тогда, если в системе $\mathfrak{M}$ существует хоть одна бесконечная D-система $\mathfrak{S}_{\delta_2}$, или если же периодическая часть группы G является p-примарной или нулевой.

Теорема 6. *Для подгруппы $H \subseteq G$ справедливо $\mathrm{r}_D(H) \leqq \mathrm{r}_D(G)$, для прямой суммы $G = \sum_{\iota \in I}' G_\iota$ имеет место $\mathrm{r}_D(G) = \sum_{\iota \in I} \mathrm{r}_D(G_\iota)$.*

Важное значение имеет утверждение леммы 10, при помощи которой доказывается теорема 8.

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех решений уравнения $n \,.\, x = g_0$, $0 \neq g_0 \in G$, n — натуральное число, в группе G. Тогда или $\mathfrak{M} = \emptyset$ или справедливы утверждения:*

Если $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$, то $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$; если $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, то $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) < \aleph_0$.

Теорема 8. *Если $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ (или $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$), то $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G)$.*

В теореме 7, в теореме 9 и в теореме 10 исследуются условия, при которых для подгруппы $H \subseteq G$ имеет место соотношение

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H)\,. \tag{2}$$

С этой целью вводится понятие слабо сервантной подгруппы:

Подгруппу H группы G называем *слабо сервантной в G*, если каждый класс фактор-группы G/H, порядок которого равен простому числу, содержит элемент того же порядка.

Теорема 9. *Если $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ (или $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$), то для любой подгруппы $H \subseteq G$ справедливо соотношение* (2).

Теорема 10. *Для группы G, $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, и ее подгруппы $H \subseteq G$ имеет место равенство* (2) *тогда и только тогда, если H является слабо сервантной в G.*

Наконец, в теоремах 11 и 12 говорится о периодических и смешанных группах, имеющих конечный D-ранг; сравнивается D-ранг с *определением ранга* $\mathrm{r}_P(G)$ абелевой группой G, *данным Прюфером*. В случае p-примарной группы и в случае группы без кручения всегда $\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{r}_D(G)$; в общем можно только утверждать, что $\mathrm{r}_P(G) \leqq \mathrm{r}_D(G)$. (*Замечание 6.*)

Zusammenfassung

D-RANG EINER ABELSCHEN GRUPPE

VLASTIMIL DLAB, Prag.

(Eingegangen am 9. April 1956.)

Der Autor nennt in der Arbeit eine Menge $(g_\iota)_{\iota \in I}$ von Elementen der abelschen Gruppe G *D-unabhängig*, wenn jede Beziehung

$$k_1 \,.\, g_{\iota_1} + k_2 \,.\, g_{\iota_2} + \ldots + k_n \,.\, g_{\iota_n} = 0$$

bei ganzen k_i und beliebigem natürlichem n $k_i \cdot g_{\iota_i} = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ nach sich zieht. Der finite Charakter der Definition garantiert die Existenz eines *maximalen D-unabhängigen Systems* (von Null verschiedener Elemente), dessen Mächtigkeit aber im Allgemeinen kein Invariant der Gruppe G ist (*Bemerkung 1*). In einer nichttrivialen p-primären Gruppe $G_{(p)}$ haben aber alle maximalen D-unabhängigen Systeme (kurz D-Systeme) dieselbe Mächtigkeit (*Satz 1*), die wir den *D-Rang* $r_D(G_{(p)})$ der Gruppe $G_{(p)}$ nennen; für $G_{(p)} = 0$ definieren wir $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) = 0$. Den D-Rang $\mathrm{r}_D(G)$ der allgemeinen abelschen Gruppe G definieren wir durch die Beziehung

$$r_D(G) = \mathrm{r}(G) + \sum_p r_D(P_{(p)})\ ;$$

hier ist $P = \sum_p{}' P_{(p)}$ die direkte Zerlegung der maximalen periodischen Untergruppe in p-primäre Komponenten und $\mathrm{r}(G)$ der Rang der Gruppe (im gewöhnlichen Sinne). Wenn die Gruppe G nichttrivial, d. h. von der Nullgruppe verschieden, ist, so ist offenbar $\mathrm{r}_D(G) > 0$, ist die Gruppe G torsionsfrei, so ist $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G)$.

Unter den D-Systemen der Gruppe G sind besonders wichtig die *kanonischen D-Systeme*, d. h. diejenigen D-Systeme, deren jedes Element entweder eine unendliche oder eine Primzahlpotenzordnung hat. Wenn $\mathfrak{S}$ ein kanonisches D-System der Gruppe G bedeutet, dann gilt die Gleichheit

$$\mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{r}_D(G)\ ^{1});\tag{1}$$

im Falle, daß $r_D(G)$ endlich ist und irgend eine D-unabhängige Menge $\mathfrak{S}$ der Gleichheit (1) genügt, ist $\mathfrak{S}$ ein kanonisches D-System der Gruppe G (*Satz 2* und *Satz 3*). Weiterhin gilt:

Satz 5. *$\mathfrak{M} = (G_\delta)_{\delta \in \Delta}$ sei das System aller D-Systeme einer nichttrivialen Gruppe G; bezeichnen wir $\mathrm{m}(\mathfrak{S}_\delta) = \lambda_\delta$ für jedes $\delta \in \Delta$. Dann hat die Menge $\Lambda = (\lambda_\delta)_{\delta \in \Delta}$ der Kardinalzahlen λ_δ ein größtes Element λ_{δ_1} und es ist $\mathrm{r}_D(G) = \lambda_{\delta_1}$. Hierbei enthält die Menge Λ gerade ein einziges Element $\mathrm{r}_D(G)$, wenn und nur wenn im System $\mathfrak{M}$ wenigstens ein unendliches D-System $\mathfrak{S}_{\delta_2}$ existiert, oder wenn die maximale periodische Untergruppe der Gruppe G p-primär oder trivial ist.*

Satz 6. *Es ist für die Untergruppe $H \subseteq G$ $\mathrm{r}_D(H) \leqq r_D(G)$ und für die direkte Summe $G = \sum_{\iota \in I}{}' G_\iota$ $r_D(G) = \sum_{\iota \in I} \mathrm{r}_D(G_\iota)$.*

Die Aussage, die im Hilfssatz 10 enthalten ist, ist besonders wichtig; mit ihrer Hilfe ist dann der Satz 8 bewiesen.

Hilfssatz 10. *$\mathfrak{M}$ sei die Menge aller Lösungen $x \in G$ der Gleichung $n \cdot x = g_0$, wo n natürlich und $0 \neq g_0 \in G$ ist. Dann ist entweder $\mathfrak{M} = \emptyset$ oder es ist für $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$ und für $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$ ebenfalls $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) < \aleph_0$.*

---

[1]) $\mathrm{m}(\mathfrak{M})$ ist die Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{M}$.

Satz 8. *Falls* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ *(bzw.* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$*) ist, so ist* $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G)$.

Die Sätze 7, 9 und 10 untersuchen, unter welchen Bedingungen für die Untergruppe $H \subseteq G$ die Beziehung

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H) \tag{2}$$

richtig ist. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der schwachen Servanzuntergruppe ein:

Die Untergruppe H der Gruppe G nennen wir eine *schwache Servanzuntergruppe in* G, wenn jede Restklasse der Faktorgruppe G/H von Primzahlordnung ein Element derselben Ordnung enthält.

Satz 9. *Falls* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ *(bzw.* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$*) ist, dann gilt für jede beliebige Untergruppe* $H \subseteq G$ *die Beziehung* (2).

Satz 10. *Falls* $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$ *ist, dann gilt für ihre Untergruppe* $H \subseteq G$ *die Gleichheit* (2) *dann und nur dann, wenn* H *eine schwache Servanzuntergruppe in* G *ist.*

Am Ende werden in den Sätzen 11 und 12 die periodischen und gemischten Gruppen von endlichem D-Range untersucht, und es ist der D-Rang mit der *Prüferschen Definition des Ranges* $\mathrm{r}_P(G)$ der abelschen Gruppe G verglichen. Für p-primäre und torsionsfreie Gruppen ist immer $\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{r}_D(G)$; im Allgemeinen gilt allerdings nur die Beziehung $\mathrm{r}_P(G) \leqq \mathrm{r}_D(G)$. *(Bemerkung 6.)*