rovnoběžné, byly by podle 3.28 i přímky p_1, p_2 rovnoběžné, což by byl spor s předpokladem. Z 4.9 plyne, že τ_1, τ_2 jsou různoběžné. Označme q jejich průsečnici. Podle 3.36 je přímka q kolmá k rovině τ, takže s ní má podle 4.3 společný bod; označme jej A. Protože $A \in q \subset \tau_i$ $(i = 1, 2)$, $A \in \tau$, leží bod A na průsečnici p_i rovin τ_i, τ. Tedy přímky p_1, p_2 mají společný aspoň jeden bod.

4.12. *Jestliže přímky p, q leží v rovině a jsou disjunktní, pak jsou rovnoběžné.*

Důkaz plyne z 4.11.

4.13. *Nechť přímka p a bod A leží v rovině τ, nechť A neleží na p. Potom existuje v rovině τ právě jedna přímka, která prochází bodem A a je disjunktní s přímkou p. Je to přímka, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p.*

Důkaz. Podle 3.3 existuje v rovině τ přímka q, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p. Přímky p, q nejsou totožné, neboť A leží na q a neleží na p. Tedy jsou podle 1.15 disjunktní. Jestliže přímka q_1 leží v rovině τ, prochází bodem A a je disjunktní s přímkou p, pak je podle 4.12 rovnoběžná s p a podle 3.3 totožná s q.

4.14. *Nechť přímky p, q leží v rovině. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, q jsou disjunktní rovnoběžné,*
2. *p, q jsou různoběžné,*
3. *p, q jsou totožné.*

Důkaz plyne z 1.17 a 4.12.

Резюме

К ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ
I. НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ФИГУРЫ

БОРИС ГРУБЕР (Boris Gruber), Подебрады.

(Поступило в редакцию 3/X 1955 г.)

Работа посвящена аксиоматическому построению оснований трехмерной евклидовой геометрии. В настоящей первой части исследуются свойства инцидентности, параллельности, перпендикулярности, равно как и следствия пятого постулата Евклида о параллельных.

Основными понятиями являются: *точка, неориентированное направление и перпендикулярность.* Каждой паре различных точек A, B поставлено в соответствие одно и только одно (неориентированное) направление, обозначаемое через $\zeta(AB)$. Два направления z_1, z_2 являются, или взаимно перпендикулярными (символ $z_1 \perp z_2$), или неперпендикулярными (символ

z_1 non $\perp z_2$). Множество всех точек называем пространством и обозначаем через $\mathbf{P}$. Эти понятия удовлетворяют следующим девяти аксиомам:

I. *Существует по меньшей мере одна точка и по меньшей мере одно (неориентированное) направление.*

II. $A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BA)$.

III. $\zeta(AB) = \zeta(AC),\ B \neq C \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BC)$.

IV. *Если дана точка A и направление z, то существуют точки B, C так, что $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) \neq z$.*

V. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_2 \perp z_1$.

VI. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_1 \neq z_2$.

VII. *Если $z_1 \neq z_2$, то существует в точности одно направление z, для которого $z_1 \perp z \perp z_2$.*

VIII. $\zeta(AB) \perp z,\ \zeta(AC) \perp z,\ B \neq C \Rightarrow \zeta(BC) \perp z$.

IX. *Если $A \neq B$ и z_1 non $\perp z_2$, то существует точка C, для которой $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$.*

На основании первых четырех аксиом разработано главным образом понятие прямой, затем присоединением дальнейших четырех, понятие плоскости. Из девятой аксиомы следует пятый постулат Евклида о параллельных.

Прямая вводится так: *множество $M \subset \mathbf{P}$ мы называем максимальным множеством со свойством V, если*

1. *M обладает свойством V,*

2. *если $M \subset M' \subset \mathbf{P}$, $M \neq M'$, то M' не обладает свойством V.*

Тогда мы называем прямой такое множество $p \subset \mathbf{P}$, которое

1. *содержит хотя бы две различные точки,*

2. *является максимальным множеством, имеющим следующее свойство:*

$$A, B, C, D \in p, \quad A \neq B,\ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD)\,.$$

Очевидно, любым двум различным точкам прямой p отвечает одно и то же (неориентированное) направление, которое мы называем неориентированным направлением прямой p и обозначаем через $\zeta(p)$. Две прямые мы называем параллельными, если их неориентированное направление одинаково. Мы называем их взаимно перпендикулярными, если их направления перпендикулярны, и пересекающимися, если они имеют в точности одну общую точку.

Для большего удобства при работе с понятием прямой мы будем пользоваться следующей теоремой:

Пусть A — точка, z — направление; тогда множество всех точек X, для которых имеет место или $X = A$ или $\zeta(AX) = z$, является прямой, содер-