Je-li G nenulová, konečná a je-li $\mathfrak{G}$ soustava generátorů této grupy o nejmenším počtu prvků, potom $\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{m}(\mathfrak{G})$. *Je-li G nekonečná, označme $\mathfrak{S} = (\Gamma_\iota)_{\iota \in I}$ systém všech konečných podmnožin prvků grupy G; nechť $\mathfrak{G}_\iota$, $\iota \in I$ je soustava generátorů o nejmenším počtu prvků podgrupy grupy G, vytvořené prvky z $\Gamma_\iota (\iota \in I)$. Označme* $\mathrm{m}(\mathfrak{G}_\iota) = n_\iota$. *Existuje-li v množině přirozených čísel $(n_\iota)_{\iota \in I}$ maximální prvek n_{ι_0}, potom* $\mathrm{r}_P(G) = n_{\iota_0}$; *neexistuje-li takový prvek (t. j. tato množina je neohraničená), je* $\mathrm{r}_P(G) = \infty$. *Pro nulovou grupu G je* $\mathrm{r}_P(G) = 0$.

Snadno se přesvědčíme, že pro p-primární Abelovy grupy splývá pojem D-hodnosti s Prüferovou definicí hodnosti Abelovy grupy v tom smyslu, že libovolné nekonečné D-hodnosti odpovídá Prüferova hodnost ∞. Předpokládejme nejprve za tím účelem, že p-primární grupa $G_{(p)}$ je konečná. Potom je $G_{(p)}$ konečným direktním součtem p-primárních cyklických grup a vidíme ihned, že

$$\mathrm{r}_P(G_{(p)}) = r_D(G_{(p)}) . \tag{16}$$

Předpokládejme dále, že $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) < \aleph_0$. Budiž Γ libovolná konečná množina prvků z $G_{(p)}$ a $G'_{(p)}$ konečná podgrupa grupy $G_{(p)}$, vytvořená prvky z této množiny; tedy $\mathrm{r}_D(G'_{(p)}) \leqq \mathrm{r}_D(G_{(p)})$. Jelikož $G'_{(p)}$ je konečná, dostáváme $\mathrm{r}_P(G'_{(p)}) = \mathrm{r}_D(G'_{(p)}) \leqq \mathrm{r}_D(G_{(p)})$. S druhé strany však pro konečnou dolní vrstvu $\overset{\circ}{G}_{(p)}$ grupy $G_{(p)}$ je podle předchozí úvahy a poznámky 3 $\mathrm{r}_P(\overset{\circ}{G}_{(p)}) = \mathrm{r}_D(\overset{\circ}{G}_{(p)}) = \mathrm{r}_D(G_{(p)})$, takže skutečně platí (16).

Je-li nakonec $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) \geqq \aleph_0$, potom dolní vrstva $\overset{\circ}{G}_{(p)}$ je direktním součtem nekonečně mnoha cyklických grup $G(p)$, takže ihned dostáváme $\mathrm{r}_P(G_{(p)}) = \infty$.

Stejnými úvahami, využívajíce známé věty o rozkladu Abelovy grupy s konečným počtem generátorů na direktní součet cyklických podgrup, se snadno přesvědčíme, že platí, je-li grupa G aperiodická,

$$\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{r}_D(G) , \tag{17}$$

a že pro libovolnou Abelovu grupu G platí

$$\mathrm{r}_P(G) \leqq \mathrm{r}_D(G) ; \tag{18}$$

při tom oba vztahy (17) a (18) chápeme v případě, je-li $\mathrm{r}_P(G) = \infty$, ve zřejmém smyslu. Příklad konečné cyklické grupy E z poznámky 1 pak ukazuje, že vztah (18) mezi Prüferovou hodností a D-hodností Abelovy grupy může být ostrou nerovností; je totiž zřejmě $r_P(E) = 1$, $\mathrm{r}_D(E) = n$, $n \geqq 2$.

LITERATURA

[1] *А. Г. Курош*: Теория групп, 2-ое изд., Москва 1953.

[2] *H. Prüfer*: Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Zeitschrift **17** (1923), 35—61.