{2.5}
$$

z nichž na základě rovnic struktury projektivního prostoru dostaneme

$$
[\omega_1\omega_{1j}] + [\omega_2\omega_{2j}] = 0 \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,. \tag{2.6}
$$

Předpokládejme, že sdružená síť křivek na ploše je tvořena křivkami, které mají v označení (1.10) rovnice $\Omega_1 = 0$, $\Omega_{-1} = 0$, a označme E_1 (E_{-1}) laplaceovskou transformaci této sítě ve směru křivek soustavy $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$). Bod E_1 (E_{-1}) leží v tečné rovině plochy v bodě M a je proto lineární kombinací bodů M, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$; poněvadž však podle předpokladu o síti (U) leží na kvadrice $\boldsymbol{A}$, je lineárně závislý na bodu $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ ($\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$). Můžeme proto jednoduše položiti $E_1 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$, $E_{-1} = \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$ a z rovnic (2.2) pak dostaneme podle (2.4) a zavedených označení

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}E_1 &= -\, i\omega_{12}E_1 + (\omega_{13} + i\omega_{23})\,\mathbf{e}_3 + \ldots + (\omega_{1n} + i\omega_{2n})\,\mathbf{e}_n\,, \\
\mathrm{d}E_{-1} &= i\omega_{12}E_{-1} + (\omega_{13} - i\omega_{23})\,\mathbf{e}_3 + \ldots + (\omega_{1n} - i\omega_{2n})\,\mathbf{e}_n\,.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Vyjádříme nyní předpoklad, že posloupnost laplaceovských transformací uvažované sítě (U) se ukončí v obou směrech po první transformaci Laplaceovým způsobem. K tomu je nutné a stačí, aby bod E_1 (E_{-1}) opisoval křivku $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{E}_{-1}$) a aby byl pevný, když se bod M pohybuje na ploše po křivce soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$). Nutné a postačující podmínky pro to jsou vyjádřeny rovnicemi

$$
\omega_{1j} + i\omega_{2j} = a_{1j}\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{1j} - i\omega_{2j} = b_{1j}\Omega_1 \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,, \tag{2.8}
$$

které vedou na základě rovnic struktury projektivního prostoru k relacím

$$\left.\begin{array}{l}[\Omega_{-1}\,(\mathrm{d}a_{1j} + 2ia_{1j}\omega_{12} + \sum\limits_{\nu=3}^{n} a_{1\nu}\omega_{\nu j})] = 0\,, \\ [\Omega_1(\mathrm{d}b_{1j} - 2ib_{1j}\omega_{12} + \sum\limits_{\nu=3}^{n} b_{1\nu}\omega_{\nu j})] = 0\end{array}\right. \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,. \tag{2.9}$$

V těchto rovnicích nejsou všechny funkce a_{1j} (b_{1j}) současně rovny nule, neboť v opačném případě by bod E_1 (E_{-1}) byl pevný a neopisoval by křivku.

Z rovnic (2.7) a (2.8) je patrno, že tečna v bodě $E_1(E_{-1})$ křivky $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{E}_{-1})$ obsahuje bod $E_2(E_{-2})$, který je lineárně závislý na bodu $a_{13}\mathbf{e}_3 + a_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots$ $\ldots + a_{1n}\mathbf{e}_n$ $(b_{13}\mathbf{e}_3 + b_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots + b_{1n}\mathbf{e}_n)$. Poněvadž bod E_2 (E_{-2}) je kromě toho polárně sdružen s bodem $E_1(E_{-1})$ vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$, je nutná a postačující podmínka k tomu, aby tečna křivky $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{E}_{-1})$ ležela na kvadrice $\boldsymbol{A}$, vyjádřena požadavkem, aby bod E_2 (E_{-2}) ležel na kvadrice $\boldsymbol{A}$. To však nastane tehdy a jen tehdy, když

$$a_{13}^2 + a_{14}^2 + \ldots + a_{1n}^2 = 0\,, \quad b_{13}^2 + b_{14}^2 + \ldots + b_{1n}^2 = 0\,. \tag{2.10}$$

Na základě relací (2.9) je však patrno, že lze vhodnou volbou pohyblivého reperu přiřazeného k ploše dosáhnouti toho, aby předcházející rovnice (2.10) byly splněny hodnotami

$$\begin{array}{lll} a_{13} = a_1\,, & a_{14} = \quad ia_1\,, & a_{15} = a_{16} = \ldots = a_{1n} = 0\,, \\ b_{13} = b_1\,, & b_{14} = -\,ib_1\,, & b_{15} = b_{16} = \ldots = b_{1n} = 0\,, \end{array} \tag{2.11}$$

při čemž $a_1 > 0$, $b_1 > 0$. Při této volbě reperu je bod E_2 (E_{-2}) závislý na bodu $\mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_4$ ($\mathbf{e}_3 - i\mathbf{e}_4$) a pro jednoduchost lze předpokládat, že $E_2 = \mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_4$ ($E_{-2} = \mathbf{e}_3 - i\mathbf{e}_4$). Z rovnic (2.9) pro $j = 3,4$ pak snadno vychází, že poměr funkcí a_1 a b_1 není invariantní, takže lze položiti

$$a_1 = b_1 = R_1\,. \tag{2.12}$$

Vhodnou volbou reperu přiřazeného k ploše lze tedy podle (2.11) a (2.12) dosáhnouti toho, že relace (2.8) a (2.9) mají tvar

$$\begin{gathered} \omega_{13} + i\omega_{23} = R_1\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{13} - i\omega_{23} = R_1\Omega_1\,, \\ \omega_{14} + i\omega_{24} = iR_1\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{14} - i\omega_{24} = -\,iR_1\Omega_1\,, \\ \omega_{15} = \omega_{16} = \ldots = \omega_{1n} = 0\,, \quad \omega_{25} = \omega_{26} = \ldots = \omega_{2n} = 0\,, \\ \left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + i\,.\,\overline{2\omega_{12} - \omega_{34}}\right)\right] = 0\,, \quad \left[\Omega_1\left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} - i\,.\,\overline{2\omega_{12} - \omega_{34}}\right)\right] = 0\,, \\ [\Omega_{-1}(\omega_{3j} + i\omega_{4j})] = 0\,, \quad [\Omega_1(\omega_{3j} - i\omega_{4j})] = 0 \\ (j = 5, 6, \ldots, n)\,. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Při téže volbě reperu přiřazeného k ploše a při zavedeném označení má pak soustava (2.2) tvar

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_1 &= -\,i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_{-1} &= i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1 E_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_2 &= -\,R_1\Omega_1 E_1 - i\omega_{34}E_2 + \sum_{j=5}^{n}(\omega_{3j} + i\omega_{4j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}E_{-2} &= -\,R_1\Omega_{-1}E_{-1} + i\omega_{34}E_{-2} + \sum_{j=5}^{n}(\omega_{3j} - i\omega_{4j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= -\,\tfrac{1}{2}(\omega_{3h} - i\omega_{4h})\,E_2 - \tfrac{1}{2}(\omega_{3h} + i\omega_{4h})\,E_{-2} + \sum_{j=5}^{n}\omega_{hj}\mathbf{e}_j\\
&\qquad (h = 5, 6, \ldots, n)\,.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Předcházející rovnice (2.13) vyjadřují předpokládané vlastnosti sítě (U) na uvažované ploše pro $m = 2$. Poněvadž křivky $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ jsou podle předpokladu vnořeny do podprostoru alespoň dvojrozměrného, nemohou býti v rovnicích (2.14) ani formy $\omega_{3j} + i\omega_{4j}$, ani formy $\omega_{3j} - i\omega_{4j}$ současně rovny nule pro všechna $j = 5, 6, \ldots, n$. Srovnáním rovnic (2.14) s rovnicemi (2.1) zjistíme, že výše uvedené tvrzení je pro $m = 2$ správné, takže uvažovaná plocha prostoru $\boldsymbol{P}_n$ může býti považována v případě $m = 2$ za plochu $\boldsymbol{M}_1$ s jednou kružnicí normální křivosti, vnořenou do eukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$.

Abychom dokázali uvedenou větu zcela obecně, postupujme dále metodou úplné indukce. Buď tedy $m > 2$ a předpokládejme, že křivky $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$, které vzniknou po první transformaci sdružené sítě (U) na uvažované ploše, leží i se svými oskulačními prostory řádu $m - 2$ na kvadrice $\boldsymbol{A}$ a nejsou vnořeny do $(m - 2)$-rozměrného lineárního podprostoru projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$. Předpokládejme dále, že tyto vlastnosti jsou analyticky vyjádřeny při vhodné volbě pohyblivého reperu přiřazeného k ploše rovnicemi (2.4), (2.5) a soustavou diferenciálních rovnic

$$
\begin{gathered}
\omega_{2k-1,2k+1} + i\omega_{2k,2k+1} = R_k\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2k-1,2k+1} - i\omega_{2k,2k+1} = R_k\Omega_1\,,\\
\omega_{2k-1,2k+2} + i\omega_{2k,2k+2} = iR_k\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2k-1,2k+2} - i\omega_{2k,2k+2} = -\,iR_k\Omega_1\,,\\
\omega_{2k-1,2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1,n} = 0\,,\\
\omega_{2k,2k+3} = \omega_{2k,2k+4} = \ldots = \omega_{2k,n} = 0\\
(k = 1, 2, \ldots, m - 2)\,,
\end{gathered}
\tag{2.15}
$$

které mají podle rovnic struktury projektivního prostoru za následek vnější relace

$$
\begin{gathered}
\left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} + i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,,\\
\left[\Omega_{1}\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} - i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,,\\
[\Omega_{-1}(\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j})] = 0\,, \ [\Omega_1(\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j})] = 0\\
(k = 1, 2, \ldots, m - 2;\ j = 2m - 1, 2m, \ldots, n)\,.
\end{gathered}
\tag{2.16}
$$

Volba pohyblivého reperu byla při tom provedena tak, že oskulační prostor řádu $m - 2$ křivky $\boldsymbol{E}_1$ ($\boldsymbol{E}_{-1}$) jest určen, užijeme-li označení zavedeného v (1.7), lineárně nezávislými body $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}$ ($E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-(m-1)}$), takže soustava rovnic (2.2) má tvar

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_1 &= -\,i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_{-1} &= i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1 E_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_k &= -\,R_{k-1}\Omega_1 E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-k} &= -\,R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1 E_{-(k+1)}\,,\\
\mathrm{d}E_{m-1} &= -\,R_{m-2}\Omega_1 E_{m-2} - i\omega_{2m-3,2m-2}E_{m-1} +\\
&\quad + \sum_{j=2m-1}^{n} (\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}E_{-(m-1)} &= -\,R_{m-2}\Omega_{-1}E_{-(m-2)} + i\omega_{2m-3,2m-2}E_{-(m-1)} +\\
&\quad + \sum_{j=2m-1}^{n} (\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= -\,\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-3,h} - i\omega_{2m-2,h})\,E_{m-1} -\\
&\quad - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-3,h} + i\omega_{2m-2,h})\,E_{-(m-1)} + \sum_{j=2m-1}^{n} \omega_{hj}\mathbf{e}_j\\
&\quad (k = 2, 3, \ldots, m-2\,;\ h = 2m-1\,,\ 2m, \ldots, n)\,.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Podle předpokladu nejsou v soustavě (2.17) pro $j = 2m - 1, 2m, \ldots, n$ ani formy $\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j}$, ani formy $\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j}$ současně rovny nule, neboť v opačném případě by alespoň jedna z obou křivek $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ byla obsažena v podprostoru dimense $m - 2$.

Ukažme nyní, že za uvedených předpokladů leží oskulační prostory řádu $m - 1$ křivek $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ na kvadrice $\boldsymbol{A}$. Z rovnic napsaných v předposledních dvou řádcích (2.16) předně plynou vztahy

$$
\begin{aligned}
\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j} &= a_{m-1,j}\Omega_{-1}\,,\\
\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j} &= b_{m-1,j}\Omega_1
\end{aligned}
\quad (j = 2m-1\,,\ 2m, \ldots, n)\,,
\tag{2.18}
$$

v nichž ani funkce $a_{m-1,j}$, ani funkce $b_{m-1,j}$ nejsou současně rovny nule. Ze soustavy (2.17) je pak patrno, že oskulační prostor řádu $m - 1$ křivky $\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{E}_{-1})$ obsahuje kromě bodů $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}$ ($E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-(m-1)}$), určujících její oskulační prostor řádu $m - 2$, bod $E_m(E_{-m})$, který je lineárně závislý na bodu $a_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + a_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots + a_{m-1,n}\mathbf{e}_n$ ($b_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + b_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots + b_{m-1,n}\mathbf{e}_n$), a že právě uvedené body jsou lineárně nezávislé. Bod E_m (E_{-m}) je však polárně sdružen vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$ s každým z bodů $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}$ ($E_{-1}, E_{-2}, \ldots, E_{-(m-1)}$). Oskulační prostory řádu $m - 1$ uvažovaných křivek budou tedy ležeti na uvedené kvadrice tehdy a jen tehdy, když body E_m a E_{-m} budou body kvadriky $\boldsymbol{A}$, a to nastane právě tehdy, když

$$a^2_{m-1,2m-1} + a^2_{m-1,2m} + \ldots + a^2_{m-1,n} = 0\,,$$
$$b^2_{m-1,2m-1} + b^2_{m-1,2m} + \ldots + b^2_{m-1,n} = 0\,. \tag{2.19}$$

Rovnice (2.18) však vedou na základě rovnic struktury projektivního prostoru k vnějším kvadratickým relacím

$$[\Omega_{-1}\,(\mathrm{d}a_{m-1,j} + ia_{m-1,j}\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2m-3,2m-2}} + \sum_{\nu=2m-1}^{n} a_{m-1,\nu}\omega_{\nu j})] = 0\,,$$
$$[\Omega_1\,(\mathrm{d}b_{m-1,j} - ib_{m-1,j}\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2m-3,2m-2}} + \sum_{\nu=2m-1}^{n} b_{m-1,\nu}\omega_{\nu j})] = 0$$
$$(j = 2m - 1\,, 2m, \ldots, n)\,. \tag{2.20}$$

Z těchto rovnic je patrno, že lze vhodnou volbou pohyblivého reperu dosáhnouti toho, že rovnice (2.19) jsou splněny hodnotami

$$a_{m-1,2m-1} = a_{m-1}\,,\ a_{m-1,2m} = ia_{m-1}\,,\ a_{m-1,2m+1} = \ldots = a_{m-1,n} = 0\,,$$
$$b_{m-1,2m-1} = b_{m-1}\,,\ b_{m-1,2m} = -\,ib_{m-1}\,,\ b_{m-1,2m+1} = \ldots = b_{m-1,n} = 0\,, \tag{2.21}$$

při čemž $a_{m-1} > 0$, $b_{m-1} > 0$. Při této volbě reperu přiřazeného k ploše je bod E_m (E_{-m}) lineárně závislý na bodu $\mathbf{e}_{2m-1} + i\mathbf{e}_{2m}$ ($\mathbf{e}_{2m-1} - i\mathbf{e}_{2m}$) a pro jednoduchost můžeme tedy položiti $E_m = \mathbf{e}_{2m-1} + i\mathbf{e}_{2m}$, $E_{-m} = \mathbf{e}_{2m-1} - i\mathbf{e}_{2m}$. Rovnice (2.20) pro $j = 2m - 1$, $2m$ pak ukazují, že poměr funkcí a_{m-1} a b_{m-1} není invariantní, takže lze předpokládati, že

$$a_{m-1} = b_{m-1} = R_{m-1}\,. \tag{2.22}$$

Vzhledem k (2.21) a (2.22) se rovnice (2.18) zjednoduší na tvar

$$\omega_{2m-3,2m-1} + i\omega_{2m-2,2m-1} = R_{m-1}\Omega_{-1}\,,\quad \omega_{2m-3,2m-1} - i\omega_{2m-2,2m-1} = R_{m-1}\Omega_1\,,$$
$$\omega_{2m-3,2m} + i\omega_{2m-2,2m} = iR_{m-1}\Omega_{-1}\,,\quad \omega_{2m-3,2m} - i\omega_{2m-2,2m} = -\,iR_{m-1}\Omega_1\,,$$
$$\omega_{2m-3,2m+1} = \omega_{2m-3,2m+2} = \ldots = \omega_{2m-3,n} = 0\,, \tag{2.23}$$
$$\omega_{2m-2,2m+1} = \omega_{2m-2,2m+2} = \ldots = \omega_{2m-2,n} = 0$$

a mají podle (2.20) za podmínky integrability vztahy

$$\left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_{m-1}}{R_{m-1}} + i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2m-3,2m-2} - \omega_{2m-1,2m}}\right)\right] = 0\,,$$
$$\left[\Omega_1\left(\frac{\mathrm{d}R_{m-1}}{R_{m-1}} - i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2m-3,2m-2} - \omega_{2m-1,2m}}\right)\right] = 0\,, \tag{2.24}$$
$$[\Omega_{-1}(\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})] = 0\,,\quad [\Omega_1(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})] = 0$$
$$(j = 2m + 1,\, 2m + 2, \ldots, n)\,.$$

Předcházející rovnice (2.23) určují při vhodné volbě reperu analytické vyjádření předpokladu o oskulačních prostorech řádu $m - 1$ křivek $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ a dávají spolu se soustavou rovnic (2.15) rovnice (1.8), takže uvažované plochy projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ jsou určeny soustavou diferenciálních rovnic, která splývá se soustavou (2.1). Poněvadž křivky $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_{-1}$ nejsou podle předpokladu vnořeny do podprostorů dimense $m - 1$, nemohou býti ani formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$, ani formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule pro všechna $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$.

Z předcházejícího tedy plyne, že každá plocha projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$, na níž existuje sdružená síť (U) uvažovaných vlastností, je v eukleidovském prostoru $\boldsymbol{S}_n$, jehož absolutní kvadrikou je výše uvedená kvadrika $\boldsymbol{A}$, plochou $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti. Tím je důkaz věty 2.2 proveden.

Nejjednodušší zvláštní případ uvažovaných ploch s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti dostaneme za předpokladu, že daná plocha $\boldsymbol{M}_1$ je vnořena do prostoru dimense $n = 2m + 1$. Pro $m = 2$ obsahuje pak předcházející věta 2.2 výsledek, odvozený O. Borůvkou v pojednání [2], o minimálních plochách pětirozměrného eukleidovského prostoru, jejichž indikatrix normální křivosti v každém bodě plochy je kružnicí.

2.3. Obraťme se nyní k druhému z případů uvedených na konci odstavce 2.1 a předpokládejme vzhledem k souměrnosti soustavy (2.1), že pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ jsou všechny formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ rovny nule, zatím co všechny formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně nevymizí. Označme v dalším $\boldsymbol{M}_2$ každou minimální plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, která je v n-rozměrném eukleidovském prostoru $\boldsymbol{S}_n$ určena soustavou diferenciálních rovnic (2.1), jejíž koeficienty splňují výše uvedený předpoklad. Také v tomto případě je dimense n prostoru $\boldsymbol{S}_n$ nutně větší než $2m$. O uvedených plochách dokážeme nyní následující větu.

Věta 2.3. *Plocha n-rozměrného projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do n-rozměrného eukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť (U). Křivky, které vzniknou po první transformaci sítě (U) v obou směrech, jsou libovolné až na podmínku, že právě jedna z nich je vnořena do lineárního podprostoru dimense $m - 1$ projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$.*

Podle definice sítě (U) jest uvedený lineární podprostor dimense $m - 1$, v němž jest obsažena jedna z obou zmíněných křivek, oskulačním prostorem řádu $m - 1$ ve všech bodech této křivky.

Důkaz. Podle věty 2.1 existuje na každé ploše s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do eukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$, sdružená síť (U) určená minimálními křivkami uvažované plochy. Položíme-li v soustavě (2.1) $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j} = 0$ pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$, jest okamžitě patrno, že oskulační prostory řádu vyššího než $m - 1$ křivky $\boldsymbol{E}_1$ mají vesměs dimensi $m - 1$, a odtud plyne, že křivka $\boldsymbol{E}_1$ je vnořena do lineárního podprostoru dimense $m - 1$ prostoru $\boldsymbol{P}_n$. Z téže soustavy rovnic současně plyne, že pro křivku $\boldsymbol{E}_{-1}$ zůstává v platnosti úvaha provedená na začátku důkazu věty 2.2. Vidíme tedy, že každá plocha $\boldsymbol{M}_2$ eukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$ má projektivní vlastnosti uvedené v dokazované větě.

Abychom kromě toho dokázali opačné tvrzení předcházející věty, použijme postupu druhé části důkazu věty 2.2, kde jsme odvodili, že předpokládané vlastnosti ploch projektivního prostoru P_n, pokud jednají o sdružené síti (U), lze při vhodné volbě reperu přiřazeného k ploše vyjádřiti analyticky soustavou diferenciálních rovnic (1.8), takže uvažované plochy jsou pak určeny soustavou diferenciálních rovnic tvaru (2.1). Učiníme-li ve smyslu předcházející věty předpoklad, že z obou křivek E_1 a E_{-1} právě křivka E_1 je vnořena do $(m - 1)$-rozměrného podprostoru prostoru P_n, musí míti její oskulační prostory řádu vyššího než $m - 1$ vesměs dimensi $m - 1$. To však podle (2.1) nastane jen tehdy, když pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ bude $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j} = 0$. Poněvadž křivka E_{-1} splňuje týž předpoklad jako příslušná křivka ve větě 2.2, nemohou býti formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule pro všechna uvažovaná $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$.

Skutečně tedy každá plocha projektivního prostoru P_n, mající uvedené projektivní vlastnosti, může býti považována za plochu M_2 eukleidovského prostoru S_n.

Předcházející věta platí pro každé $n \geqq 2m + 1$ a zvláště vyjadřuje pro plochy vnořené do pětirozměrného prostoru okolnost, že právě jedna z křivek, které vzniknou po první transformaci sítě (U), je přímkou. V tomto případě jsou tedy předcházející větou doplněny výsledky pojednání zmíněného na konci odstavce 2.2.

2.3. Všimněme si nakonec ještě ploch, které jsou v eukleidovském prostoru S_n určeny soustavou (2.1) a předpokladem, že pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots$ $\ldots, n$ jsou jak formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$, tak i formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule. Vzhledem k tomuto předpokladu lze souditi, že pro dimensi n prostoru S_n je v tomto případě $n \geqq 2m$. V následující větě označíme M_3 libovolnou minimální plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, určenou v n-rozměrném eukleidovském prostoru S_n soustavou diferenciálních rovnic (2.1) s předepsanými podmínkami o výše uvedených formách.

Věta 2.4. *Plocha n-rozměrného projektivního prostoru* P_n *může býti definována jako minimální plocha* M_3 *s* $m - 1$ *kružnicemi normální křivosti, vnořená do n-rozměrného eukleidovského prostoru* S_n, *tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť* (U). *Křivky, které vzniknou po první transformaci sítě* (U) *v obou směrech jsou libovolné až na podmínku, že obě jsou vnořeny do lineárních podprostorů dimense* $m - 1$ *projektivního prostoru* P_n.

Podle definice sítě (U) je každý z uvedených lineárních podprostorů dimense $m - 1$, obsahujících příslušnou křivku, oskulačním prostorem řádu $m - 1$ ve všech bodech této křivky.

Důkaz. Správnost obou tvrzení této věty se zjistí tím, že se důkazy vět 2.1 a 2.2 doplní, pokud se týká uvedených vlastností křivek E_1 a E_{-1}, týmž způsobem, jehož bylo použito při důkazu věty 2.3 v případě křivky E_1.

Předcházející věta zahrnuje jako nejjednodušší případ plochy M_3 s $m-1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do eukleidovského prostoru dimense $n = 2m$. Příslušné vlastnosti těchto ploch, obsažené ve větě 2.4, byly odvozeny O. Borůvkou v pojednání [3].

3. Plochy vnořené do neeukleidovského prostoru

3.1. Obraťme se nyní k zjištění některých vlastností ploch $\boldsymbol{M}$ za předpokladu, že prostor $\boldsymbol{S}_n$ je neeukleidovský ($c \neq 0$). Každá taková plocha je podle dřívějších poznámek analyticky určena soustavou diferenciálních rovnic (1.1) s koeficienty vyhovujícími rovnicím (1.2) a (1.8). Zaveďme opět označení (1.7) a (1.10) a nahraďme uvedenou soustavu ekvivalentní soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
dM &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}\,,\\
dE_1 &= -c\Omega_1 M - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,,\\
dE_{-1} &= -c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1 E_{-2}\,,\\
dE_k &= -R_{k-1}\Omega_1 E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,,\\
dE_{-k} &= -R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1 E_{-(k+1)}\,,\\
dE_m &= -R_{m-1}\Omega_1 E_{m-1} - i\omega_{2m-1,2m}E_m + \sum_{j=2m+1}^{n}(\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
dE_{-m} &= -R_{m-1}\Omega_{-1}E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1,2m}E_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n}(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
d\mathbf{e}_h &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,h} - i\omega_{2m,h})\,E_m - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,h} + i\omega_{2m,h})\,E_{-m} + \sum_{j=2m+1}^{n}\omega_{hj}\mathbf{e}_j
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$(k = 2, 3, \ldots, m-1\,;\ h = 2m+1\,,\ 2m+2, \ldots, n)\,.$$

Užitím této soustavy rovnic odvodíme nejprve následující větu jednající o minimálních křivkách na uvažované ploše $\boldsymbol{M}$ neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$. Použijeme v ní rčení, že dvě laplaceovské transformace dané sdružené sítě jsou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice, v tom smyslu, že každé dva odpovídající si body uvedených transformací jsou vzhledem ke kvadrice polárně sdruženy.

Věta 3.1. *Minimální křivky na minimální ploše $\boldsymbol{M}$ s $m-1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do n-rozměrného neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$, tvoří sdruženou síť, jejíž první, druhé, ..., m-té laplaceovské transformace v obou směrech leží na absolutní kvadrice $\boldsymbol{A}$ prostoru $\boldsymbol{S}_n$ tak, že laplaceovské transformace, vzniklé z uvedené sítě stejným počtem transformací v obou směrech, jsou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$ se všemi laplaceovskými transformacemi počáteční sítě, které jsou v její posloupnosti laplaceovských transformací obsaženy mezi zmíněnými transformacemi. Uvedená síť má oba invarianty stejné.*

Důkaz. Považujme plochu $\boldsymbol{M}$ za plochu projektivního prostoru P_n, který vznikne z neeukleidovského prostoru S_n jeho projektivním rozšířením. Tato plocha je podle úvodních poznámek určena v prostoru P_n soustavou diferenciálních rovnic (3.1).

Ze soustavy (3.1) je patrno, že body M, E_k, E_{-k} $(k = 1, 2, \ldots, m - 1)$ opisují plochy, které označíme $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{E}_k$, $\boldsymbol{E}_{-k}$, a že každým bodem libovolné z těchto ploch prochází právě jedna křivka každé ze soustav $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$. Z téže soustavy plyne, že geometrickým místem bodu E_m (E_{-m}) je buď plocha nebo křivka $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$ podle toho, zda formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ $(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})$ nejsou nebo jsou pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ současně rovny nule. Poněvadž bližší rozlišení provedeme až v následujících odstavcích, budeme pro jednoduchost mluviti o plochách $\boldsymbol{E}_m$ a $\boldsymbol{E}_{-m}$.

Zvolme na ploše $\boldsymbol{M}$ libovolnou křivku soustavy $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ a uvažujme na ploše $\boldsymbol{E}_1$ $(\boldsymbol{E}_{-1})$ křivku $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$, která jí odpovídá v jednojednoznačné příbuznosti mezi plochami $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{E}_1$ $(\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{E}_{-1})$. Pohybuje-li se bod M po zvolené křivce, jest jeho spojnice s příslušným bodem E_1 (E_{-1}) tečnou v bodě E_1 (E_{-1}) uvažované křivky na ploše $\boldsymbol{E}_1$ $(\boldsymbol{E}_{-1})$. Na druhé straně je z první rovnice soustavy (3.1) patrno, že tato přímka je tečnou v bodě M ke křivce soustavy $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$, která tímto bodem prochází. Odtud plyne, že tečny křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$ plochy $\boldsymbol{M}$ v průsečících se zvolenou křivkou soustavy $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ vyplňují rozvinutelnou plochu, jejíž hranou vratu jest odpovídající křivka soustavy $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ na ploše $\boldsymbol{E}_1$ $(\boldsymbol{E}_{-1})$. Soustavy křivek $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ tedy tvoří na ploše $\boldsymbol{M}$ sdruženou síť a plocha $\boldsymbol{E}_1$ $(\boldsymbol{E}_{-1})$ je laplaceovskou transformací plochy $\boldsymbol{M}$ ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$. Poněvadž body E_1 a E_{-1} leží na kvadrice A a jsou vzhledem k ní polárně sdruženy s bodem M, mají první laplaceovské transformace počáteční sítě vlastnosti uvedené v předcházející větě.

Abychom dokázali další tvrzení o uvažované síti na ploše $\boldsymbol{M}$, zvolme libovolné přirozené číslo i tak, že $2 \leqq i \leqq m$, a připomeňme, že podle (1.9) jsou formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ $(\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j})$ pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ lineárně závislé na Ω_{-1} (Ω_1). Předpokládejme, že $(i - 1)$-ní laplaceovské transformace sdružené sítě na ploše $\boldsymbol{M}$ mají vlastnosti uvedené ve větě 3.1, a dokažme, že tyto vlastnosti zůstávají v platnosti také pro i-té laplaceovské transformace.

Uvažujme za tím účelem na ploše $\boldsymbol{E}_{i-1}$ $(\boldsymbol{E}_{-(i-1)})$ určitou křivku soustavy $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ a jí odpovídající křivku na ploše $\boldsymbol{E}_i$ $(\boldsymbol{E}_{-i})$. Pohybuje-li se bod E_{i-1} $(E_{-(i-1)})$ po zvolené křivce, je přímka spojující bod E_{i-1} $(E_{-(i-1)})$ s odpovídajícím bodem E_i (E_{-i}) tečnou v bodě $E_i (E_{-i})$ křivky opsané tímto bodem a současně tečnou v bodě E_{i-1} $(E_{-(i-1)})$ ke křivce soustavy $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$, procházející na ploše $\boldsymbol{E}_{i-1}$ $(\boldsymbol{E}_{-(i-1)})$ uvažovaným bodem. Odtud je patrno, že plochy tečen křivek $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ na ploše $\boldsymbol{E}_i$ $(\boldsymbol{E}_{-i})$ se dotýkají plochy

$\boldsymbol{E}_{i-1}$ ($\boldsymbol{E}_{-(i-1)}$) podél křivek $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$) a že jejich tvořicí přímky jsou tečnami křivek soustavy $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$) na ploše $\boldsymbol{E}_{i-1}$ ($\boldsymbol{E}_{-(i-1)}$). Křivky $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ na ploše $\boldsymbol{E}_{i-1}$ ($\boldsymbol{E}_{-(i-1)}$) tvoří tedy sdruženou síť a plocha $\boldsymbol{E}_i$ ($\boldsymbol{E}_{-i}$) jest její laplaceovskou transformací ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$). Vzhledem k tomu, že body E_i a E_{-i} leží na kvadrice A a jsou vzhledem k ní polárně sdruženy se všemi body M, E_s, E_{-s} ($s = 1, 2, \ldots, i-1$), mají i-té laplaceovské transformace uvažované sítě výše zmíněné vlastnosti.

Položíme-li $\Omega_1 = e^p\,du$, $\Omega_{-1} = e^q\,dv$, jest $i\omega_{12} = q_u\,du - p_v\,dv$ a ze soustavy diferenciálních rovnic (3.1) odvodíme snadno rovnici $M_{uv} = -\frac{1}{2}ce^{p+q}M$. Pro invarianty h, k uvažované sítě tím dostaneme hodnoty $h = k = -\frac{1}{2}ce^{p+q}$ a důkaz předcházející věty je tím dokončen.

Abychom zjednodušili vyjadřování v následujících větách, *nazveme libovolnou sdruženou síť na ploše n-rozměrného projektivního prostoru P_n sítí (V), jestliže její první, druhé, ..., m-té laplaceovské transformace v obou směrech leží na regulární kvadrice A projektivního prostoru P_n tak, že laplaceovské transformace, vzniklé z uvedené sítě stejným počtem transformací v obou směrech, jsou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice A se všemi laplaceovskými transformacemi počáteční sítě, které jsou v její posloupnosti laplaceovských transformací obsaženy mezi zmíněnými transformacemi.* Při přechodu od projektivního prostoru P_n k neeukleidovskému prostoru S_n budeme vždy předpokládati, že právě uvedená kvadrika A jest absolutní kvadrikou neeukleidovského prostoru S_n.

V následujících úvahách dokážeme, že existence sítě (V) na ploše projektivního prostoru P_n zaručuje, že lze tuto plochu považovati za plochu $\boldsymbol{M}$ neeukleidovského prostoru S_n, a budeme uvažovati opět o třech možnostech na základě téže zásady, již jsme uvedli na konci odstavce 2.1.

3.2. Vyšetříme nejprve případ, kdy pro $j = 2m+1, 2m+2, \ldots, n$ nejsou ani formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$, ani formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule. V tomto případě označíme opět $\boldsymbol{M}_1$ každou plochu s $m-1$ kružnicemi normální křivosti, která jest určena v n-rozměrném neeukleidovském prostoru S_n soustavou diferenciálních rovnic (3.1) s výše uvedeným předpokladem. Pro dimensi n prostoru S_n platí v tomto případě nerovnost $n \geqq 2m+1$. Pro uvažovaný případ ploch dokážeme nyní větu, která podává jejich charakteristické projektivní vlastnosti.

Věta 3.2. *Plocha n-rozměrného projektivního prostoru P_n může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ s $m-1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do n-rozměrného neeukleidovského prostoru S_n, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť (V), jejíž posloupnost laplaceovských transformací se v žádném z obou směrů neukončí po m transformacích.*

Důkaz. Podle věty 3.1 existuje na každé minimální ploše s $m-1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do n-rozměrného neeukleidovského prostoru S_n, sdružená síť (V), vytvořená minimálními křivkami uvažované plochy.

Stačí tedy doplniti důkaz této věty zjištěním, že m-té laplaceovské transformace sítě (V) v obou směrech jsou sítě na plochách $\boldsymbol{E}_m$ a $\boldsymbol{E}_{-m}$. To je však vzhledem k učiněným předpokladům ihned patrno ze soustavy (3.1), která ukazuje, že geometrickým místem bodu E_m (E_{-m}) je plocha $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$ a nikoliv křivka.

Tímto zjištěním je ukázáno, že na každé uvažované ploše $\boldsymbol{M}_1$ neeukleidovského prostoru existuje sdružená síť (V) mající uvedené vlastnosti. Předpokládejme nyní naopak, že na ploše projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ existuje sdružená síť (V) s výše uvedenými vlastnostmi, a ukažme, že tuto plochu lze považovati za plochu $\boldsymbol{M}_1$ neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$.

Přiřaďme ke každému bodu M prostoru $\boldsymbol{P}_n$ pohyblivý reper tvořený lineárně nezávislými body M, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Pro libovolný bod X prostoru $\boldsymbol{P}_n$ lze pak psáti vztah (1.4) a zvláště dostaneme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M &= \omega_0 M + \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_n\mathbf{e}_n\,, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_i &= \omega_{i0} M + \omega_{i1}\mathbf{e}_1 + \omega_{i2}\mathbf{e}_2 + \ldots + \omega_{in}\mathbf{e}_n \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nutné a postačující podmínky pro to, aby bod X nezávisel na volbě reperu, jsou opět vyjádřeny diferenciálními rovnicemi (2.3), z nichž plyne, že regulární kvadrika $\boldsymbol{A}$ prostoru $\boldsymbol{P}_n$ jest určena v libovolném z uvažovaných reperů rovnicí (1.6) tehdy a jen tehdy, když platí

$$\omega_{i0} + c\omega_i = 0\,, \quad \omega_{ii} = \omega_0\,, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3.3}$$

K těmto rovnicím lze připojiti vztah $\omega_0 = 0$, který vyjadřuje, že determinant utvořený ze souřadnic bodů reperu má konstantní hodnotu.

Pro další výpočty je přirozené voliti reper tak, aby body $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ byly při každé poloze reperu v tečné rovině plochy v bodě M. Provedeme-li tuto volbu, dostaneme vztahy

$$\omega_j = 0 \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,, \tag{3.4}$$

které dávají na základě rovnic struktury projektivního prostoru vnější kvadratické relace

$$[\omega_1\omega_{1j}] + [\omega_2\omega_{2j}] = 0 \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,. \tag{3.5}$$

Předpokládejme nyní, že sdružená síť křivek na ploše je tvořena křivkami, které jsou určeny rovnicemi $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$, v nichž Ω_1 a Ω_{-1} jest označení zavedené v (1.10). Ve smyslu dokazované věty označme dále E_1 (E_{-1}) první laplaceovskou transformaci uvažované sítě ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$. Poněvadž bod E_1 (E_{-1}) musí ležet v tečné rovině plochy v bodě M, je lineární kombinací bodů M, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$; vzhledem k předpokladům je však bod E_1 (E_{-1}) polárně sdružen s bodem M vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$ a to vede k poznatku, že je pouze kombinací bodů $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$; poněvadž však kromě toho leží na kvadrice $\boldsymbol{A}$, je lineárně závislý na bodu $\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$ $(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2)$. Pro jednoduchost můžeme proto položiti $E_1 = \mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2$, $E_{-1} = \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2$, takže podle (3.2), (3.3) a užitím zavedených označení dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_1 &= -c\Omega_1 M - i\omega_{12}E_1 + (\omega_{13} + i\omega_{23})\,\mathbf{e}_3 + \ldots + (\omega_{1n} + i\omega_{2n})\,\mathbf{e}_n\,, \\ \mathrm{d}E_{-1} &= -c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + (\omega_{13} - i\omega_{23})\,\mathbf{e}_3 + \ldots + (\omega_{1n} - i\omega_{2n})\,\mathbf{e}_n\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Vyjádříme nyní analyticky předpoklad učiněný o bodech E_1 a E_{-1}. Bod E_1 (E_{-1}) je při každé poloze bodu M na ploše laplaceovskou transformací bodu M ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$) tehdy a jen tehdy, když pro libovolně zvolenou křivku soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$) na ploše opsané bodem M je spojnice bodů M a E_1 (M a E_{-1}) tečnou v bodě E_1 (E_{-1}) křivky, která je geometrickým místem tohoto bodu a odpovídá zvolené křivce soustavy $\Omega_{-1} = 0$ ($\Omega_1 = 0$). Nutné a postačující podmínky pro to jsou vyjádřeny rovnicemi

$$\omega_{1j} + i\omega_{2j} = a_{1j}\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{1j} - i\omega_{2j} = b_{1j}\Omega_1 \quad (j = 3, 4, \ldots, n)\,, \tag{3.7}$$

z nichž na základě rovnic struktury projektivního prostoru dostaneme

$$\begin{gathered} [\Omega_{-1}\,(\mathrm{d}a_{1j} + 2ia_{1j}\omega_{12} + \sum_{\nu=3}^{n} a_{1\nu}\omega_{\nu j})] = 0\,, \\ [\Omega_1\,(\mathrm{d}b_{1j} - 2ib_{1j}\omega_{12} + \sum_{\nu=3}^{n} b_{1\nu}\omega_{\nu j})] = 0 \\ (j = 3, 4, \ldots, n)\,. \end{gathered} \tag{3.8}$$

V předcházejících rovnicích nemohou býti všechny funkce a_{1j} (b_{1j}) současně rovny nule, neboť v opačném případě by bod E_1 (E_{-1}) opisoval podle (3.6) a (3.7) křivku a posloupnost laplaceovských transformací uvažované sítě by byla proti předpokladu ukončena v obou směrech po první transformaci.

Bod E_1 (E_{-1}) tedy opisuje plochu $\mathbf{E}_1$ ($\mathbf{E}_{-1}$), na níž tvoří křivky $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ sdruženou síť. Označme E_2 (E_{-2}) laplaceovskou transformaci této sítě ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$). Bod E_2 (E_{-2}) leží tedy v tečné rovině plochy $\mathbf{E}_1$ ($\mathbf{E}_{-1}$) v bodě E_1 (E_{-1}) a je proto lineárně závislý na bodech M, E_1, $a_{13}\mathbf{e}_3 + a_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots + a_{1n}\mathbf{e}_n$ (M, E_{-1}, $b_{13}\mathbf{e}_3 + b_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots + b_{1n}\mathbf{e}_n$); poněvadž však je podle předpokladu polárně sdružen vzhledem ke kvadrice $\mathbf{A}$ s body M, E_1, E_{-1}, je závislý jen na bodu $a_{13}\mathbf{e}_3 + a_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots + a_{1n}\mathbf{e}_n$ ($b_{13}\mathbf{e}_3 + b_{14}\mathbf{e}_4 + \ldots + b_{1n}\mathbf{e}_n$). Vzhledem k předpokladu, že body E_2 a E_{-2} leží na kvadrice $\mathbf{A}$, odtud plyne platnost vztahů

$$a_{13}^2 + a_{14}^2 + \ldots + a_{1n}^2 = 0\,, \quad b_{13}^2 + b_{14}^2 + \ldots + b_{1n}^2 = 0\,. \tag{3.9}$$

Užitím rovnic (3.8) lze snadno nahlédnouti, že lze reper přiřazený k ploše vhodně zvoliti tak, aby předcházející rovnice (3.9) byly splněny hodnotami

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_1\,, & a_{14} &= ia_1\,, & a_{15} &= a_{16} = \ldots = a_{1n} = 0\,, \\ b_{13} &= b_1\,, & b_{14} &= -ib_1\,, & b_{15} &= b_{16} = \ldots = b_{1n} = 0\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

při čemž $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, takže při uvažované volbě pohyblivého reperu je bod E_2 (E_{-2}) závislý na bodu $\mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_4$ ($\mathbf{e}_3 - i\mathbf{e}_4$) a lze proto pro jednoduchost položiti $E_2 = \mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_4$, $E_{-2} = \mathbf{e}_3 - i\mathbf{e}_4$. Rovnice (3.8) pro $j = 3,4$ pak dále ukazují, že poměr funkcí a_1 a b_1 není invariantní, a to umožňuje položiti

$$a_1 = b_1 = R_1 . \tag{3.11}$$

Shrnutím předcházejících výpočtů tedy vidíme, že lze vhodnou volbou reperu přiřazeného k ploše dosáhnouti toho, že relace (3.7) a (3.8) mají vzhledem k (3.10) a (3.11) tvar

$$\begin{gathered}
\omega_{13} + i\omega_{23} = R_1\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{13} - i\omega_{23} = R_1\Omega_1\,,\\
\omega_{14} + i\omega_{24} = iR_1\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{14} - i\omega_{24} = -\,iR_1\Omega_1\,,\\
\omega_{15} = \omega_{16} = \ldots = \omega_{1n} = 0\,,\\
\omega_{25} = \omega_{26} = \ldots = \omega_{2n} = 0\,,\\
\left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} + i\,.\,\overline{2\omega_{12} - \omega_{34}}\right)\right] = 0\,, \quad \left[\Omega_1\left(\frac{\mathrm{d}R_1}{R_1} - i\,.\,\overline{2\omega_{12} - \omega_{34}}\right)\right] = 0\,,\\
[\Omega_{-1}(\omega_{3j} + i\omega_{4j})] = 0\,, \quad [\Omega_1(\omega_{3j} - i\omega_{4j})] = 0\\
(j = 5, 6, \ldots, n)\,.
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Při téže volbě reperu přiřazeného k ploše má pak soustava diferenciálních rovnic (3.2) tvar

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1E_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_1 &= -\,c\Omega_1M - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_{-1} &= -\,c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1E_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_2 &= -\,R_1\Omega_1E_1 - i\omega_{34}E_2 + \sum_{j=5}^{n}(\omega_{3j} + i\omega_{4j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}E_{-2} &= -\,R_1\Omega_{-1}E_{-1} + i\omega_{34}E_{-2} + \sum_{j=5}^{n}(\omega_{3j} - i\omega_{4j})\,\mathbf{e}_j\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= -\,\tfrac{1}{2}(\omega_{3h} - i\omega_{4h})\,E_2 - \tfrac{1}{2}(\omega_{3h} + i\omega_{4h})\,E_{-2} + \sum_{j=5}^{n}\omega_{hj}\mathbf{e}_j\\
&\qquad (h = 5, 6, \ldots, n)\,.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Rovnicemi (3.12) jsou analyticky vyjádřeny předpokládané vlastnosti sítě (V) na uvažované ploše pro $m = 2$. Poněvadž posloupnost laplaceovských transformací této sítě se podle předpokladu neukončí v žádném z obou směrů po dvou transformacích, neopisují body E_2 a E_{-2} křivky, takže podle (3.13) nemohou býti pro $j = 5, 6, \ldots, n$ ani formy $\omega_{3j} + i\omega_{4j}$, ani formy $\omega_{3j} - i\omega_{4j}$ současně rovny nule. Zároveň však rovnice soustavy (3.13) ukazují, porovnáme-li je se soustavou rovnic (3.1), že tvrzení dokazované věty je pro $m = 2$ správné a že tedy lze uvažovanou plochu prostoru $\mathbf{P}_n$ v případě $m = 2$ považovati za plochu $\boldsymbol{M}_1$ s jednou kružnicí normální křivosti, vnořenou do neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$.

V další části důkazu budeme postupovat metodou úplné indukce. Předpokládejme za tím účelem, že $m > 2$ a že sdružená síť (V) na uvažované ploše má vlastnost, že její první, druhé, ..., $(m-1)$-ní laplaceovské transformace v obou směrech leží na kvadrice $\boldsymbol{A}$ a že příslušná posloupnost laplaceovských transformací není v žádném z obou směrů ukončena po $m-1$ transformacích, při čemž poslední laplaceovské transformace v této posloupnosti jsou vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$ polárně sdruženy se všemi laplaceovskými transformacemi obsaženými v uvedené posloupnosti mezi nimi. Předpokládejme dále, že právě uvedené vlastnosti jsou při vhodné volbě pohyblivého reperu přiřazeného k ploše vyjádřeny rovnicemi (3.3), (3.4) a soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{gathered}
\omega_{2k-1,2k+1} + i\omega_{2k,2k+1} = R_k\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2k-1,2k+1} - i\omega_{2k,2k+1} = R_k\Omega_1\,, \\
\omega_{2k-1,2k+2} + i\omega_{2k,2k+2} = iR_k\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2k-1,2k+2} - i\omega_{2k,2k+2} = -iR_k\Omega_1\,, \\
\omega_{2k-1,2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1,n} = 0\,, \\
\omega_{2k,2k+3} = \omega_{2k,2k+4} = \ldots = \omega_{2k,n} = 0 \\
(k = 1, 2, \ldots, m-2)\,,
\end{gathered} \tag{3.14}$$

z nichž podle rovnic struktury projektivního prostoru vychází vnějším diferencováním relace

$$\begin{gathered}
\left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} + i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,, \\
\left[\Omega_1\left(\frac{\mathrm{d}R_k}{R_k} - i\,.\,\overline{\omega_{12} + \omega_{2k-1,2k} - \omega_{2k+1,2k+2}}\right)\right] = 0\,, \\
[\Omega_{-1}(\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j})] = 0\,, \quad [\Omega_1(\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j})] = 0 \\
(k = 1, 2, \ldots, m-2\,;\ j = 2m-1, 2m, \ldots, n)\,.
\end{gathered} \tag{3.15}$$

Při volbě pohyblivého reperu bylo postupováno tak, že pro $i = 1, 2, \ldots, m-1$ jest i-tá laplaceovská transformace sítě (V) na ploše vytvořena ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$ bodem E_i (E_{-i}), zavedeným v (1.7); takže soustava rovnic (3.2) má tvar

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1E_{-1}\,, \\
\mathrm{d}E_1 &= -c\Omega_1M - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,, \\
\mathrm{d}E_{-1} &= -c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1E_{-2}\,, \\
\mathrm{d}E_k &= -R_{k-1}\Omega_1E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,, \\
\mathrm{d}E_{-k} &= -R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1E_{-(k+1)}\,, \\
\mathrm{d}E_{m-1} &= -R_{m-2}\Omega_1E_{m-2} - i\omega_{2m-3,2m-2}E_{m-1} + \\
&\quad + \sum_{j=2m-1}^{n}(\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j})\,\mathbf{e}_j\,,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E_{-(m-1)} &= -R_{m-2}\Omega_{-1}E_{-(m-2)} + i\omega_{2m-3,2m-2}E_{-(m-1)} + \\
&\quad + \sum_{j=2m-1}^{n} (\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j})\, \mathbf{e}_j\,, \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_h &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-3,h} - i\omega_{2m-2,h})\, E_{m-1} - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-3,h} + i\omega_{2m-2,h})\, E_{-(m-1)} + \sum_{j=2m-1}^{n} \omega_{hj}\mathbf{e}_j \\
&(k = 2, 3, \ldots, m-2\,; \quad h = 2m-1\,, 2m\,, \ldots, n)\,.
\end{aligned}$$

V předcházející soustavě (3.16) nejsou pro $j = 2m - 1, 2m, \ldots, n$ ani formy $\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j}$, ani formy $\omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j}$ současně rovny nule, neboť v opačném případě by $(m-1)$-ní laplaceovská transformace uvažované sítě (V) aspoň v jednom z obou směrů byla křivkou, a to je ve sporu s učiněnými předpoklady.

Vzhledem k těmto předpokladům je $(m-1)$-ní laplaceovská transformace sítě (V) ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$ vytvořena bodem E_{m-1} $(E_{-(m-1)})$, který opisuje plochu $\mathbf{E}_{m-1}$ $(\mathbf{E}_{-(m-1)})$, na níž tvoří křivky $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ sdruženou síť. Abychom dokázali, že laplaceovská transformace sítě na ploše $\mathbf{E}_{m-1}$ $(\mathbf{E}_{-(m-1)})$ ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$, tedy m-tá laplaceovská transformace sítě (V) v tomto směru, má vlastnosti dokazované věty, uveďme nejprve vztahy

$$\omega_{2m-3,j} + i\omega_{2m-2,j} = a_{m-1,j}\Omega_{-1}\,, \quad \omega_{2m-3,j} - i\omega_{2m-2,j} = b_{m-1,j}\Omega_1 \tag{3.17}$$
$$(j = 2m-1,\, 2m, \ldots, n)$$

plynoucí z rovnic napsaných v předposledním řádku (3.15). V rovnicích (3.17) nejsou ani funkce $a_{m-1,j}$, ani funkce $b_{m-1,j}$ pro všechna uvažovaná j současně rovny nule.

Označíme-li E_m (E_{-m}) laplaceovskou transformaci sítě na ploše $\mathbf{E}_{m-1}$ $(\mathbf{E}_{-(m-1)})$ ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ $(\Omega_{-1} = 0)$, leží bod E_m (E_{-m}) v tečné rovině plochy $\mathbf{E}_{m-1}$ $(\mathbf{E}_{-(m-1)})$ v bodě E_{m-1} $(E_{-(m-1)})$, která je podle (3.16) a (3.17) určena body E_{m-2}, E_{m-1}, $a_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + a_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots + a_{m-1,n}\mathbf{e}_n$ $(E_{-(m-2)}, E_{-(m-1)}, b_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + b_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots + b_{m-1,n}\mathbf{e}_n)$, a je proto lineární kombinací těchto bodů. Poněvadž bod E_m (E_{-m}) je dále polárně sdružen vzhledem ke kvadrice $\mathbf{A}$ s body $E_{m-1}, \ldots, E_1, M, E_{-1}, \ldots, E_{-(m-1)}$, je lineárně závislý jen na bodu $a_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + a_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots + a_{m-1,n}\mathbf{e}_n$ $(b_{m-1,2m-1}\mathbf{e}_{2m-1} + b_{m-1,2m}\mathbf{e}_{2m} + \ldots$ $\ldots + b_{m-1,n}\mathbf{e}_n)$; vyjádříme-li ještě, že leží na kvadrice $\mathbf{A}$, dostaneme relace

$$\begin{aligned}
a^2_{m-1,2m-1} + a^2_{m-1,2m} + \ldots + a^2_{m-1,n} &= 0\,, \\
b^2_{m-1,2m-1} + b^2_{m-1,2m} + \ldots + b^2_{m-1,n} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Na základě rovnic struktury projektivního prostoru odvodíme z rovnice (3.17) vnější kvadratické relace

$$[\Omega_{-1}(\mathrm{d}a_{m-1,j}+ia_{m-1,j}\,.\,\overline{\omega_{12}+\omega_{2m-3,2m-2}}+\sum_{\nu=2m-1}^{n}a_{m-1,\nu}\omega_{\nu j})]=0\,,$$
$$[\Omega_{1}(\mathrm{d}b_{m-1,j}-ib_{m-1,j}\,.\,\overline{\omega_{12}+\omega_{2m-3,2m-2}}+\sum_{\nu=2m-1}^{n}b_{m-1,\nu}\omega_{\nu j})]=0 \tag{3.19}$$
$$(j=2m-1\,,2m,\ldots,n)\,,$$

z nichž lze usouditi, že je možné vhodnou volbou pohyblivého reperu přiřazeného k uvažované ploše dosáhnouti toho, aby rovnice (3.18) byly splněny hodnotami

$$\begin{aligned}a_{m-1,2m-1}&=a_{m-1}\,,\quad a_{m-1,2m}=ia_{m-1}\,,\quad a_{m-1,2m+1}=\ldots=a_{m-1,n}=0\,,\\ b_{m-1,2m-1}&=b_{m-1}\,,\quad b_{m-1,2m}=-ib_{m-1}\,,\quad b_{m-1,2m+1}=\ldots=b_{m-1,n}=0\,,\end{aligned} \tag{3.20}$$

při čemž $a_{m-1}>0$, $b_{m-1}>0$. Uvažovaná volba reperu tedy vede k tomu, že bod E_m (E_{-m}) je závislý na bodu $\mathbf{e}_{2m-1}+i\mathbf{e}_{2m}$ ($\mathbf{e}_{2m-1}-i\mathbf{e}_{2m}$), takže pro jednoduchost můžeme položiti $E_m=\mathbf{e}_{2m-1}+i\mathbf{e}_{2m}$, $E_{-m}=\mathbf{e}_{2m-1}-i\mathbf{e}_{2m}$. Poněvadž podle (3.19) není poměr funkcí a_{m-1} a b_{m-1} invariantní, můžeme v dalším předpokládati, že

$$a_{m-1}=b_{m-1}=R_{m-1}\,. \tag{3.21}$$

Předcházející úvaha tedy vede k tomu, že rovnice (3.17) se vzhledem k (3.20) a (3.21) zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned}\omega_{2m-3,2m-1}+i\omega_{2m-2,2m-1}&=R_{m-1}\Omega_{-1}\,,\quad \omega_{2m-3,2m-1}-i\omega_{2m-2,2m-1}=R_{m-1}\Omega_{1}\,,\\ \omega_{2m-3,2m}+i\omega_{2m-2,2m}&=iR_{m-1}\Omega_{-1}\,,\quad \omega_{2m-3,2m}-i\omega_{2m-2,2m}=-iR_{m-1}\Omega_{1}\,,\\ \omega_{2m-3,2m+1}&=\omega_{2m-3,2m+2}=\ldots=\omega_{2m-3,n}=0\,,\\ \omega_{2m-2,2m+1}&=\omega_{2m-2,2m+2}=\ldots=\omega_{2m-2,n}=0\end{aligned} \tag{3.22}$$

a vnější kvadratické relace (3.19) přejdou v rovnice

$$\begin{gathered}\left[\Omega_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}R_{m-1}}{R_{m-1}}+i\,.\,\overline{\omega_{12}+\omega_{2m-3,2m-2}-\omega_{2m-1,2m}}\right)\right]=0\,,\\ \left[\Omega_{1}\left(\frac{\mathrm{d}R_{m-1}}{R_{m-1}}-i\,.\,\overline{\omega_{12}+\omega_{2m-3,2m-2}-\omega_{2m-1,2m}}\right)\right]=0\,,\\ [\Omega_{-1}(\omega_{2m-1,j}+i\omega_{2m,j})]=0\,,\quad [\Omega_{1}(\omega_{2m-1,j}-i\omega_{2m,j})]=0\\ (j=2m+1,\,2m+2,\ldots,n)\,,\end{gathered} \tag{3.23}$$

vyjadřující podmínky integrability soustavy rovnic (3.22).

Při vhodné volbě reperu přiřazeného k ploše je rovnicemi (3.22) analyticky vyjádřen předpoklad o m-tých laplaceovských transformacích sítě (V) v obou směrech. Tyto rovnice (3.22) doplňují rovnice (3.14) na soustavu rovnic, která je totožná se soustavou (1.8), takže uvažované plochy projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ jsou určeny touž soustavou diferenciálních rovnic jako minimální plochy neeukleidovského prostoru s $m-1$ kružnicemi normální křivosti. Poněvadž body E_m a E_{-m} opisují podle předpokladu plochy, nejsou ani formy $\omega_{2m-1,j}+$

$+ i\omega_{2m,j}$, ani formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule pro všechna $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$.

Z předcházejících úvah tedy plyne, že každá plocha projektivního prostoru P_n, na níž existuje sdružená síť (V) mající uvedené vlastnosti, je v neeukleidovském prostoru S_n s absolutní kvadrikou A plochou $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti. Důkaz věty 3.2 je tím úplně proveden.

Předcházející věta platí v každém neeukleidovském prostoru dimense $n \geqq 2m + 1$ a obsahuje tedy jako nejjednodušší případ projektivní charakterisaci minimálních ploch $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořených do neeukleidovského prostoru dimense $n = 2m + 1$. V tomto případě lze o uvažovaných plochách získati přesnější výsledek, který zahrnuje pro $m = 2$ větu dokázanou O. Borůvkou v citovaném pojednání [2].

Věta 3.3. *Plocha $(2m + 1)$-rozměrného projektivního prostoru P_{2m+1} může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do $(2m + 1)$-rozměrného neeukleidovského prostoru S_{2m+1}, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť autopolární vzhledem k regulární kvadrice A prostoru P_{2m+1} a periodická s periodou $2(m + 1)$.*

Důkaz. Každá minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do $(2m + 1)$-rozměrného neeukleidovského prostoru S_{2m+1}, je podle (3.1) určena soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \tfrac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \tfrac{1}{2}\Omega_1 E_{-1}\,,\\
\mathrm{d}E_1 &= -c\Omega_1 M - i\omega_{12}E_1 + R_1\Omega_{-1}E_2\,,\\
\mathrm{d}E_{-1} &= -c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + R_1\Omega_1 E_{-2}\,,\\
\mathrm{d}E_k &= -R_{k-1}\Omega_1 E_{k-1} - i\omega_{2k-1,2k}E_k + R_k\Omega_{-1}E_{k+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-k} &= -R_{k-1}\Omega_{-1}E_{-(k-1)} + i\omega_{2k-1,2k}E_{-k} + R_k\Omega_1 E_{-(k+1)}\,,\\
\mathrm{d}E_m &= -R_{m-1}\Omega_1 E_{m-1} - i\omega_{2m-1,2m}E_m + (\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1})\,\mathbf{e}_{2m+1}\,,\\
\mathrm{d}E_{-m} &= -R_{m-1}\Omega_{-1}E_{-(m-1)} + i\omega_{2m-1,2m}E_{-m} + (\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1})\,\mathbf{e}_{2m+1}\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_{2m+1} &= -\tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1})\,E_m - \tfrac{1}{2}(\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1})\,E_{-m}\\
&\qquad (k = 2, 3, \ldots, m - 1)\,,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

v níž obě formy $\omega_{2m-1,2m+1} \pm i\omega_{2m,2m+1}$ nejsou současně rovny nule. Podle vět 3.1 a 3.2 tvoří minimální křivky této plochy sdruženou síť (V), jejíž posloupnost laplaceovských transformací se v žádném z obou směrů neukončí po m transformacích. Odtud plyne, že křivky $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ tvoří na ploše $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$, opsané bodem E_m (E_{-m}), sdruženou síť, a ze soustavy (3.24) jest ihned patrno, že bod $\mathbf{e}_{2m+1}$ opisuje plochu. Uvažujme nyní na ploše $\boldsymbol{E}_m$ $(\boldsymbol{E}_{-m})$ libovolnou křivku soustavy $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ a jí odpovídající křivku na ploše vytvořené bodem $\mathbf{e}_{2m+1}$. Pohybuje-li se bod E_m (E_{-m}) po zvolené křivce, je spojnice bodu $E_m(E_{-m})$ s odpovídajícím bodem $\mathbf{e}_{2m+1}$ tečnou v bodě $\mathbf{e}_{2m+1}$ křivky $\Omega_{-1} = 0$ $(\Omega_1 = 0)$ opsané tímto bodem a současně tečnou v bodě E_m (E_{-m}) ke křivce soustavy $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$), jdoucí na ploše $\boldsymbol{E}_m$ ($\boldsymbol{E}_{-m}$) uvažovaným bodem E_m (E_{-m}). Odtud je patrno, že soustavy křivek $\Omega_1 = 0$ a $\Omega_{-1} = 0$ tvoří na ploše opsané bodem $\mathbf{e}_{2m+1}$ sdruženou síť, která je laplaceovskou transformací sítě na ploše $\boldsymbol{E}_m$ ($\boldsymbol{E}_{-m}$) ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ ($\Omega_{-1} = 0$).

S použitím dřívějších výsledků je předcházející úvahou dokázáno, že $(m + 1)$-ní laplaceovské transformace sítě minimálních křivek na ploše $\boldsymbol{M}_1$ splynou v jediné síti vytvořené odpovídajícími křivkami na ploše opsané bodem $\mathbf{e}_{2m+1}$. Je tedy posloupnost laplaceovských transformací sítě minimálních křivek na ploše $\boldsymbol{M}_1$ periodická a snadno se vidí, že její perioda je $2(m + 1)$. Poněvadž kromě toho je bod M v každé své poloze polárně sdružen vzhledem k absolutní kvadrice $\boldsymbol{A}$ prostoru $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ se všemi body $E_1, E_{-1}, \ldots, E_m, E_{-m}$, $\mathbf{e}_{2m+1}$, je posloupnost laplaceovských transformací uvažované sítě autopolární vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$. Vidíme tedy, že každá minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_{2m+1}$ má projektivní vlastnosti, jež jsme uvedli v předcházející větě.

Dokážeme nyní obráceně, že každou plochu projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_{2m+1}$, která má uvažované vlastnosti, lze považovati za minimální plochu neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_{2m+1}$, a opřeme se při tom o druhou část důkazu věty 3.2.

Poněvadž posloupnost laplaceovských transformací sítě na dané ploše je periodická s periodou $2(m + 1)$ a autopolární vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$, jsou první, druhé, ..., m-té laplaceovské transformace této sítě v obou směrech položeny na kvadrice $\boldsymbol{A}$ a mají vlastnost, že laplaceovské transformace vzniklé v obou směrech stejným počtem transformací, jsou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice $\boldsymbol{A}$ se všemi laplaceovskými transformacemi, které jsou v posloupnosti patřící k počáteční síti obsaženy mezi nimi. Je tedy síť na uvažované ploše sítí (V) a podle důkazu předcházející věty 3.2 lze tuto okolnost analyticky vyjádřiti při vhodné volbě pohyblivého reperu přiřazeného k ploše soustavou diferenciálních rovnic, která je totožná se soustavou (1.8). Užitím této soustavy nabudou diferenciální rovnice (3.2) právě tvaru (3.24) a odtud plyne, že každá plocha projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_{2m+1}$, na níž existuje sdružená síť mající výše uvedené vlastnosti, může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_1$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_{2m+1}$, čímž je důkaz předcházející věty 3.3 dokončen.

3.3. Vyšetříme nyní podobným způsobem druhý z výše zmíněných případů, který jest určen požadavkem, že pro $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ je právě jedna z obou soustav forem $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ a $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ tvořena formami vesměs rovnými nule. Pro určitost budeme vzhledem k souměrnosti soustavy (3.1) předpokládati, že formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$ jsou současně rovny nule, zatím co všechny formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ vesměs nevymizí. Podobně jako v předcházejícím případě je dimense n prostoru $\boldsymbol{S}_n$ větší než $2m$. V dalším označíme $\boldsymbol{M}_2$ každou minimální plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, která je v n-rozměrném neeukleidovském prostoru $\boldsymbol{S}_n$ určena soustavou diferenciálních rovnic (3.1) s koeficienty vyhovujícími výše uvedenému předpokladu. O těchto plochách platí následující věta.

Věta 3.4. *Plocha n-rozměrného projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$ může býti definována jako minimální plocha $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do n-rozměrného neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť (V), jejíž posloupnost laplaceovských transformací se ukončí právě v jednom z obou směrů po m transformacích Goursatovým způsobem.*

Důkaz. Vzhledem k větě 3.1 existuje na každé minimální ploše s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořené do neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$, sdružená síť (V), vytvořená minimálními křivkami na ploše. Důkaz této věty je třeba doplniti tím, že ukážeme, že m-tá laplaceovská transformace uvažované sítě je v jednom směru sítí na ploše $\boldsymbol{E}_{-m}$ a v druhém směru křivkou $\boldsymbol{E}_m$. Vzhledem k výše učiněným předpokladům jsou však tyto vlastnosti snadno patrné ze soustavy (3.1), zvláště pokud jednají o uvedené transformaci ve směru křivek $\Omega_{-1} = 0$. Pokud se týká m-té laplaceovské transformace ve směru křivek $\Omega_1 = 0$, je patrno, že bod E_m opisuje křivku $\boldsymbol{E}_m$, jejíž tečny tvoří soustavu křivek $\Omega_1 = 0$ na ploše $\boldsymbol{E}_{m-1}$. Je tedy křivka $\boldsymbol{E}_m$ hranou vratu rozvinutelné plochy vytvořené bodem E_{m-1}, takže uvažovaná posloupnost laplaceovských transformací sítě minimálních křivek na ploše se ukončí ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ po m transformacích Goursatovým způsobem.

K důkazu opačného tvrzení použijeme postupu druhé části důkazu věty 3.2, v níž jsme odvodili, že předpokládané vlastnosti ploch projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$, pokud jednají o sdružené síti (V), lze při vhodné volbě reperu přiřazeného k ploše vyjádřiti analyticky soustavou diferenciálních rovnic (1.8), takže uvažované plochy jsou pak určeny soustavou diferenciálních rovnic (3.1). Učiníme-li ve smyslu předcházející věty předpoklad, že posloupnost laplaceovských transformací se ukončí po m transformacích Goursatovým způsobem právě ve směru křivek $\Omega_1 = 0$, musí bod E_{m-1} opisovati rozvinutelnou plochu $\boldsymbol{E}_{m-1}$, jejíž tvořicí přímky patří k soustavě $\Omega_1 = 0$ a jsou tečnami křivky $\boldsymbol{E}_m$ opsané bodem E_m. To však podle (3.1) nastane pouze tehdy, když pro $j = 2m+1, 2m + 2, \ldots, n$ bude $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j} = 0$. Poněvadž m-tá laplaceovská transformace sítě ve směru křivek $\Omega_{-1} = 0$ je v uvažovaném případě sítí na ploše, nemohou býti pro uvedená j všechny formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ současně rovny nule.

Zjistili jsme tedy, že každá plocha projektivního prostoru $\boldsymbol{P}_n$, která má uvedené projektivní vlastnosti, může býti považována za plochu $\boldsymbol{M}_2$ neeukleidovského prostoru $\boldsymbol{S}_n$.

Je-li ve zvláštním případě pro dimensi n prostoru $\boldsymbol{S}_n$ splněn vztah $n = 2m + 1$, lze předcházející výsledek vysloviti přesněji, čímž dostaneme výsledek zobecňující větu odvozenou O. Borůvkou pro $m = 2$ v pojednání uvedeném na konci odstavce 3.2.

Věta 3.5. *Plocha $(2m + 1)$-rozměrného projektivního prostoru P_{2m+1} může býti definována jako plocha $\boldsymbol{M}_2$ s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, vnořená do $(2m + 1)$-rozměrného neeukleidovského prostoru S_{2m+1}, tehdy a jen tehdy, když na ní existuje sdružená síť autopolární vzhledem k regulární kvadrice A prostoru P_{2m+1}, jejíž první, druhé, ..., m-té laplaceovské transformace leží na kvadrice A a jejíž posloupnost laplaceovských transformací se ukončí v jednom směru po m transformacích Goursatovým způsobem a v druhém směru po $m + 1$ transformacích Laplaceovým způsobem.*

Důkaz. Každá uvažovaná minimální plocha neeukleidovského prostoru S_{2m+1} jest analyticky vyjádřena soustavou diferenciálních rovnic (3.24), v níž z obou forem $\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1}$ a $\omega_{2m-1,2m+1} - i\omega_{2m,2m+1}$ je pouze první identicky rovna nule. Podle vět 3.1 a 3.2 tvoří minimální křivky na dané ploše sdruženou síť (V), jejíž posloupnost laplaceovských transformací se ukončí právě ve směru křivek $\Omega_1 = 0$ po m transformacích Goursatovým způsobem. Po m transformacích ve směru křivek $\Omega_{-1} = 0$ dostaneme tedy sdruženou síť na ploše $\boldsymbol{E}_{-m}$ opsané bodem E_{-m}. Ze soustavy rovnic (3.24), v níž je dosazeno podle hořejšího předpokladu, nyní plyne, že tečny křivek soustavy $\Omega_{-1} = 0$ v jejích průsečících s pevně zvolenou křivkou soustavy $\Omega_1 = 0$ jdou bodem $\mathbf{e}_{2m+1}$, který je pevný, pohybuje-li se bod E_{-m} po zvolené křivce. Bod $\mathbf{e}_{2m+1}$ opisuje křivku, která je geometrickým místem vrcholů kuželových ploch, které se dotýkají plochy $\boldsymbol{E}_{-m}$ podél křivek soustavy $\Omega_1 = 0$. Odtud je patrno, že posloupnost laplaceovských transformací uvažované sítě se ukončí ve směru křivek $\Omega_{-1} = 0$ po $m + 1$ transformacích Laplaceovým způsobem. Použijeme-li nakonec téže okolnosti jako v důkazu věty 3.3, zjistíme, že uvedená posloupnost je autopolární vzhledem k absolutní kvadrice prostoru S_{2m+1}, takže síť minimálních křivek na uvažované ploše má v tomto případě všechny vlastnosti obsažené v předcházející větě.

Chceme-li podat důkaz opačného tvrzení, všimneme si, že z předpokladů o síti existující na dané ploše projektivního prostoru P_{2m+1} zejména plyne, že je sdruženou sítí (V). Podle důkazu věty 3.2 je tato okolnost vyjádřena soustavou diferenciálních rovnic (1.8), vedoucích podle (3.2) k rovnicím tvaru (3.24). V těchto rovnicích je z důvodu, použitého na konci důkazu věty 3.4. $\omega_{2m-1,2m+1} + i\omega_{2m,2m+1} = 0$ a odtud je vidět, že uvažovanou plochu projektivního prostoru P_{2m+1} lze považovat za plochu $\boldsymbol{M}_2$ vnořenou do neeukleidovského prostoru S_{2m+1}.

3.4. Zbývá nám ještě zmíniti se o plochách majících uvažované metrické vlastnosti a podrobených analytické podmínce, že jak formy $\omega_{2m-1,j} + i\omega_{2m,j}$, tak i formy $\omega_{2m-1,j} - i\omega_{2m,j}$ jsou pro všechna $j = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, n$ současně rovny nule. Označíme v tomto případě $\boldsymbol{M}_3$ každou plochu s $m - 1$ kružnicemi normální křivosti, která je za uvedeného předpokladu určena v n-rozměrném neeukleidovském prostoru S_n soustavou diferenciálních rovnic