Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

РАСШИРЕНИЕ МЕРЫ НА σ-КОЛЬЦО, СОДЕРЖАЩЕЕ ВСЕ ОДНОТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

ВАЦЛАВ ФАБИАН (Václav Fabian), Прага.

(Поступило в редакцию 11/XI 1955 г.) DT: 519.48

В настоящей работе показано, что для каждой меры существует такое ее расширение ν, что каждый атом является ν-измеримым. Отсюда следует, что всякая мера допускает расширение на σ-кольцо, содержащее все одноточечные множества.

Пусть μ — мера, то есть σ-аддитивная неотрицательная множественная функция, определенная на σ-кольце подмножеств множества X. Область определения меры ν обозначим символом $\mathbf{S}_\nu$. Мы говорим, что ν является расширением μ и пишем $\nu \succ \mu$, если ν есть мера, $\bigcup \mathbf{S}_\nu = X$, $\mathbf{S}_\nu \supset \mathbf{S}_\mu$ и $\nu(A) = \mu(A)$ для всякого $A \in \mathbf{S}_\mu$. Если ν — мера, то ν^* соотв. ν_* означает внешнюю, соотв. внутреннюю меру, индуцированную мерой ν. Если $\mathbf{M}$ — система множеств, то символ $\sigma(\mathbf{M})$ означает наименьшее σ-кольцо, содержащее систему $\mathbf{M}$. В частности, $\sigma(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Для любой меры ν и любого $x \in X$ обозначим

$$A_\nu(x) = \bigcap \{A;\ x \in A \in \mathbf{S}_\nu\};$$

множества $A_\nu(x)$ мы называем ν-атомами и их систему обозначаем через $\mathbf{A}_\nu$. В частности, если $\nu = \mu$, то мы пишем вместо $\mathbf{S}_\mu$, $A_\nu(x)$, $\mathbf{A}_\nu$ только $\mathbf{S}$, $A(x)$, $\mathbf{A}$ и говорим просто об атомах. Ясно, что $\mathbf{A}$ есть разбиение множества X на классы.

Лемма 1. *Для каждой последовательности атомов A_i существует последовательность $\mathbf{S}$-измеримых множеств B_i так, что для любого i имеем $B_i \supset A_i$ и неравенство $A_i \neq A_j$ влечет за собой $B_i \cap B_j = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть $A_i = A(x_i) \neq A_j = A(x_j)$. Тогда существует такое $A \in \mathbf{S}$, что $x_i \in A$, x_j non $\in A$ и такое $B \in \mathbf{S}$, что x_i non $\in B$, $x_j \in B$. Если положить $C_{ij} = A - B$ и $C_{ji} = B - A$, то получаем $x_i \in C_{ij}$, $x_j \in C_{ji}$, $C_{ij} \cap C_{ji} = \emptyset$.

Предположим, что мы уже выделили таким образом множества C_{ij} для всех индексов i, j, для которых $A_i \neq A_j$. Для остальных положим $C_{ij} = C$, где C есть элемент $\mathbf{S}$ и $C \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Покажем теперь, что множества $B_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_{ij}$ обладают требуемым свойством. Имеем $B_i \in \mathbf{S}$, $A_i \subset C_{ij}$ для всех j, откуда $A_i \subset B_i$. Если для индексов i и j имеет место $A_i \neq A_j$, то $B_i \cap B_j \subset C_{ij} \cap C_{ji} = \emptyset$.

Обозначим теперь символом $\mathbf{N}$ систему всех *неизмеримых атомов*, т. е. $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{S}$. Далее *обозначим*

$$\mathbf{M} = \sigma(\mathbf{N}) = \{\bigcup \mathbf{B};\ \mathbf{B} \subset \mathbf{N},\ \mathbf{B} \text{ — не более, чем счетная система}\}.$$

Лемма 2. *Имеет место*

$$\mathbf{M} \cap \mathbf{S} = \{\emptyset\}, \tag{1}$$

$$A \in \mathbf{M}, \quad B \in \mathbf{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathbf{M} \tag{2}$$

и

$$A \in \mathbf{M}, \quad B \in \mathbf{S}, \quad B \subset A \Rightarrow B = \emptyset. \tag{3}$$

Доказательство. Докажем соотношение (1). Пусть $\emptyset \neq A \in \mathbf{M} \cap \mathbf{S}$. Можно написать $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, где k — натуральное число или символ ∞, а A_i — дизъюнктные атомы из $\mathbf{N}$. По лемме 1 существует последовательность дизъюнктных $B_i \in \mathbf{S}$ так, что $B_i \supset A_i$. Итак, $A_i = A \cap B_i \in \mathbf{S}$, что противоречит предположению $A_i \in \mathbf{N}$, и соотношение (1) доказано.

Докажем (2) и (3). Из соотношения $A \cap B \in \mathbf{N} \cup \{\emptyset\}$ для любых $A \in \mathbf{N}$, $B \in \mathbf{S}$ следует (2). Итак, если $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{S}$, $B \subset A$, то согласно (2) и (1) будет $B = A \cap B \in \mathbf{M} \cap \mathbf{S} = \{\emptyset\}$, что доказывает и соотношение (3).

Обозначим

$$\mathscr{H} = \{[A, M, N];\ A \in \mathbf{S},\ M \in \mathbf{M},\ N \in \mathbf{M},\ M \subset A,\ N \cap A = \emptyset\}.$$

Лемма 3.

$$\sigma(\mathbf{S} \cup \mathbf{N}) = \{B;\ B = (A - M) \cup N,\ [A, M, N] \in \mathscr{H}\} \tag{4}$$

$$\{[A_i, M_i, N_i] \in \mathscr{H} (i = 1, 2),\ (A_1 - M_1) \cup N_1 = (A_2 - M_2) \cup N_2\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [A_1, M_1, N_1] = [A_2, M_2, N_2]. \tag{5}$$

Доказательство. Соотношение (4) очевидно. Пусть выполнены условия импликации (5). Тогда $A_2 - A_1 \subset N_1 \cup M_2$ и в силу (3) получаем $A_2 - A_1 = \emptyset$. Из симметрии следует $A_1 = A_2$. Отсюда и из соотношений $M_i \subset A_i$, $N_i \cap A_i = \emptyset$ следует $N_1 = N_2$ и $M_1 = M_2$. Этим и завершается доказательство.

Мы показали, что каждому множеству $B \in \sigma(\mathbf{S} \cup \mathbf{N})$ поставлен в однозначное соответствие элемент $[B^1, B^2, B^3] \in \mathscr{H}$ так, что $B = (B^1 - B^2) \cup B^3$.

Лемма 4. *Если* $B_1, B_2 \in \sigma(\mathbf{S} \cup \mathbf{N})$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, *то* $B_1^s \cap B_2^s = \emptyset$ *для* $s = 1, 2, 3$.

Доказательство. Очевидно, $B_1^3 \cap B_2^3 = \emptyset$. Далее имеем

$$B_1^1 \cap B_2^1 \subset (B_1 \cup B_1^2) \cap (B_2 \cup B_2^2) = (B_1 \cap B_2^2) \cup (B_2 \cap B_1^2) \cup (B_1^2 \cap B_2^2).$$

Согласно (2), множество в правой части является, однако, элементом системы $\boldsymbol{M}$, следовательно, согласно (3), будет $B_1^1 \cap B_2^1 = \emptyset$ и тем более $B_1^2 \cap B_2^2 = \emptyset$.

Теорема 1. *Существует такое расширение ν меры μ, что*

$$\boldsymbol{A}_\nu = \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{S}_\nu . \tag{6}$$

Если f — множественная функция, определенная на $\boldsymbol{N}$, и если имеет место $\sum_{A \in N} f(A) < +\infty$,

$$A \in \boldsymbol{N} \Rightarrow 0 \leqq f(A) \leqq \mu^*(A) ,$$

то существует ν так, что справедливо (6) *и*

$$A \in \boldsymbol{N} , \quad \mu_*(A) < +\infty \Rightarrow \nu(A) = f(A) . \tag{7}$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы содержится во втором (достаточно, напр., выбрать $f = 0$), которое мы и докажем:

1. Если $\mu(\emptyset) = +\infty$, то положим $\nu(A) = +\infty$ для любого $A \in \sigma(\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{N})$. Очевидно, ν выполняет все требования теоремы 1.

2. Если же $\mu(\emptyset) < +\infty$, то $\mu(\emptyset) = 0$ и $\mu_*(A) = 0$ для любого $A \in \boldsymbol{M}$. Определим ν на $\sigma(\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{S}_\nu$ при помощи соотношений

$$A \in \boldsymbol{M} \Rightarrow \nu(A) = \sum_{A \supset A_i \in \boldsymbol{N}} f(A_i) ,$$

$$A \in \boldsymbol{S}_\nu \Rightarrow \nu(A) = \mu(A^1) - \nu(A^2) + \nu(A^3) .$$

Это определение возможно, ибо по условиям теоремы $\nu(A) < +\infty$ для любого $A \in \boldsymbol{M}$. Заметим, что $\nu \succ \mu$ и, если определим $\nu_{\boldsymbol{M}}(A) = \nu(A)$ для $A \in \boldsymbol{M}$, то $\nu_{\boldsymbol{M}}$ — конечная мера на $\boldsymbol{M}$.

Докажем прежде всего, что ν неотрицательна; для этого достаточно доказать, что для любого $A \in \boldsymbol{S}_\nu$ будет $\nu(A^1) \geqq \nu(A^2)$. По определению A^i имеем $A^2 \subset A^1$. Из того, что $A^2 \in \boldsymbol{M}$, следует существование дизъюнктных последовательностей N_i, B_i таких, что $N_i \in \boldsymbol{N}$, $B_i \in \boldsymbol{S}$, $N_i \subset B_i$, $A^2 = \bigcup_{i=1}^k N_i \subset \bigcup_{i=1}^k B_i \subset A^1$. Итак, $\nu(A^2) = \sum_{i=1}^k f(N_i) \leqq \sum_{i=1}^k \mu^*(N_i) \leqq \sum_{i=1}^k \mu(B_i) \leqq \mu(A^1) = \nu(A^1)$ и неотрицательность ν доказана.

Докажем σ-аддитивность. Если $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность дизъюнктных множеств из $\boldsymbol{S}_\nu$, то по лемме 4 и последовательность $\{A_i^s\}_{i=1}^\infty$ будет последовательностью дизъюнктных множеств для любого $s = 1, 2, 3$.

Обозначим $H = (\bigcup_{i=1}^\infty A_i^2) \cap (\bigcup_{i=1}^\infty A_i^3)$ и обратим внимание, что $H \in \boldsymbol{M}$. Положим

$$A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i , \quad B_1 = \bigcup_{i=1}^\infty A_i^1 , \quad B_2 = \bigcup_{i=1}^\infty A_i^2 - H , \quad B_3 = \bigcup_{i=1}^\infty A_i^3 - H .$$

Имеем $B_1 \in \mathbf{S}$, $B_2 \in \mathbf{M}$, $B_3 \in \mathbf{M}$, $B_2 \subset B_1$. Кроме того $B_1 \cap B_3 = \emptyset$, так как если $x \in B_1 \cap B_3$, то существуют индексы i, j так, что $x \in A_i^1 \cap A_j^3$, то-есть, $x \in A_i^2$, ибо в противном случае было бы $i \neq j$, $x \in A_i \cap A_j = \emptyset$. Итак, $x \in A_i^2 \cap \cap A_j^3 \subset H$. Это, однако, невозможно, так как $B_1 \cap B_3 \cap H = \emptyset$. Итак, действительно, $B_1 \cap B_3 = \emptyset$.

Далее,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} [(A_i^1 - A_i^2) \cup A_i^3] = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^1 - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^2) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^3 = (B_1 - B_2) \cup B_3 .$$

Этим мы показали, что $A^s = B_s$ $(s = 1, 2, 3)$. Воспользуемся тем, что $\nu_{\mathbf{M}}$ есть конечная мера на $\mathbf{M}$:

$$\nu(A) = \mu(A^1) - \nu_{\mathbf{M}}(A^2) + \nu_{\mathbf{M}}(A^3) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^1) - \nu_{\mathbf{M}}(A^2 \cup H) + \nu_{\mathbf{M}}(A^3 \cup H) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^1) - \sum_{i=1}^{\infty} \nu_{\mathbf{M}}(A^2) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_{\mathbf{M}}(A_i^3) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} [\mu(A_i^1) - \nu(A_i^2) + \nu(A_i^3)] = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) .$$

Итак, ν — мера; из ее построения ясно, что она удовлетворяет (6) и (7) и является расширением меры μ.

Теорема 2. *Существует такое расширение ν_0 меры μ, что $\{x\} \in \mathbf{S}_{\nu_0}$ для любого $x \in X$.*

Доказательство. Пусть $\nu \succ \mu$ и пусть справедливо (6). Из каждого $A \in \mathbf{A}$ выделим один элемент и обозначим через $T(A)$ множество, состоящее из этого элемента. Обозначим $M = \bigcup\{B; B = A - T(A), A \in \mathbf{A}\}$. Множества вида $(B - M) \cup N$, где $B \in \mathbf{S}_\nu$, $N \subset M$, образуют σ-кольцо, содержащее $\mathbf{S}_\nu$, равно как и все одноточечные множества. Определим на нем функцию ν_0 при помощи соотношения $\nu_0((B - M) \cup N) = \nu(B)$. Это определение вполне законно, так как если $(B_1 - M) \cup N_1 = (B_2 - M) \cup N_2$, то $D = (B_1 - B_2) \cup (B_2 - B_1) \subset M$, $D \in \mathbf{S}_\nu$. Имеем $D = \bigcup \mathbf{D}$, где

$$\mathbf{D} = \{A_\nu(x);\ x \in D\} \subset \mathbf{A}_\nu = \mathbf{A}.$$

Ни один из атомов не является частью M и, следовательно,

$$\mathbf{D} = \emptyset,\ D = \emptyset \text{ и } B_1 = B_2.$$

Мера ν_0 является расширением меры μ и теорема доказана.

Замечание. Покажем на примере, что пополнение меры μ не обязательно выполняет условие $A_\mu^- \subset \mathbf{S}_\mu^-$.

Пусть $X = C \cup (0, +\infty)$, где C — непустое множество, дизъюнктное с интервалом $(0, +\infty)$. Пусть $\mathbf{P}$ — система всех конечных или счетных последовательностей положительных чисел, $\mathbf{Q}$ — система всех множеств вида