Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

PŘÍSPĚVEK K THEORII NORMÁLNÍ KŘIVKY ČTYRROZMĚRNÉHO PROSTORU

KAREL SVOBODA, Brno.

(Došlo dne 20. června 1956.) DT: 513.616

V této práci je uvažována jednoduchá příbuznost, v níž si odpovídají přímky kubické nadplochy s dvojnou racionální normální křivkou čtvrtého stupně ve čtyrrozměrném prostoru. Tato příbuznost je určena tečnými prostory nadplochy.

1. Buď C racionální normální křivka čtvrtého stupně v projektivním čtyrrozměrném prostoru a J kubická nadplocha s dvojnou křivkou C. Připomeňme nejprve některé vlastnosti křivky C a nadplochy J, které uvádí na př. H. G. Telling v knize *The Rational quartic Curve in Space of three and four Dimensions* (Cambridge University Press, London, 1936).

Nadplocha J obsahuje dvě soustavy přímek, a to soustavu bisekant křivky C, jimiž je vytvořena, a soustavu řídicích přímek kvadratických involucí na křivce C. Přímky první soustavy nazveme *binárními* a přímky druhé soustavy *unárními přímkami nadplochy* J. Obecným bodem této nadplochy, který neleží na křivce C, jdou celkem tři přímky nadplochy, a to jedna binární a dvě unární přímky; jedna z obou unárních přímek splyne s příslušnou binární přímkou právě tehdy, když uvažovaný bod je na tečně křivky C.

Zvolme na nadploše J libovolnou unární přímku u, která není tečnou křivky C. Binární přímky, které protínají tuto unární přímku, určují na křivce C kvadratickou involuci a tvoří kubickou plochu $[u]$, jejíž řídicí přímkou je unární přímka u. Plocha $[u]$ obsahuje dvě tečny křivky C v samodružných bodech M, N uvedené involuce. Je-li přímka u tečnou křivky C v bodě P, je plocha $[u]$ kubickým kuželem, který má vrchol v bodě P a prochází křivkou C. Prostory, které se dotýkají nadplochy J podél binárních přímek plochy $[u]$, vytvoří kvadratickou kuželovou nadplochu druhého druhu, jejíž vrcholovou hranou je přímka u. Kubické plochy $[u_1]$ a $[u_2]$, určené dvěma různými unárními přímkami u_1 a u_2, mají společnou právě jednu binární přímku, jejíž průsečíky s křivkou C tvoří společný pár obou involucí, určených na křivce C unárními přímkami u_1 a u_2.

Unární přímky, které protínají danou binární přímku b, určenou body M, N křivky C, tvoří kubickou zborcenou plochu (b), v níž je nadplocha J proťata prostorem, který se jí dotýká podél přímky b. Plocha (b) má v přímce b dvojnou přímku a v tečnách křivky C v bodech M, N torsální přímky. Jednoduchou přímkou plochy (b) je unární přímka u, ležící v rovině společné oskulačním prostorům křivky C v bodech M, N. Je-li přímka b tečnou křivky C v bodě P, splyne jednoduchá přímka u plochy (b) s přímkou b. Dvě zborcené kubické plochy (b_1) a (b_2), určené na nadploše J jejími binárními přímkami b_1 a b_2, mají společnou unární přímku, ležící v rovině, v níž se protínají prostory dotýkající se nadplochy J podél binárních přímek b_1 a b_2.

Přiřaďme každé binární přímce b nadplochy J tu unární přímku u, která je jednoduchou přímkou zborcené plochy (b), v níž je nadplocha J proťata prostorem dotýkajícím se jí podél binární přímky b. Je-li binární přímce b přiřazena tímto způsobem unární přímka u, je zřejmé, že obráceně unární přímce u přísluší jednoznačně binární přímka b, neboť unární přímkou prochází právě jeden tečný prostor nadplochy J, který se jí dotýká podél binární přímky b, jíž jsme přiřadili unární přímku u. Odtud je patrno, že *tečné prostory nadplochy J určují jednojednoznačnou příbuznost mezi binárními a unárními přímkami.* Unární (binární) přímku, která je v této příbuznosti přiřazena dané binární (unární) přímce, nazveme *unární (binární) přímkou sdruženou k dané binární (unární) přímce vzhledem ke křivce C.* Nebude-li obav z nedorozumění, budeme mluviti jednodušeji o dvojici sdružených přímek na nadploše J vzhledem ke křivce C.

Z předcházejících poznámek je patrno, že *binární přímka splývá se sdruženou unární přímkou právě tehdy, když je tečnou křivky C.* Plocha tečen křivky C je tedy množinou přímek nadplochy J, které splývají se svými sdruženými přímkami. Není-li binární přímka tečnou křivky C, určuje dvě různé její tečny, které protínají sdruženou unární přímku. Odtud plyne, že výše uvedená příbuznost je dokonale určena dvojicemi tečen křivky C.

2. Odvodíme některé jednoduché vlastnosti sdružených binárních a unárních přímek na nadploše J. Použijeme k tomu jistého zobrazení nadplochy J na rovinu, přestože by nebylo obtížné postupovati přímými úvahami ve čtyrrozměrném prostoru. Za tím účelem objasníme nejprve podstatu tohoto zobrazení, jímž se zabýval R. K. Wakerling v pojednání *The Chordal Hypersurfaces of a rational Curve* (Duke Mathematical Journal, Vol. 14, 1947).

Zvolme pevnou oskulační rovinu π křivky C. Oskulační prostory křivky C protínají rovinu π v přímkách, jejichž obálkou je regulární kuželosečka K. Tímto způsobem je určeno jednojednoznačné zobrazení bodů křivky C na tečny kuželosečky K. Binární přímka b nadplochy J protíná křivku C v bodech M, N, jimž jsou v tomto zobrazení přiřazeny tečny m, n kuželosečky K. Přiřadíme-li nyní binární přímce b průsečík tečen m, n, dostaneme jednojednoznačné zobrazení binárních přímek nadplochy J na body roviny π, v němž tečnám křivky C přísluší body kuželosečky K. Tato kuželosečka je tedy obrazem plochy tečen křivky C.

Každé ploše, která je na nadploše J vytvořena jejími binárními přímkami, odpovídá v uvažovaném zobrazení v rovině π množina bodů na křivce. Pro naše účely je třeba zjistiti obraz binárních přímek, které tvoří kubickou plochu $[u]$. Dvojice oskulačních prostorů křivky C, určených v průsečících křivky C s binárními přímkami plochy $[u]$, jsou páry kvadratické involuce a protínají tedy rovinu π v dvojicích tečen kuželosečky K, tvořících na ní kvadratickou involuci. Obrazy jednotlivých binárních přímek plochy $[u]$ jsou proto průsečíky odpovídajících si tečen uvedené involuce na kuželosečce K a vyplňují osu této involuce. V uvažovaném zobrazení odpovídá tedy ploše $[u]$ přímka v rovině π a její průsečíky s kuželosečkou K jsou obrazy tečen křivky C ležících na ploše $[u]$. Právě uvedenou přímku v rovině π přiřadíme unární přímce u, čímž dostaneme jednojednoznačné zobrazení unárních přímek nadplochy J na množinu přímek v rovině π.

Z předcházejících poznámek je patrno, že binární přímka protíná unární přímku tehdy a jen tehdy, když bod zobrazující v rovině π binární přímku leží na přímce, která je obrazem unární přímky. Odtud plyne, že obrazem zborcené kubické plochy, vytvořené unárními přímkami protínajícími danou binární přímku, je svazek přímek, jehož vrcholem je obraz dvojné binární přímky této plochy.

V dalším budeme značiti stejným písmenem binární (unární) přímku nadplochy J i její obraz v rovině π.

3. Mějme nyní na nadploše J dvojici přímek sdružených vzhledem ke křivce C, a to binární přímku b a unární přímku u. Je-li binární přímka tečnou křivky C, splývá v této tečně také sdružená unární přímka. Obrazem této dvojice přímek na rovině π je pak bod b na kuželosečce K a její tečna u v bodě b. V opačném případě binární přímka b nesplývá se sdruženou unární přímkou u a protíná křivku C ve dvou různých bodech M, N, jejichž tečny označíme m, n. Obrazem zborcené plochy (b) je svazek přímek s vrcholem v bodě b, do něhož patří také obě tečny m, n, vedené bodem b ke kuželosečce K a zobrazující torsální přímky m, n plochy (b). Unární přímka u sdružená s binární přímkou b vzhledem ke křivce C je jednoduchou přímkou plochy (b) a určuje kubickou plochu $[u]$, na níž leží také tečny m, n křivky C. Obrazem této plochy na rovině π je přímka u, která prochází body dotyku tečen m, n kuželosečky K. Odtud je patrno, že *binární přímka b a s ní sdružená unární přímka u se zobrazují do roviny π jako bod b a přímka u, odpovídající si v polaritě určené v rovině π kuželosečkou K.* Obráceně lze snadno nahlédnouti, že bodu a jeho poláře vzhledem ke kuželosečce K odpovídají v uvažovaném zobrazení binární a unární přímka, které jsou k sobě přiřazeny ve výše uvedené příbuznosti přímek na nadploše J.

Užitím tohoto výsledku lze nyní snadno odvoditi vlastnosti sdružených přímek na nadploše J ze známých polárních vlastností kuželosečky. Provedeme to jen v několika příkladech, které mají jednoduchý geometrický význam pro soustavy kubických ploch na nadploše J.

Je-li b, u dvojice přímek sdružených vzhledem ke křivce C, leží binární přímka b' na ploše $[u]$ tehdy a jen tehdy, když sdružená unární přímka u' leží na ploše (b).

Tato vlastnost se získá z věty o záměnnosti pólu a poláry vzhledem ke kuželosečce. Uvedenou vlastnost lze vysloviti tak, aby lépe vynikl její geometrický význam pro řídicí přímky zborcených kubických ploch na nadploše J.

Dvojná přímka zborcené plochy (b') protíná jednoduchou přímku zborcené plochy (b) tehdy a jen tehdy, když dvojná přímka plochy (b) protíná jednoduchou přímku plochy (b').

Z předcházejícího výsledku plyne okamžitě tato vlastnost:

Jsou-li b_1, u_1 a b_2, u_2 dvě dvojice přímek sdružených vzhledem ke křivce C, je binární přímka b, určená unárními přímkami u_1, u_2, sdružena s unární přímkou, určenou binárními přímkami b_1, b_2.

Pro řídicí přímky uvažovaných ploch na nadploše J tedy dostáváme tento výsledek, vyjadřující v jiném tvaru právě uvedenou vlastnost.

Jsou-li (b_1) a (b_2) dvě zborcené kubické plochy na nadploše J, je binární přímka b, určená jednoduchými přímkami těchto ploch, dvojnou přímkou a unární přímka u, určená jejich dvojnými přímkami, jednoduchou přímkou téže zborcené kubické plochy na nadploše J.

Uveďme ještě následující vlastnost sdružených přímek na nadploše J, jejíž správnost je bezprostředně patrna z předcházejících výsledků.

Nechť b, u je dvojice přímek sdružených vzhledem ke křivce C. Probíhá-li binární přímka b' tvořicí přímky plochy $[u]$, probíhá sdružená unární přímka u' tvořicí přímky plochy (b). Probíhá-li unární přímka u' tvořicí přímky plochy (b), probíhá sdružená binární přímka b' tvořicí přímky plochy $[u]$.

Pro zborcené kubické plochy na nadploše J odtud dostáváme tento výsledek:

Dvojné přímky zborcených kubických ploch, jejichž jednoduché přímky vyplňují plochu (b), tvoří kubickou plochu $[u]$ s řídicí přímkou v jednoduché přímce u plochy (b). Jednoduché přímky zborcených kubických ploch, jejichž dvojné přímky vyplňují plochu $[u]$ s řídicí přímkou v jednoduché přímce u plochy (b), tvoří zborcenou kubickou plochu (b).

Podobným způsobem by bylo možné odvoditi ještě další vlastnosti sdružených přímek na nadploše J.

4. Ve shodě s pojmy zaváděnými v polární theorii kuželoseček nazveme *dvě binární (unární) přímky nadplochy J sdruženými vzhledem ke křivce C, když každá z nich protíná unární (binární) přímku sdruženou s druhou.* Odtud je patrno, že binární přímky sdružené s danou binární přímkou b tvoří kubickou plochu $[u]$, jejíž řídicí přímkou je unární přímka u sdružená s binární přímkou b. Podobně, unární přímky sdružené s danou unární přímkou u tvoří zborcenou kubickou plochu (b), jejíž dvojnou přímkou je binární přímka b sdružená s unární přímkou u.

Uvedeme nyní — na základě známých vlastností dvou polárně sdružených bodů nebo přímek vzhledem ke kuželosečce — nutné a postačující podmínky pro to, aby dvě binární nebo unární přímky byly sdruženy vzhledem ke křivce C. Za tím účelem přiřadíme každé binární nebo unární přímce dva (různé nebo splývající) body křivky C a dvě (různé nebo splývající) její tečny, a to tak, že binární přímce budou přiřazeny její průsečíky s křivkou C a tečny v těchto bodech a unární přímce tečny křivky C na ploše, jejíž řídicí přímkou je tato unární přímka, a jejich body dotyku s křivkou C. Je zřejmé, že dané binární a unární přímce jsou tímto způsobem přiřazeny tytéž body a přímky právě tehdy, když dané přímky jsou sdruženy vzhledem ke křivce C.

Užitím této úmluvy a známých polárních vlastností kuželosečky dostaneme pro sdružené binární nebo unární přímky tento výsledek.

Dvě binární (unární) přímky nadplochy J jsou sdruženy vzhledem ke křivce C tehdy a jen tehdy, když dvojice bodů nebo přímek jim přiřazených tvoří na křivce C harmonickou čtveřinu.

Vzhledem k jednojednoznačnému zobrazení binárních a unárních přímek nadplochy J na body a přímky roviny π a vzhledem k tomu, že kuželosečka indukuje na přímce involuci sdružených pólů a v bodě involuci sdružených polár, můžeme na nadploše J mluviti také o involuci sdružených binárních nebo unárních přímek. Připomenuté polární vlastnosti kuželosečky nás vedou tedy k poznatku, že sdružené binární přímky na ploše $[u]$ tvoří involuci binárních přímek, jejíž samodružné přímky jsou tečny křivky C, přiřazené unární přímce u. Podobně, sdružené unární přímky na ploše (b) tvoří involuci unárních přímek, jejíž samodružné přímky jsou tečny křivky C, přiřazené binární přímce b.

Všimneme si nejprve případu sdružených binárních přímek na ploše $[u]$. Přiřadíme-li každé binární přímce plochy $[u]$ její průsečík s unární přímkou u, dostaneme jednojednoznačnou příbuznost mezi binárními přímkami uvažované plochy a řadou bodů na přímce u. Odtud ihned plyne, že involuce binárních přímek na ploše $[u]$ určuje na unární přímce bodovou involuci se samodružnými body v průsečících unární přímky u s přiřazenými tečnami křivky C. Vzhledem k tomu můžeme předcházející nutnou a postačující podmínku pro sdružené binární přímky vysloviti v tomto tvaru.

Dvě binární přímky nadplochy J jsou sdruženy vzhledem ke křivce C tehdy a jen tehdy, když jejich průsečíky s unární přímkou u, která je jimi určena, oddělují harmonicky průsečíky přímky u s přiřazenými tečnami křivky C.

Obrátíme se ještě k případu sdružených unárních přímek na ploše (b). V tomto případě neexistuje jednojednoznačné přiřazení unárních přímek plochy (b) a jejich průsečíků s přímkou b. Lze však takové přiřazení získati mezi body