Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

REFERÁTY

DOUSPOŘÁDÁNÍ ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH GRUP

(Referát autora o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 17. prosince 1956.)

Částečně uspořádaná grupa je grupa G, na které je definováno částečné uspořádání $\leqq$, svázané s grupovou operací $+$ podmínkou: $a, b, c, d \in G, a \leqq b \Rightarrow d + a + c \leqq d + b + c$.

Na téže grupě mohou být definována dvě různá částečná uspořádání; je-li třeba vytknout, že jde o grupu G s částečným uspořádáním $\leqq$, píšeme $(G \leqq)$.

Částečně uspořádaná grupa $(G \leqq)$ se dá *douspořádat* (je *douspořadatelná*), jestliže na grupě G existuje jednoduché uspořádání $\precsim$ takové, že $(G \precsim)$ je jednoduše uspořádaná grupa a platí-li: $a, b \in G$, $a \leqq b \Rightarrow a \precsim b$. Jednoduché uspořádání $\precsim$ nazýváme *douspořádáním* grupy $(G \leqq)$.

Částečně uspořádaná grupa $(G \leqq)$ je *reversibilně douspořadatelná*, jestliže k libovolné dvojici nesrovnatelných prvků $a, b \in G$ existují douspořádání $\precsim^1$, $\precsim^2$ grupy $(G \leqq)$ taková, že platí $a \precsim^1 b$, $b \precsim^2 a$.

Příklady. **1.** Přímý součet jednoduše uspořádaných grup je reversibilně douspořadatelný.

2. Příklad částečně uspořádané grupy, která se dá douspořádat právě jedním způsobem a není jednoduše uspořádaná. Nekonečnou cyklickou grupu $\{na\}$ částečně uspořádejme takto: $\ldots < -2a < 0 < 2a < \ldots, \ldots < -a < a < 3a < \ldots$. $(G \leqq)$ se dá douspořádat podle pravidla: $na \precsim (n + 1)\, a$ pro všechna celá n. Jiným způsobem se $(G \leqq)$ nedá douspořádat.

3. Částečně uspořádaná grupa, která obsahuje prvek $\neq 0$ konečného řádu, se nedá douspořádat (protože jednoduše uspořádaná grupa je bez torse).

p-ideálem na částečně uspořádané grupě G nazveme konvexní normální dělitel v G. Je-li H p-ideál v G, dá se faktorgrupa G/H částečně uspořádat (relací, kterou budeme zase značit $\leqq$) takto: pro $A \in G/H$ platí $A \geqq H \Leftrightarrow$ existuje $a \in A$ tak, že $a \geqq 0$. Faktorgrupa s tímto částečným uspořádáním je částečně uspořádanou grupou; nazýváme ji *p-faktorgrupou*. p-faktorgrupa G/H je *dokonale uspořádána*, když pro libovolné $A \in G/H$, $A > H$, platí $a > 0$ pro všechna $a \in A$.

Platí tyto věty:

Věta 1. *Částečně uspořádaná grupa G je douspořadatelná, když a jen když v G existuje jednoduše uspořádaný p-ideál H a když existuje subdirektní součet $\mathfrak{S}$ jednoduše uspořádaných grup a zobrazení p-faktorgrupy G/H na $\mathfrak{S}$, které je isotonní a isomorfní (v grupovém smyslu).*

Věta 2. *Částečně uspořádaná grupa G je reversibilně douspořadatelná, když a jen když v G existuje jednoduše uspořádaný p-ideál H takový, že p-faktorgrupa G/H je (v grupovém smyslu i co do uspořádání) isomorfní se subdirektním součtem jednoduše uspořádaných grup a že p-faktorgrupa G/H je dokonale uspořádána.*

Věta 3. *Částečně uspořádaná grupa G je douspořadatelná právě jedním způsobem, když a jen když v G existuje jednoduše uspořádaný p-ideál H, který má tyto dvě vlastnosti:*

1. *Existuje jednoduše uspořádaná grupa $\mathfrak{G}$ a*

(*) *existuje zobrazení p-faktorgrupy G/H na $\mathfrak{G}$, jež je isotonní a isomorfní (v grupovém smyslu).*

2. *Existuje-li subdirektní součet $\mathfrak{G}$ jednoduše uspořádaných grup s vlastností (*), pak uspořádání v $\mathfrak{G}$ je jednoduché.*

Některé z následujících charakterisací douspořadatelnosti pro abelovské grupy byly již dříve odvozeny jinými autory (a jinými metodami):

Věta 4. *Abelovská částečně uspořádaná grupa se dá douspořádat, když a jen když je bez torse.*

Věta 5. *Na abelovské částečně uspořádané grupě G jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *G se dá reversibilně douspořádat,*
2. *G je subdirektní součet jednoduše uspořádaných grup,*
3. *$a \in G$, $na \geqq 0$ pro nějaké přirozené $n \Rightarrow a \geqq 0$.*

Věta 6. *Na abelovské částečně uspořádané grupě G jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *G se dá douspořádat právě jedním způsobem,*
2. *jediná podgrupa nesrovnatelných prvků v G je nulová,*
3. *k libovolnému $a \in G$, $a \neq 0$, existuje n celé tak, že $na > 0$.*

František Šik, Brno

SUBDIREKTNÍ SOUČTY USPOŘÁDANÝCH GRUP

(Referát autora o přednášce konané v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 4. března 1957.)

Buď G l-grupa. Prvky $x, y \in G$ nazveme *disjunktními*, jestliže platí $|x| \wedge |y| = 0$. Množina A, $A \subset G$, se nazývá *komponentou*, jestliže existuje množina $B \subset G$ taková, že A je množina všech prvků z G, které jsou disjunktní s každým prvkem z B. Komponenta, která je normální podgrupou, se nazývá *normální komponenta*.

Budiž dán systém $\{G_\nu\}$ jednoduše uspořádaných grup. Označme $x(.)$ funkci na množině indexů ν takovou, že $x(\nu) \in G_\nu$. Množina všech těchto funkcí (s algebraickými operacemi — sčítáním, suprémem a infimem — zavedenými obvyklým způsobem) tvoří l-grupu, kterou nazýváme úplným přímým součtem systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$.

V dalším bude podána charakterisace různých typů l-podgrup úplného přímého součtu $\mathfrak{G}$ systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$.

1. *Subdirektním součtem* systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$ se nazývá l-podgrupa G v $\mathfrak{G}$, pro niž platí: k libovolnému $a_\nu \in G_\nu$ existuje $x(.) \in G$ tak, že $a_\nu = x(\nu)$.

Věta. *Následující podmínky jsou na l-grupě G ekvivalentní:*

1. *G je subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup;*

2. *v G existuje systém l-ideálů $\{J_\nu\}$ takový, že $\bigcap J_\nu = 0$ a že l-faktorgrupa G/J_ν je jednoduše uspořádána pro každé ν;*

3. *každá komponenta v G je normální.*

Označme $\overline{G}_\nu$ množinu všech prvků z $\mathfrak{G}$, pro něž platí $x(\mu) = 0$ pro $\mu \neq \nu$.

2. Subdirektní součet G systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$ se nazývá *β-subdirektní*, jestliže $G \cap \overline{G}_\nu = 0$ pro všechna ν.

Věta. *Následující podmínky jsou v l-grupě G ekvivalentní:*

1. *G je β-subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup;*
2. *v G existuje systém l-ideálů $\{J_\nu\}$ takový, že pro libovolné μ platí $\bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu = 0$ a že l-faktorgrupa G/J_ν je jednoduše uspořádána pro každé ν;*
3. *každá komponenta v G je normální a v G neexistuje maximální komponenta $\neq 0$.*

3. Subdirektní součet G systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$ se nazývá *α-subdirektní*, jestliže $G \cap \overline{G}_\nu \neq 0$, pokud $\overline{G}_\nu \neq 0$.

Věta. *Následující podmínky jsou na l-grupě G ekvivalentní:*

1. *G je α-subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup;*
2. *v G existuje systém l-ideálů $\{J_\nu\}$ takový, že $\bigcap J_\nu = 0$, pro libovolné μ platí $\bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu \neq 0$ a l-faktorgrupa G/J_ν je jednoduše uspořádána pro každé ν;*
3. *každá vlastní komponenta v G je částí maximální komponenty a každá maximální komponenta je normální.*

4. Subdirektní součet G systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$ se nazývá *úplně subdirektní*, jestliže $G \supset \overline{G}_\nu$ pro každé ν.

Věta. *Následující podmínky jsou na l-grupě G ekvivalentní:*

1. *G je úplně subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup;*
2. *v G existuje systém l-ideálů $\{J_\nu\}$ takový, že $\bigcap J_\nu = 0$, l-faktorgrupa G/J_ν je jednoduše uspořádána (pro každé ν) a pro libovolné μ platí $\bigcap_{\nu \neq \mu} J_\nu + J_\mu = G$;*
3. *každá nenulová komponenta v G obsahuje minimální přímý sčitanec l-grupy G.*

l-Grupa G je *redukovaným subdirektním součtem* systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}_{\nu \in N}$, jestliže platí:

ať $\mu, \nu \in N$; jestliže pro libovolný prvek $x(.) \in G$ platí $x(\nu) > 0 \Rightarrow x(\mu) \geqq 0$, pak $\nu = \mu$.

Věta. *Nechť G je subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$. Pak existuje takový systém $\{H_\alpha\}$ jednoduše uspořádaných grup, že G je isomorfní s redukovaným subdirektním součtem systému jednoduše uspořádaných grup $\{H_\alpha\}$.*

Vyšetříne souvislost nahoře uvedených typů subdirektních součtů.

Nechť G je subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$. Grupu G_ν nazveme *α-složkou* resp. *β-složkou* tohoto součinu, jestliže $G \cap \overline{G}_\nu \neq 0$ resp. $G \cap \overline{G}_\nu = 0$. Označme A resp. B množinu indexů všech α-složek resp. β-složek tohoto součtu. Množinu všech prvků $x(.) \in G$, pro něž platí $x(\beta) = 0$ pro $\beta \in B$, nazveme *α-částí* a množinu všech prvků $x(.) \in G$, pro něž platí $x(\alpha) = 0$ pro $\alpha \in A$, nazveme *β-částí* tohoto součtu.

Věta. *Nechť l-grupa G je redukovaný subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}$, nechť A resp. B značí množinu indexů α-složek resp. β složek. Pak průnik J množiny všech maximálních komponent v G je roven β-části daného součtu a je tedy isomorfní s β-subdirektním součtem systému jednoduše uspořádaných grup $\{H_\nu\}_{\nu \in B}$, kde $H_\nu \subset G_\nu$ pro $\nu \in B$; l-faktorgrupa G/J je isomorfní s α-subdirektním součtem jednoduše uspořádaných grup $\{G_\nu\}_{\nu \in A}$.*

Podáme ještě charakterisaci l-grup, jejichž každá komponenta je přímý sčítanec.

Věta. *Jestliže každá komponenta l-grupy G je přímým sčítancem, pak G je redukovaným subdirektním součtem systému jednoduše uspořádaných grup a v libovolné takové representaci je přímým součtem své α-části a β-části a obě části jsou l-grupy, v nichž každá komponenta je přímý sčítanec.*

Je-li l-grupa G redukovaný subdirektní součet systému jednoduše uspořádaných grup, je-li přímým součtem své α-části a β-části a jsou-li obě tyto části l-grupy, jejichž každá komponenta je přímý sčítanec, pak v G je každá komponenta přímý sčítanec.

František Šik, Brno