Две ориентированные кривые k_1, k_2 совпадают тогда и только тогда, если длины их дуг одинаковы и если они имеют всюду одинаковые кривизны и в начальных точках равные основные n-гранники. Для каждой совокупности положительных непрерывных функций $\varkappa_1(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$, $0 \leqq s \leqq s_1$ и для данного ортонормированного базиса существует ориентированная кривая, дуга которой есть s, i-тая кривизна $\varkappa_i(s)$, а основной n-гранник в точке с параметром $s = 0$ — данный базис.

В следующей теореме описано геометрическое значение кривизны:

Символом $R_i(0)$ обозначим i-тое соприкасающееся пространство ориентированной кривой k в точке $k(0)$, символом $S_i(s)$—линейное пространство в M_n, определенное точкой $k(s)$, $s > 0$, и векторами $e_{i+1}(0), \ldots, e_n(0)$, $1 \leqq i \leqq n - 1$. Пусть $a(s)$ означает общую точку пространств $R_i(0)$ и $S_i(s)$. Тогда

$$\lim_{s \to 0+} \frac{\sigma[a(s), k(s)]}{s^{j+1}} = \frac{1}{(j+1)!} \cdot {}^0\varkappa_1 \cdot {}^0\varkappa_2 \ldots {}^0\varkappa_j ,$$

где $\sigma[a(s), k(s)]$ — расстояние между точками $a(s)$, $k(s)$ в M_n[1], *а ${}^0\varkappa_j = \varkappa_j(0)$ — j-тая кривизна кривой в точке $k(0)$.*

Zusammenfassung

KURVEN IN MINKOWSKISCHEN RÄUMEN

VÁCLAV VILHELM, Praha.

(Eingelangt 30. V. 1956.)

In einem n-dimensionalen Minkowskischen Raum M_n sei ein kartesisches Koordinatensystem (x) gewählt; der metrische Tensor des Raumes M_n habe im Koordinatensystem (x) die Komponenten $g_{ij}(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n)$. Von diesen Komponenten soll vorausgesetzt werden, dass sie stetig differenzierbar in jedem nicht verschwindenden Vektor $\dot{x}$ sind und dass für den Vektor $\dot{x}$ die Determinante $|g_{ij}(\dot{x})|$ nicht verschwindet. Für drei Vektoren $a, b, c \neq 0$ aus M_n definieren wir *das skalare Produkt* $(a, b)_c$ *der Vektoren* a, b *in der Richtung des Vektors* c: $(a, b)_c = g_{ij}(c^1, \ldots, c^n) \cdot a^i b^j$. Unter dem *skalaren Produkt zweier Vektoren* d, e, $d \neq 0$, verstehen wir die Zahl $(d, e) = (d, e)_d$. Mit Hilfe dieses skalaren Produktes definieren wir weiter *die orthonormale Basis* in M_n als ein geordnetes System von Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$, welche die folgende Bedingung erfüllen: $(e_i, e_j) = \delta^i_j$ für $i \leqq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

[1]) Т. е. $\sigma^2[a(s), k(s)] = g_{ij}[k(s) - a(s)] \cdot [k^i(s) - a^i(s)] \cdot [k^j(s) - a^j(s)]$, где $a^j(s)$ и $k^j(s)$ являются j-тыми координатами, соответственно, точек $a(s)$, $k(s)$ в системе координат (x).

Jetzt sei eine, in keinem eigenen linearen Unterraum des M_n liegende und genügend glatte orientierte Kurve k mit dem Bogenparameter s gegeben. In der vorliegenden Arbeit sind dieser Kurve k in jedem ihren Punkte mit dem Parameter s $n-1$ Krümmungen $\varkappa_1(s), \varkappa_2(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$ und eine bestimmte orthonormale Basis $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_n(s)$ zugeordnet, wo $e_1(s)$ die Tangente, $e_{i+1}(s)$ $(1 \leqq i < n)$ die i-te Normale der Kurve vorstellt.

Für die Ableitung $e_i'(s)$ des Vektors $e_i(s)$ gilt dabei

$$e_i' = -\alpha_{i1}e_1 - \ldots - \alpha_{ii}e_i + \varkappa_i e_{i+1} \quad (1 \leqq i \leqq n)\,; \tag{1}$$

hier setzt man $\varkappa_{n+1} = 0$, $e_{n+1} = 0$ und die Skalare α_{ij} sind durch die Gleichungen

$$\begin{gathered}
\alpha_{i1} = \varkappa_1 \,.\, (e_2, e_1)_{e_1}\,,\\
\alpha_{i1}(e_2, e_1) + \alpha_{i2} = -\,\alpha_{21}(e_1, e_i)_{e_2} + \varkappa_2(e_3, e_i)_{e_2}\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}(e_{i-1}, e_j) = -\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i-1,j}(e_j, e_i)_{e_{i-1}} + \varkappa_{i-1}(e_i, e_i)_{e_{i-1}}\,,\\
\alpha_{i1}(e_i, e_1) + \ldots + \alpha_{ii} = 0
\end{gathered} \tag{2}$$

bestimmt. Die Vektoren $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_n(s)$ bilden das sogenannte fundamentale n-Bein der Kurve k im Punkte mit dem Parameter s.

Aus den Frenetschen Formeln (1), (2) folgt der folgende Satz:

Zwei orientierte Kurven k_1, k_2 in M_n sind isometrisch (d. h. es gibt eine isometrische Transformation in M_n, welche k_1 in k_2 überführt) dann und nur dann, wenn sie gleiche Bogenlänge, überall gleiche Krümmungen und im Anfangspunkt isometrische fundamentale n-Beine besitzen. Zu jeden positiven stetigen Funktionen $\varkappa_1(s), \varkappa_2(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$, $0 \leqq s \leqq s_1$, und zu jeder orthonormalen Basis gibt es eine orientierte Kurve, deren Bogen s, i-te Krümmung $\varkappa_i(s)$ und die gegebene Basis ihr fundamentales n-Bein im Punkte mit dem Parameter $s = 0$ ist.

Die geometrische Bedeutung der Krümmungen ist durch den folgenden Satz beschrieben:

Bezeichnen wir mit $R_i(0)$ den i-ten oskulierenden Raum der orientierten Kurve k im Punkte $k(0)$; $S_i(s)$ sei der durch den Punkt $k(s)$, $s > 0$, und durch die Vektoren $e_{i+1}(0), \ldots, e_n(0)$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ bestimmte lineare Unterraum in M_n. Ist $a(s)$ der gemeinsame Punkt der Räume $R_i(0)$ und $S_i(s)$, so gilt

$$\lim_{s \to 0+} \frac{\sigma[a(s), k(s)]}{s^{j+1}} = \frac{1}{(j+1)!} \,.\, {}^0\varkappa_1 \,.\, {}^0\varkappa_2 \ldots {}^0\varkappa_j\,,$$

wo $\sigma[a(s), k(s)]$ der Abstand der Punkte $a(s)$, $k(s)$ in M_n[1]) *und ${}^0\varkappa_j = \varkappa_j(0)$ die j-te Krümmung der Kurve k im Punkte $k(0)$ ist.*

[1]) D. h. $\sigma^2[a(s), k(s)] = g_{ij}(k(s) - a(s)) \,.\, [k^i(s) - a^i(s)] \,.\, [k^j(s) - a^j(s)]$ im Koordinatensystem (x).