Věta 4.4. *Pro vzdálenost $\sigma[k(0), a(s)]$ bodů $k(0)$ a $a(s)$ platí*

$$\lim_{s\to 0+} \sigma[k(0), a(s)] = \frac{1}{{}^0\varkappa_1 \cdot ({}^0e_2, {}^0e_2)_{{}^0e_1}}\,. \tag{50}$$

Důkaz. Existuje λ_1 a λ_2 tak, že

$$a(s) = k(s) + \lambda_1(s)\, e_2(s)\,, \tag{51}$$

$$a(s) = k(0) + \lambda_2(s)\, {}^0e_2\,. \tag{52}$$

Odtud $\sigma(k(0), a(s)) = \sigma(k(0), k(0) + \lambda_2 e_2) = \|\lambda_2 e_2\| = \lambda_2(s)$, jestliže $\lambda_2(s) \geqq 0$. Spočteme nyní $\lambda_2(s)$. Z (51) a (52) plyne $k(s) - k(0) = -\lambda_1(s)\, e_2(s) + \lambda_2(s)\,.\, {}^0e_2$. Odtud

$$(e_1(s), k(s) - k(0)) = \lambda_2(s)\,.\,(e_1(s), {}^0e_2)\,. \tag{53}$$

Podle poznámky za větou 4.2 jest

$$k(s) - k(0) = s\,.\, {}^0e_1 + \frac{s^2}{2}\, {}^0\varkappa_1\,.\, {}^0e_2 + o(s^2)\,. \tag{54}$$

Dosadíme-li (54) do (53), dostaneme, že

$$\lambda_2(s) = s\,.\,\frac{(e_1(s), {}^0e_1 + o(s))}{(e_1(s), {}^0e_2)} + \frac{s^2}{2}\, {}^0\varkappa_1\,. \tag{55}$$

Nyní $e_1(s) = {}^0e_1 + s\,.\,{}^0e_1' + o(s)$, avšak ${}^0e_1' = {}^0\varkappa_1\,.\,{}^0e_2$; tedy $e_1(s) = {}^0e_1 + s\varkappa_1{}^0e_2 + o(s)$. Odtud plyne, že v příslušném lineárním souřadném systému (x) v $M_2(\sigma)$ jest

$$\begin{aligned}(e_1(s), {}^0e_2) &= g_{ij}({}^0e_1 + s\,.\,{}^0\varkappa_1\,.\,{}^0e_2 + o(s))\,.\,[{}^0e_1^i + s{}^0\varkappa_1{}^0e_2^i + o^i(s)]\,.\,{}^0e_2^j = \\ &= \left\{g_{ij}({}^0e_1) + \frac{\partial g_{ij}({}^0e_1)}{\partial x'^k}[s\,.\,{}^0\varkappa_1{}^0e_2^k + o^k(s)] + o_{ij}(s)\right\}. \\ &\quad .\,[{}^0e_1^i + s\,.\,{}^0\varkappa_1{}^0e_2^i + o^i(s)]\,.\,{}^0e_2^j\,.\end{aligned}$$

Odtud již snadno zjistíme, že

$$\lim_{s\to 0+} \frac{(e_1(s), {}^0e_2)}{s} = {}^0\varkappa_1\,.\,({}^0e_2, {}^0e_2)_{{}^0e_1}\,. \tag{56}$$

Protože zřejmě $\lim\limits_{s\to 0+} (e_1(s), {}^0e_1 + o(s)) = ({}^0e_1, {}^0e_1) = 1$ a $\lim\limits_{s\to 0+} \frac{1}{2}s^2\,{}^0\varkappa_1 = 0$, dostáváme z (55) a (56) rovnost (50).

LITERATURA

[1] *H. Busemann:* Metric methods in Finsler spaces and in the foundations of geometry, Annals of Mathematics Studies, *8*, Princeton 1942.

[2] *А. И. Мальцев:* Основы линейной алгебры, Moskva-Leningrad 1948.

[3] *H. Rund:* Über Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen, Math. Zeitschrift, *56* (1951), 115—128.

[4] *Veblen-Whitehead:* The foundations of differential geometry, Cambridge 1932.