Резюме

D-РАНГ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

ВЛАСТИМИЛ ДЛАБ (Vlastimil Dlab), Прага.

(Поступило в редакцию 9/IV 1956 г.)

Автор называет в статье множество элементов $(g_\iota)_{\iota \in I}$ абелевой группы G *D-независимым*, если из всякого соотношения

$$k_1 \cdot g_{\iota_1} + k_2 \cdot g_{\iota_2} + \ldots + k_n \cdot g_{\iota_n} = 0\,,$$

k_i — целые числа, n — произвольное натуральное число, вытекает $k_i \cdot g_{\iota_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Финитный характер определения обеспечивает существование *максимальной линейно D-независимой системы* (отличных от нуля элементов); однако, ее мощность в общем случае не является инвариантом группы G (*Замечание* 1). Но если же $G_{(p)}$ является ненулевой p-примарной группой, то все максимальные линейно D-независимые системы (коротко D-системы) имеют одну и ту же мощность (*Теорема* 1), которую назовем *D-рангом* $\mathrm{r}_D(G_{(p)})$ группы $G_{(p)}$; для $G_{(p)} = 0$ положим $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) = 0$. D-ранг $\mathrm{r}_D(G)$ общей ненулевой абелевой группы G определим уравнением

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G) + \sum_p \mathrm{r}_D(P_{(p)})\,,$$

причем $P = \sum_p{}' P_{(p)}$ является прямым разложением периодической части группы G на p-примарные компоненты, а $\mathrm{r}(G)$ означает ранг (в обыкновенном смысле) группы G. Если группа G является ненулевой, то, очевидно, $\mathrm{r}_D(G) > 0$, если G — группа без кручения, то $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G)$.

Из всех D-систем группы G особое место занимают *канонические D-системы*, т. е. такие D-системы, каждый из элементов которых является элементом или бесконечного порядка или порядка, равного степени простого числа. Если $\mathfrak{S}$ — каноническая D-система группы G, то

$$\mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{r}_D(G)\,;^{1}) \tag{1}$$

если же $\mathrm{r}_D(G)$ конечен и если какое-нибудь D-независимое множество $\mathfrak{S}$ элементов группы G удовлетворяет уравнению (1), то $\mathfrak{S}$ есть каноническая D-система группы G (*Теорема* 2 и *Теорема* 3). Далее, справедлива также

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{M} = (\mathfrak{S}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ — *совокупность всех D-систем ненулевой группы G; обозначим* $\mathrm{m}(\mathfrak{S}_\delta) = \lambda_\delta$ *для* $\delta \in \Delta$. *Тогда множество кардинальных чисел* $\Lambda = (\delta_\delta)_{\delta \in \Delta}$ *содержит наибольший элемент* λ_{δ_1} *и* $\lambda_{\delta_1} = \mathrm{r}_D(G)$. *Притом множество* Λ *содержит только один элемент* $\mathrm{r}_D(G)$ *тогда и только*

[1]) Символом $\mathrm{m}(\mathfrak{M})$ обозначена мощность множества $\mathfrak{M}$.