Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

KŘIVKY V PROSTORECH MINKOWSKÉHO

VÁCLAV VILHELM, Praha.

(Došlo dne 30. května 1956.)

DT: 513.732
513.82

Práce se zabývá theorií křivek v prostorech Minkowského. Základní roli tu hraje skalární součin (a, b) vektorů a, b v prostoru Minkowského. Tento součin není obecně komutativní a je distributivní jen zprava, t. j. platí jen $(a, \alpha b + \beta c) = \alpha(a, b) + \beta(a, c)$. Práce je zaměřena k tomu, aby dosažené výsledky měly jednoduchou a názornou geometrickou interpretaci.

1. n-rozměrný prostor Minkowského

Úkolem tohoto odstavce je zavedení pojmů, jichž budeme v dalším užívat.

Definice 1.1. *Buď E_n n-rozměrný aritmetický eukleidovský prostor, ϱ jeho obvyklá metrika, $o = (0, 0, \ldots, 0)$ počátek. Buď K ryze konvexní*) omezená uzavřená množina v E_n obsahující počátek o jakožto svůj vnitřní bod. Buď H hranice K. Nechť $x \in E_n$, $x \neq o$. Označme $\xi(x)$ průsečík polopřímky ox (vycházející z o a jdoucí bodem x) s H. Položme*

$$F(x) = \frac{\varrho(o, x)}{\varrho(o, \xi(x))}, \quad F(o) = 0 .$$

V E_n definujme novou metriku σ předpisem $x, y \in E_n \Rightarrow \sigma(x, y) = F(y - x)$. Pak prostor E_n s (obecně nesymetrickou) metrikou σ nazveme aritmetickým n-rozměrným prostorem Minkowského $E_n(\sigma)$. Prostor M s metrikou $\bar{\sigma}$ splňující axiomy 1° $\bar{\sigma}(x, y) > 0$ pro $x \neq y$, 2° $\bar{\sigma}(x, x) = 0$, 3° $\bar{\sigma}(x, z) \leqq \bar{\sigma}(x, y) + \bar{\sigma}(y, z)$ nazveme pak n-rozměrným prostorem Minkowského, existuje-li zobrazení f prostoru M na nějaký n-rozměrný aritmetický prostor Minkowského $E_n(\sigma)$ tak, že

$$x, y \in M \Rightarrow \bar{\sigma}(x, y) = \sigma[f(x), f(y)] . \tag{1}$$

Dvojici $(E_n(\sigma); f)$ budeme nazývat representací prostoru $M(\bar{\sigma})$.

V následujících třech větách ukážeme oprávněnost definice 1.1.

Lemma 1.1. a) *Funkce F z definice* 1.1 *má tyto vlastnosti:*

1. $F(x) > 0$ *pro* $x \in E_n$, $x \neq 0$;

*) T. zn.: je-li $a, b \in K$, $a \neq b$, pak každý vnitřní bod úsečky $\overline{ab}$ je vnitřním bodem K.

2. $F(k \,.\, x) = k \,.\, F(x)$ *pro* $k > 0$, $x \in E_n$;

3. $F(x + y) \leqq F(x) + F(y)$, *při čemž znamení rovnosti platí, právě když body* x, y *leží na téže polopřímce v* E_n *vycházející z počátku* o.

b) *Funkce* σ *z definice* 1.1 *má tyto vlastnosti:*

1. $\sigma(x, y) > 0$ *pro* $x, y \in E_n$, $x \neq y$; $\sigma(x, x) = 0$;

2. $\sigma(x, z) \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$ *pro* $x, y, z \in E_n$, *při čemž rovnost platí, právě když bod* y *leží na úsečce s krajními body* x, z. *(V případě* $x = z$ *to znamená, že* $y = x$.)

Důkaz. Nejprve dokážeme část a). Vlastnosti 1., 2. plynou ihned z definice funkce F. Nechť $x, y \in E_n$. Leží-li x, y na téže polopřímce vycházející z o, pak je na příklad $y = k \,.\, x$, $k > 0$ a podle 2. jest $F(x + y) = F((k + 1) \,.\, x) = (k + 1) \,.\, F(x) = F(x) + k \,.\, F(x) = F(x) + F(y)$. Nechť konečně x, y neleží na téže polopřímce z bodu o, takže zejména $o \neq x \neq y \neq o$. Položme $\bar{x} = [F(x)]^{-1} \,.\, x$, $\bar{y} = [F(y)]^{-1} \,.\, y$. Platí tedy $F(\bar{x}) = F(\bar{y}) = 1$, čili $\bar{x}, \bar{y} \in H$ (viz definici 1.1). Protože M je uzavřená a ryze konvexní, leží bod

$$z = \frac{F(x)}{F(x) + F(y)} \,.\, \bar{x} + \frac{F(y)}{F(x) + F(y)} \,.\, \bar{y}$$

(který je vnitřním bodem úsečky $(\bar{x}\bar{y})$) uvnitř M a tudíž $F(z) < 1$. Tedy podle 2. platí

$$\frac{1}{F(x) + F(y)} \,.\, F[F(x) \,.\, \bar{x} + F(y) \,.\, \bar{y}] < 1\,,$$

neboli $F(x + y) < F(x) + F(y)$; tím je část a) dokázána.

Důkaz části b). Vlastnost 1. je zřejmá, takže zbývá dokázat vlastnost 2. Nechť $x, y, z \in E_n$. Pak podle části a) je $F(y - x) + F(z - y) \geqq F(z - x)$, při čemž rovnost nastane právě tehdy, když body $y - x$, $z - y$ leží na téže polopřímce vycházející z počátku o. V tomto případě pak buď některý z bodů $y - x$, $z - y$ je počátek o a pak 2. zřejmě platí, nebo existuje $k > 0$ tak, že $y - x = k(z - y)$, takže $y = \frac{1}{k+1}\, x + \frac{k}{k+1}\, z$.. Tudíž (protože $y \neq x$) jest $x \neq z$ a y leží na úsečce s krajními body x, z.

Z lemmatu 1.1 ihned plyne

Lemma 1.2. *Buď* $a, b \in E_n$, $a \neq b$. *Pak přímka jdoucí body* a, b *v* E_n *je množina bodů* $x \in E_n$ *takových, že* $\sigma(a, x) + \sigma(x, b) = \sigma(a, b)$ *nebo* $\sigma(x, a) + \sigma(a, b) = \sigma(x, b)$ *nebo* $\sigma(a, b) + \sigma(b, x) = \sigma(a, x)$.

Věta 1.3. *Buď* $M(\sigma)$ *Minkowského prostor,* $(E_n(\sigma'); f)$, $(E_m(\sigma''); g)$ *jeho dvě representace. Potom* $m = n$ *a existuje regulární lineární zobrazení* L $E_n(\sigma')$ *na* $E_m(\sigma'')$ *takové, že*

$$x, y \in E_n(\sigma') \Rightarrow \sigma'(x, y) = \sigma''[L(x), L(y)]\,. \qquad (2)$$

Důkaz. Pro $n = m = 1$ je vše zřejmé. Nechť tedy $n \cdot m \geqq 2$. Zobrazení fg^{-1} je prosté zobrazení $E_m(\sigma'')$ na $E_n(\sigma')$ takové, že $x, y \in E_m(\sigma'') \Rightarrow \sigma''(x, y) = \sigma'[fg^{-1}(x), fg^{-1}(y)]$. Z lemmatu 1.2 odtud plyne, že fg^{-1} zobrazuje přímky z E_m zase na přímky z E_n. Tudíž, jak známo (viz na př. [4]), je $n = m$ a fg^{-1} je lineární; položíme-li $fg^{-1} = L^{-1}$, platí (2), c. b. d.

Z věty 1.3 rovněž plyne, že v Minkowského prostoru $M_n(\sigma)$ můžeme definovat přímky a úsečky jako vzory přímek a úseček v libovolné representaci $(E_n(\sigma'); f)$ prostoru $M_n(\sigma)$, dále vektory v $M_n(\sigma)$ jako třídy orientovaných úseček, jejichž obrazy v $(E_n(\sigma'); f)$ tvoří třídu úseček definujících vektor v E_n a ukázat, že vektory v $M_n(\sigma)$ tvoří (funkcí F normovaný) n-rozměrný vektorový prostor V_n nad tělesem reálných čísel.

Zavedeme nyní tuto terminologii. Buď $M_n(\sigma)$ n-rozměrný prostor Minkowského, $(E_n(\sigma'); f)$ daná jeho representace. Pak řekneme, že v $M_n(\sigma)$ je dán *lineární souřadný systém* (x) (určený representací $(E_n(\sigma'); f)$); je-li $f(x) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ obraz bodu $x \in M_n(\sigma)$, nazveme čísla $x^1, x^2, \ldots, x^n$ souřadnicemi bodu x v našem souřadném systému (x).

Máme-li dva lineární souřadné systémy určené representacemi $(E_n(\sigma'); f)$, $(E_n(\sigma''); g)$ a má-li bod $x \in M_n(\sigma)$ v nich souřadnice $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ resp. $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$, pak platí

$$\bar{x}^i = a^i_j x^j + b^i\,,^{*)} \tag{3}$$

kde a^i_j, b^i jsou reálná čísla nezávislá na x, při čemž

$$\det \|a^i_j\| \neq 0\,. \tag{4}$$

To plyne z věty 1.3.

Funkci F resp. $\bar{F}$ definovanou na E_n, která vedla k definici metriky v $E_n(\sigma')$ resp. $E_n(\sigma'')$ nazveme *normou* aritmetického prostoru Minkowského $E_n(\sigma')$ resp. $E_n(\sigma'')$. Podle (3) pak platí

$$F(x'^1, \ldots, x'^n) = \bar{F}(a^1_j x'^j, \ldots, a^n_j x'^j)\,. \tag{5}$$

Zobrazení f prostoru $M_n(\sigma)$ do sebe nazveme *isometrickým*, platí-li

$$x, y \in M_n(\sigma) \Rightarrow \sigma(x, y) = \sigma[f(x), f(y)]\,. \tag{6}$$

Věta 1.4. *Buď f isometrické zobrazení v $M_n(\sigma)$. Pak f je regulární lineární zobrazení prostoru $M_n(\sigma)$ na sebe.*

Důkaz plyne ihned z věty 1.3.

Buď (x) lineární souřadný systém v $M_n(\sigma)$ určený representací $(E_n(\sigma'); g)$ a F norma v $E_n(\sigma')$. Buď opět f isometrické zobrazení $M_n(\sigma)$ na sebe. Označíme-li $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ souřadnice bodu $f(x)$, kde $x \in M_n(\sigma)$ má souřadnice $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, pak z věty 1.4 plyne

$$\bar{x}^i = a^i_j x^j + b^i\,, \quad \det \|a^i_j\| \neq 0\,. \tag{7}$$

---

*) Přes indexy vyskytující se dvakrát se sčítá od jedné do n.

Protože f je isometrické zobrazení, platí pro každý vektor $a \in V_n$ o souřadnicích $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$

$$F(a^1, \ldots, a^n) = F(a_j^1 a^j, \ldots, a_j^n a^j) . \tag{8}$$

Této identitě bude vždy vyhověno volbou

$$a_j^i = \delta_j^i , \tag{9}$$

která říká, že f je translace. Naopak existují normy F takové, že (8) platí pouze pro $a_j^i = \delta_j^i$. Takový prostor $M_n(\sigma)$, v němž (8) implikuje (9), nazveme obecným prostorem Minkowského (viz [1]). Zřejmé je pak, že jediná isometrická zobrazení v obecném prostoru Minkowského jsou translace.

Přejdeme nyní k diferenciálním vlastnostem prostorů Minkowského.

Definice 1.2. *Buď $M_n(\sigma)$ n-rozměrný prostor Minkowského, (x) lineární souřadný systém určený representací $(E_n(\sigma'); f)$. Pravíme, že prostor $M_n(\sigma)$ je třídy r (r-celé nezáporné číslo), jestliže norma F prostoru $E_n(\sigma')$ je r-krát spojitě diferencovatelná funkce v oblasti $E_n - \{o\}$ a* $\det \left\| \frac{\partial^2 F^2}{\partial x^i \partial x^j} \right\| \neq 0$.

Z (5) plyne, že definice 1.2 je oprávněná, t. j. že tu nezáleží na tom, kterou representaci prostoru $M_n(\sigma)$ vybereme.

V dalším budeme vždy předpokládat, že prostor $M_n(\sigma)$ má třídu $r \geqq 3$. Buď (x) lineární souřadný systém v $M_n(\sigma)$ určený representací $(E_n(\sigma'); f)$, F příslušná norma. Z lemmatu 1.1 plyne, že F je kladně homogenní dimense 1. Podle Eulerovy věty tedy jest

$$2F^2(x'^1, \ldots, x'^n) = \frac{\partial^2 F^2(x'^1, \ldots, x'^n)}{\partial x'^i \, \partial x'^k} x'^i x'^k , \quad x' \in E_n - \{o\} . \tag{10}$$

Položme

$$g_{ij}(x'^1, \ldots, x'^n) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x'^1, \ldots, x'^n)}{\partial x'^i \, \partial x'^j} . \tag{11}$$

Snadno zjistíme, že $g_{ij}(x'^1, \ldots, x'^n)$ jsou komponenty kvadratického tensoru, jemuž budeme říkat metrický tensor.

Snadno se nahlédne, že kvadratická forma $g_{ij}(x'^k)\, x^i x^j$ je positivně definitní pro každé $x' = (x'^1, \ldots, x'^n) \in E_n - \{o\}$. Rovněž je patrné, že funkce $g_{ij}(x'^k)$ jsou kladně homogenní dimense 0. Odtud plyne, že

$$\frac{\partial g_{ij}(x')}{\partial x'^k} x'^k = \frac{\partial g_{ij}(x')}{\partial x'^k} x'^i = 0 . \tag{12}$$

2. Skalární součin a orthonormální base ve vektorovém prostoru V_n

Buď (x) lineární souřadný systém v $M_n(\sigma)$, $g_{ij}(x'^1, \ldots, x'^n)$ komponenty metrického tensoru v tomto souřadném systému. Buďte $a \neq 0$, b vektory ve V_n o souřadnicích (a^i), (b^i) určených systémem (x). Snadno se přesvědčíme, že číslo

$$g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)\, a^i b^j \tag{13}$$

nezávisí na volbě souřadného systému (x) a můžeme proto definovat:

skalárním součinem (a, b) vektorů $a, b \in V_n$ nazveme číslo (13), pokud $a \neq 0$. Pro $a = 0$ klademe $(0, b) = 0$.

Zřejmé jsou tyto základní vlastnosti skalárního součinu

1. *$(a, a) \geqq 0$, rovnost nastane právě pro $a = 0$; (a, a) je čtverec normy $\|a\|$ vektoru $a \in V_n$: $\|a\| = \sqrt{(a, a)} \geqq 0$.*
2. *$(\lambda \,.\, a, b) = \lambda \,.\, (a, b)$ pro $a, b \in V_n$, $\lambda \geqq 0$;*
3. *$(a, \alpha b + \beta c) = \alpha(a, b) + \beta(a, c)$ pro $a, b, c \in V_n$; α, β reálná čísla.*

Pravíme, že vektor $a \in V_n$ je kolmý k vektoru $b \in V_n$, když $(a, b) = 0$.

Věta 2.1. *Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \leqq n$, jsou nenulové vektory ve vektorovém prostoru V_n příslušném prostoru $M_n(\sigma)$. Nechť platí $(a_i, a_j) = 0$ pro $i < j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Potom vektory $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Nechť $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$, α_i reálná čísla. Označme $b_j = \sum_{i=j}^{n} \alpha_i a_i$; tedy $b_1 = 0$. Odtud $0 = (a_1, b_1) = \alpha_1(a_1, a_1)$, takže $\alpha_1 = 0$ a proto $b_2 = 0$. Odtud opět plyne $0 = (a_2, b_2) = \alpha_2(a_2, a_2)$, takže $\alpha_2 = 0$ a $b_3 = 0$. Tak pokračujeme dál; dostaneme nakonec, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, c. b. d.

Definice 2.1. *Buď A_k k-rozměrný podprostor ve V_n. Řekněme, že vektory $a_1, \ldots, a_k \in A_k$ (v tomto pořadí) tvoří orthonormální basi prostoru A_k, platí-li*

$$(a_i, a_j) = \delta^i_j \quad pro \quad i \leqq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, k\,. \tag{14}$$

Věta 2.2. *Buď A_k k-rozměrný podprostor ve V_n. Pak existují v A_k vektory $e_1, e_2, \ldots, e_k$ tak, že tvoří orthonormální basi prostoru A_k.*

Důkaz se nijak neliší od důkazu příslušné věty v eukleidovském vektorovém prostoru (viz na př. [2]).

V dalším se ukáže výhodným toto rozšíření pojmu skalárního součinu. Buďte a, b, c tři vektory ve V_n, $a \neq 0$. Skalár $g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)\, b^i c^j$, kde (a^i), (b^i), (c^i) jsou souřadnice vektorů a, b, c, označíme symbolem $(b, c)_a$ a budeme mu říkat *skalární součin vektorů b, c ve směru a* (neboť $(b, c)_a = (b, c)_{\lambda a}$ pro $\lambda > 0$).

Zřejmé jsou tyto vlastnosti skalárního součinu $(b, c)_a$:

$$(b, c)_a = (c, b)_a\,, \quad (a, b)_a = (a, b)\,, \quad (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2, c)_a = \alpha_1(b_1, c)_a + \alpha_2(b_2, c)_a$$

pro $b_1, b_2 \in V_n$ a reálná čísla α_1, α_2.

3. Křivky v prostoru $M_n(\sigma)$. Frenetovy formule

Buď $M_n(\sigma)$ n-rozměrný prostor Minkowského třídy $r \geqq 3$, (x) lineární souřadný systém v $M_n(\sigma)$. Buď J interval v E_1. Zobrazení f intervalu J do $M_n(\sigma)$ nazveme *regulární r'-krát diferencovatelnou parametrickou křivkou* v $M_n(\sigma)$, jestliže funkce $x^i(t)$, $t \in J$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$ jsou souřadnice bodu $f(t) \in M_n(\sigma)$ v souřadném systému (x), jsou r'-krát spojitě diferencovatelné a vektor $\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t}\right)$ je nenulový pro každé $t \in J$.

Buď $t_0, t_1 \in J$, $t_0 < t_1$. Definujeme-li obvyklým způsobem délku oblouku $L(t_0, t_1)$ křivky f z bodu t_0 do bodu t_1, snadno spočteme, že

$$L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(x'^1, \ldots, x'^n)\, x'^i x'^j}\, \mathrm{d}t\,, \quad \text{kde} \quad x'^l = \frac{\mathrm{d}x^l(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{15}$$

Definujeme-li nyní známým způsobem orientovanou r'-krát diferencovatelnou regulární křivku k v $M_n(\sigma)$ jako jistou třídu parametrických r'-krát diferencovatelných regulárních křivek obsahující f, snadno zjistíme, že v této třídě existuje právě jedna parametrická křivka $\tilde{f}(s) = (\tilde{x}^i(s))$ taková, že $\tilde{x}^i(0) = x^i(t_0)$, s je délka oblouku orientované křivky k z $(\tilde{x}^i(0))$ do $(\tilde{x}^i(s))$. Pro parametr s zřejmě platí

$$F^2\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{x}^k}{\mathrm{d}s}\right) = g_{ij}\left(\frac{\mathrm{d}\tilde{x}^k}{\mathrm{d}s}\right) \frac{\mathrm{d}\tilde{x}^i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}^j}{\mathrm{d}s} = 1\,. \tag{16}$$

Nazveme-li každou parametrickou křivku ležící v třídě parametrických křivek, která definuje orientovanou křivku k, *representací orientované křivky* k, pak parametrickou křivku $\tilde{f}$ nazveme *význačnou representací* orientované křivky k.

Buď k orientovaná regulární $r' \geqq n$-krát diferencovatelná křivka v $M_n(\sigma)$; její význačná representace nechť je v lineárním souřadném systému v $M_n(\sigma)$ dána funkcemi $(x^1(s), x^2(s), \ldots, x^n(s))$, $0 \leqq s \leqq s_1$. Vektor $t(s) \in V_n$, jehož souřadnice jsou ve zvoleném souřadném systému $\left(\frac{\mathrm{d}x^1(s)}{\mathrm{d}s}, \ldots, \frac{\mathrm{d}x^n(s)}{\mathrm{d}s}\right)$, nazveme *tečným vektorem* křivky k v bodě s. Místo $\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}$ pišme x'^k. Z (16) plyne, že

$$g_{ij}(x'^1, \ldots, x'^n)\, x'^i x'^j = 1 \tag{17}$$

pro každé $s \in \langle 0, s_1 \rangle$. To však znamená, že

$$(t, t) = 1\,; \tag{18}$$

tedy vektor t má délku (t. j. 2. odmocninu z normy) rovnou jedné pro každé $s \in \langle 0, s_1 \rangle$.

Utvořme nyní vektory $t', t'', \ldots, t^{(n-1)}$, kde čárkou značíme derivaci podle s. V dalším budeme vždy předpokládat, že dimense vektorových prostorů $A_i(s) = \{t(s), t'(s), \ldots, t^{(i-1)}(s)\}$ je táž pro každé $s \in \langle 0, s_1 \rangle$.

Definice 3.1. *Nechť prostor* $\{t, t', \ldots, t^{(n-1)}\}$ *má dimensi* h. *Pak* h *nazveme hodností křivky* k. *Lineární prostor* $R_i(s)$ *v* $M_n(\sigma)$ *určený bodem* $(x^1(s), \ldots, x^n(s))$ *a vektory* $t(s), t'(s), \ldots, t^{(i-1)}(s)$, *kde* $1 \leqq i < h$, *nazveme i-tým oskulačním prostorem křivky* k *v bodě* s.

Jak známo platí pak tato věta:

Věta 3.1. *Nechť křivka* k *má hodnost* h. *Pak* k *leží v h-rozměrném lineárním podprostoru v* $M_n(\sigma)$, *který je zároveň jejím h-tým oskulačním prostorem v každém jejím bodě.*

Z věty 3.1 plyne, že při dalším vyšetřování křivek se můžeme omezit na křivky hodnosti n v $M_n(\sigma)$.

Obrátíme se nyní k odvození Frenetových vzorců pro křivky. Nejprve však dokážeme jednoduchou pomocnou větu.

Lemma 3.2. *Buďte* $a(s), b(s)$ *diferencovatelné vektorové funkce ve* V_n. *Nechť* $(a(s), b(s)) =$ konst., $a(s) \neq 0$.

Potom jest $(a(s), b'(s)) + (a'(s), b(s))_a = 0$.

Důkaz je zřejmý, přejdeme-li k lineárnímu souřadnému systému (x) v $M_n(\sigma)$. Nechť vektory a, b v něm mají souřadnice (a^i), (b^i). Pak z rovnosti $g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)\, a^i b^j =$ konst. plyne derivací

$$\frac{\partial g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)}{\partial a^k} a'^k a^i b^j + g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)\, a'^i b^j + g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)\, a^i b'^j = 0 \; ;$$

první člen vlevo v této rovnosti je však podle (12) roven nule. Tím je lemma dokázáno.

Buď k regulární orientovaná křivka v $M_n(\sigma)$ hodnosti n, aspoň $(n+1)$-krát spojitě diferencovatelná. Buď (x) lineární souřadný systém v $M_n(\sigma)$; v něm nechť význačná representace křivky k je dána funkcemi $(x^1(s), \ldots, x^n(s))$, $s \in \langle 0, s_1 \rangle$, $s_1 > 0$. Označme jako obvykle $t(s)$ tečný vektor křivky k v bodě s. Podle předpokladu vektory $t, t', \ldots, t^{(n-1)}$ tvoří basi prostoru V_n. Pomocí base $t, t', \ldots, t^{(n-1)}$ sestrojíme nyní ve V_n pro každé $s \in \langle 0, s_1 \rangle$ jistou orthonormální basi $e_1(s), \ldots, e_n(s)$. Udáme nyní konstrukci této base.

Předně položme

$$e_1(s) = t(s) \,, \tag{19}$$

takže

$$(e_1, e_1) = 1 \,. \tag{20}$$

Nechť dále $\bar{e}_2 = e_1' + \alpha_{11} e_1$, kde $\alpha_{11} = -(e_1, e_1')$, takže $(e_1, \bar{e}_2) = 0$. Avšak z $(t, t) = 1$ a lemmatu 3.2 plyne $(t, t') = 0$, takže $\alpha_{11} = 0$. Skalární funkci $\sqrt{(\bar{e}_2, \bar{e}_2)} > 0$ označme $\varkappa_1(s)$ a nazveme ji *první křivostí křivky* k v bodě s.*)

---

*) Stejným způsobem definoval 1. křivost křivky ve Finslerově prostoru H. Rund v práci [3].

Vektor $e_2(s) = \varkappa_1^{-1}(s)\,\bar{e}_2(s)$ nazveme *první normálou křivky* k v bodě s. Platí pak zřejmě

$$(e_1, e_2) = 0\,, \quad (e_2, e_2) = 1\,, \quad e_2 \in \{t, t'\}\,, \tag{21}$$

$$e_1' = \varkappa_1 e_2\,. \tag{22}$$

Dál postupujme indukcí. Předpokládejme, že už máme sestrojeny vektory $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_m(s)$, $m < n$ (vektor $e_i(s)$, $2 \leqq i \leqq m$, nazveme $(i-1)$*-vou normálou křivky* k v bodě s) a skalární kladné funkce $\varkappa_1(s), \varkappa_2(s), \ldots, \varkappa_{m-1}(s)$ (číslo $\varkappa_j(s)$, $1 \leqq j \leqq m-1$, nazveme j*-tou křivostí křivky* k v bodě s), pro něž platí

$$(e_i, e_j) = \delta_j^i \quad \text{pro} \quad i \leqq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, m \tag{23}$$

$$e_i' = -\alpha_{i1}e_1 - \alpha_{i2}e_2 - \ldots - \alpha_{ii}e_i + \varkappa_i e_{i+1}\,, \quad 1 \leqq i \leqq m-1\,, \tag{24}$$

kde α_{ij} jsou rekurentně stanovena rovnicemi

$$\begin{gathered}
\alpha_{i1} = \varkappa_1(e_2, e_i)\, e_1\,, \\
\alpha_{i1}(e_2, e_1) + \alpha_{i2} = -\alpha_{21}(e_1, e_i)_{e_2} - \alpha_{22}(e_2, e_i)_{e_2} + \varkappa_2(e_3, e_i)_{e_2}\,, \\
\alpha_{i1}(e_3, e_1) + \alpha_{i2}(e_3, e_2) + \alpha_{i3} = -\alpha_{31}(e_1, e_i)_{e_3} - \ldots - \alpha_{33}(e_3, e_i)_{e_3} + \\
+ \varkappa_3(e_4, e_i)_{e_3}\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{i1}(e_i, e_1) + \ldots + \alpha_{i,i-1}(e_i, e_{i-1}) + \alpha_{ii} = 0\,, \quad (1 \leqq i \leqq m-1)\,.
\end{gathered} \tag{25}$$

Pak položíme

$$\bar{e}_{m+1} = e_m' + \alpha_{m1}e_1 + \ldots + \alpha_{mm}e_m\,, \tag{26}$$

kde zase

$$\begin{gathered}
\alpha_{m1} = \varkappa_1(e_2, e_m)_{e_1}\,, \\
\alpha_{m1}(e_2, e_1) + \alpha_{m2} = -\alpha_{21}(e_1, e_m)_{e_2} - \alpha_{22}(e_2, e_m)_{e_2} + \varkappa_2(e_3, e_m)_{e_2}\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{m1}(e_m, e_1) + \ldots + \alpha_{mm} = 0\,;
\end{gathered} \tag{27}$$

skalár $\varkappa_m(s) = \sqrt{(\bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+1})} > 0$ nazveme *m-tou křivostí křivky* k, vektor $e_{m+1}(s) = \varkappa_m^{-1}(s)\,\bar{e}_{m+1}(s)$ *m-tou normálou křivky* k v bodě s. Potom pro $i < m+1$ dostaneme z (26)

$$(e_i, e_{m+1}) = \varkappa_m^{-1}(e_i, \bar{e}_{m+1}) = \varkappa_m^{-1}[(e_i, e_m') + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj}(e_i, e_j)]\,.$$

Podle (23) jest $(e_i, e_m) = \delta_m^i$. Odtud derivováním a užitím (24) máme $(e_i, e_m') = -(e_i', e_m) = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik}\,.\,(e_k, e_m)_{e_i} - \varkappa_i(e_{i+1}, e_m)_{e_i}$. Tedy $(e_i, e_{m+1}) = \varkappa_m^{-1}\,.\,[\sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik}(e_k, e_m)_{e_i} - \varkappa_i(e_{i+1}, e_m)_{e_i} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj}(e_i, e_j)] = \varkappa_m^{-1}[\sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik}(e_k, e_m)_{e_i} - \varkappa_i (e_{i+1}, e_m)_{e_i} + \sum_{j=1}^{i} \alpha_{mj}(e_i, e_j)]$, neboť $(e_i, e_j) = 0$ pro $i < j \leqq m$. Součet v hranaté závorce se však podle i-té rovnice v (27) rovná nule. Tedy vskutku $(e_i, e_{m+1}) =$

$= 0$ pro $i < m + 1$. S druhé strany jest zřejmě $(e_{m+1}, e_{m+1}) = 1$. Platí tudíž rovnice (23) pro $i, j = 1, 2, \ldots, m + 1$ a rovnice (24), (25) pro $i = 1, 2, \ldots, m$.

Tím jsme rekurentně sestrojili ke křivce k v každém jejím bodě o parametru s vektory $e_1(s), \ldots, e_n(s)$, pro něž platí (23) pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$ a (24) a (25) pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Vektory $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ tvoří basi prostoru V_n; proto

$$- e'_n = \alpha_{n1}e_1 + \ldots + \alpha_{nn}e_n \,. \tag{28}$$

Určíme nyní koeficienty $\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}$. Z (28) plyne

$$\begin{gathered} (e_1, e'_n) = \alpha_{n1} \,, \\ (e_2, e'_n) = - \alpha_{n1}(e_2, e_1) - \alpha_{n2} \,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = (e_n, e'_n) = - \alpha_{n1}(e_n, e_1) - \ldots - \alpha_{nn-1}(e_n, e_{n-1}) - \alpha_{nn} \,. \end{gathered} \tag{29}$$

Avšak $(e_i, e_n) = 0$ pro $i < n$. Odtud derivováním a užitím lemmatu 3.2 dostáváme

$$(e_i, e'_n) = - (e'_i, e_n)_{e_i} = \alpha_{i1}(e_1, e_n)_{e_i} + \ldots + \alpha_{ii}(e_i, e_n)_{e_i} - \varkappa_i(e_{i+1}, e_n)_{e_i} \,. \tag{30}$$

Z (29) a (30) plyne, všimneme-li si, že $\alpha_{ii}(e_i, e_n)_{e_i} = \alpha_{ii}(e_i, e_n) = 0$,

$$\begin{gathered} \alpha_{n1} = \varkappa_1(e_2, e_n)_{e_1} \,, \\ \alpha_{n1}(e_2, e_1) + \alpha_{n2} = - \alpha_{21}(e_1, e_n)_{e_2} + \varkappa_2(e_3, e_n)_{e_2} \,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}(e_n, e_1) + \ldots + \alpha_{nn} = 0 \,. \end{gathered}$$

Poznamenejme ještě, že v rovnicích (25) je $\alpha_{ii}(e_i, e_j)_{e_i} = 0$ pro $i < j$. Dosažený výsledek shrneme v této větě:

Věta 3.3. *Buď k regulární, aspoň $(n + 1)$-krát diferencovatelná orientovaná křivka hodnosti n v $M_n(\sigma)$, s její oblouk, $0 \leqq s \leqq s_1$. Buď $t(s) = e_1(s)$ její tečna, $e_{i+1}(s)$ její i-tá normála $(1 \leqq i \leqq n - 1)$, $\varkappa_j(s)$ její j-tá křivost $(1 \leqq j \leqq n - 1)$ v bodě o parametru s. Potom platí vzorce*

$$e'_i = - \alpha_{i1}e_1 - \ldots - \alpha_{ii}e_i + \varkappa_i e_{i+1} \,, \quad 1 \leqq i \leqq n \,, \tag{31}$$

kde klademe $\varkappa_{n+1} = 0$, $e_{n+1} = 0$ a skaláry α_{ij} jsou rekurentně stanoveny rovnicemi

$$\begin{gathered} \alpha_{i1} = \varkappa_1(e_2, e_i)_{e_1} \,, \\ \alpha_{i1}(e_2, e_1) + \alpha_{i2} = - \alpha_{21}(e_1, e_i)_{e_2} + \varkappa_2(e_3, e_i)_{e_2} \,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i1}(e_{i-1}, e_1) + \ldots + \alpha_{i,i-1} = - \alpha_{i-1,1}(e_1, e_i)_{e_{i-1}} - \ldots - \alpha_{i-1,i-2} \,. \\ . \, (e_{i-2}, e_i)_{e_{i-1}} + \varkappa_{i-1}(e_i, e_i)_{e_{i-1}} \,, \\ \alpha_{i1}(e_i, e_1) + \ldots + \alpha_{ii} = 0 \,. \end{gathered} \tag{32}$$

Vzorce (31) a (32) můžeme nazvat *Frenetovými vzorci pro křivky v prostoru* $M_n(\sigma)$ (okamžitě se přesvědčíme, že v případě, kdy $M_n(\sigma)$ je eukleidovský prostor, dostáváme známé Frenetovy formule). Vektory $e_1(s)$, $e_2(s)$, ..., $e_n(s)$ nazveme *základním n-hranem křivky k v bodě s.*

Ukážeme nyní, že křivosti křivky spolu s jejím základním n-hranem v libovolně zvoleném jejím bodě určují tuto křivku jednoznačně a že pro každou volbu spojitých kladných funkcí $\varkappa_j(s)$ $(1 \leqq j \leqq n-1)$, $s \in \langle 0, s_1 \rangle$ existuje v $M_n(\sigma)$ orientovaná křivka, pro niž s je oblouk a $\varkappa_j(s)$ j-tá křivost. Nejprve však dokážeme dvě pomocné věty.

Lemma 3.4. *Buďte $\varkappa_j(s)$, $0 \leqq s \leqq s_1$ kladné spojité funkce, $1 \leqq j \leqq n-1$. Nechť vektorové funkce $e_i(s)$ ve V_n, $1 \leqq i \leqq n$ jsou řešením systému diferenciálních rovnic*

$$e_i'(s) = -\alpha_{i1}e_1(s) - \ldots - \alpha_{ii}e_i(s) + \varkappa_i(s)\, e_{i+1}(s),\ 1 \leqq i \leqq n,$$
$$\varkappa_n(s) = 0\,, \quad e_{n+1}(s) = 0\,, \tag{33}$$

kde funkce a_{ik} jsou určeny rekurentně rovnicemi (32). *Nechť $e_i(s)$ vyhovují počátečním podmínkám $e_i(0) = e_i^0$, kde*

$$(e_i^0, e_j^0) = \delta_j^i \quad \text{pro} \quad i \leqq j;\, i, j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{34}$$

Potom pro všechna s, pro něž jsou $e_i(s)$ definovány, platí

$$(e_i(s), e_j(s)) = \delta_j^i \quad \text{pro} \quad i \leqq j;\, i, j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{35}$$

Důkaz. Nechť funkce $e_i(s)$ jsou řešením systému (33) s počátečními podmínkami (34). Označme $f_{ij}(s) = (e_i(s), e_j(s))$ pro $i \leqq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pak tedy platí

$$f_{ij}(0) = \delta_j^i\,. \tag{36}$$

Spočtěme nyní derivaci funkce $f_{ik}(s)$.

a) Nechť předně je $i < k$. Potom podle (33) platí

$$\begin{aligned} f_{ik}'(s) &= (e_i, e_k') + (e_i', e_k)_{e_i} = \\ &= -\alpha_{k1}(e_i, e_1) - \ldots - \alpha_{k,i-1}(e_i, e_{i-1}) - \alpha_{ki}\, f_{ii}(s) - \alpha_{k,i+1}\, f_{i,i+1}(s) - \\ &\quad - \ldots - \alpha_{kk}\, f_{ik}(s) + \varkappa_k\, f_{i,k+1}(s) - \alpha_{i1}(e_k, e_1)_{e_i} - \ldots - \\ &\quad - \alpha_{i,i-1}(e_k, e_{i-1})_{e_i} - \alpha_{ii}\, f_{ik}(s) + \varkappa_i(e_k, e_{i+1})_{e_i}\,. \end{aligned}$$

Podle (32) však jest

$$\alpha_{k1}(e_i, e_1) + \ldots + \alpha_{ki} = -\alpha_{i1}(e_1, e_k)_{e_i} - \ldots - \alpha_{i,i-1}(e_{i-1}, e_k)_{e_i} + \varkappa_i(e_{i+1}, e_k)_{e_i}\,. \tag{37}$$

Užitím (37) dostaneme, že

$$\begin{aligned} f_{ik}'(s) &= \alpha_{ki}[1 - f_{ii}(s)] - \alpha_{k,i+1}\, f_{i,i+1}(s) - \ldots - \alpha_{kk} \cdot f_{ik}(s) + \\ &\quad + \varkappa_k\, f_{i,k+1}(s) - \alpha_{ii}\, f_{ik}(s)\,. \quad \text{(Zde klademe } f_{i,n+1}(s) = 0.) \end{aligned} \tag{38}$$

b) Nechť $i = k$. Pak zcela obdobně jako v a) odvodíme užitím (32) a (33) rovnost

$$f_{ii}'(s) = \alpha_{ii}[1 - f_{ii}(s)] + \varkappa_i\, f_{i,i+1}(s)\,. \tag{39}$$

(Pro $i = n$ odpadne poslední člen.)

Rovnice (38) a (39) představují systém lineárních diferenciálních rovnic pro $f_{ik}(s)$. Tyto rovnice mají řešení $\tilde{f}_{ij}(s) = \delta^i_j$; to vyhovuje počátečním podmínkám (36). Tedy platí pro všecka uvažovaná s $f_{ij}(s) = \delta^i_j$ pro $i \leqq j$; tím je věta dokázána.

Lemma 3.5. *Nechť funkce $\varkappa_j(s)$, $1 \leqq j \leqq n - 1$ jsou spojité a kladné v intervalu $\langle 0, s_1 \rangle$, $s_1 > 0$. Pak systém diferenciálních rovnic*

$$\begin{aligned} &e'_i(s) = - \alpha_{i1} e_1(s) - \ldots - \alpha_{ii} e_i(s) + \varkappa_i(s) e_{i+1}(s) , \\ &(1 \leqq i \leqq n , \quad \varkappa_n(s) = 0 , \quad e_{n+1}(s) = 0 , \quad e_i(s) \in V_n) , \end{aligned} \tag{40}$$

kde α_{ik} jsou určeny rovnicemi (32), má při počátečních podmínkách $e_i(0) = e^0_i$, kde

$$(e^0_i, e^0_j) = \delta^i_j \quad \text{pro} \quad i \leqq j;\ i, j = 1, \ldots, n \tag{41}$$

právě jedno řešení $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_n(s)$; to je definováno v celém intervalu $\langle 0, s_1 \rangle$ a $(e_i(s), e_j(s)) = \delta^i_j$ pro $i \leqq j$, $s \in \langle 0, s_1 \rangle$.

Důkaz. Zvolme v prostoru $M_n(\sigma)$ lineární souřadný systém (x). Z definice prostoru $M_n(\sigma)$ plyne, že existují kladná čísla A, B taková, že pro souřadnice $(e^1, \ldots, e^n)$ každého vektoru $e \in V_n$, pro nějž $(e, e) = 1$, platí $0 < 2A < \max(|e^1|, |e^2|, \ldots, |e^n|) < \frac{1}{2}B$. Nechť nyní vektor $e_i(s)$ má souřadnice $(e^1_i(s), \ldots, e^n_i(s))$, které krátce označíme $(e^\alpha_i(s))$. Systém (40) v souřadnicovém tvaru představuje soustavu n^2 diferenciálních rovnic pro $e^\alpha_i(s)$:

$$e'^\alpha_i(s) = f^\alpha_i(e^\beta_j(s), s) . \tag{42}$$

Protože $g_{\alpha\beta}(x')$ mají spojité derivace pro každé $x' \in V_n$, $x' \neq 0$, snadno nahlédneme, že funkce $f^\alpha_i(e^\beta_j, s)$ $n^2 + 1$ proměnných e^β_j, s jsou spojité a mají spojité parciální derivace podle e^β_j v každém bodě (e^β_j, s), kde $s \in \langle 0, s_1 \rangle$, $(e^1_j, \ldots, e^n_j) \neq (0, \ldots, 0)$. Označme Ω oblast těch bodů (e^β_j, s), pro něž

$$A \leqq \max_{1 \leqq j \leqq n} (|e^1_j|, \ldots, |e^n_j|) \leqq B , \quad 0 \leqq s \leqq s_1 .$$

V Ω jsou tedy funkce $f^\alpha_i(e^\beta_j, s)$ spojité a mají tam spojité parciální derivace podle e^β_j.

Pro počáteční podmínky (41) platí $(e^{0\alpha}_j, 0) \in \Omega$ a proto existuje právě jedno řešení $e^\alpha_j(s)$ systému (42), splňující tyto počáteční podmínky. Podle lemmatu 3.4 platí pro každé j, $1 \leqq j \leqq n$, $(e_j(s), e_j(s)) = 1$, takže integrální čára $(e^\alpha_j(s), s)$ může pro $s > 0$ protnout hranici oblasti Ω jen v bodě, pro nějž $s = s_1$. Z theorie diferenciálních rovnic však víme, že integrální čáru $(e^\alpha_j(s), s)$ lze prodloužit až k hranici oblasti Ω. To znamená, že integrační čáru lze prodloužit až do bodu s_1; tedy systém (42) má při počátečních podmínkách (41) řešení $e^\alpha_j(s)$ v intervalu $\langle 0, s_1 \rangle$.

Věta 3.6. *Buď $M_n(\sigma)$ n-rozměrný prostor Minkowského. Buďte $\varkappa_j(s)$, $1 \leqq j \leqq n - 1$ spojité kladné funkce v $\langle 0, s_1 \rangle$. Nechť ${}^0x \in M_n(\sigma)$ a nechť vektory ${}^0e_1, \ldots, {}^0e_n$ z V_n tvoří orthonormální basi ve V_n. Potom existuje v $M_n(\sigma)$ právě jedna regulární orientovaná křivka $k(s)$ s těmito vlastnostmi:*

1° *parametr s je jejím obloukem, $0 \leqq s \leqq s_1$;*

2° *$\varkappa_i(s)$ je i-tá křivost křivky k v bodě o parametru s;*

3° *$k(0) = {}^0x$, ${}^0e_1$ je tečný vektor, ${}^0e_{j+1}$ $(1 \leqq j < n)$ j-tá normála křivky k v bodě o parametru $s = 0$.*

Důkaz. Zvolme v $M_n(\sigma)$ lineární souřadný systém (x); nechť v něm má bod ${}^0x$ souřadnice $({}^0x^\alpha)$, vektor ${}^0e_i$ souřadnice $({}^0e_i^\alpha)$. Buď nyní $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_n(s)$ řešení systému (40) s počátečními podmínkami $e_i(0) = {}^0e_i$ splňujícími (41). Podle lemmatu 3.5 toto řešení existuje v celém intervalu $\langle 0, s_1 \rangle$, tvoří pro každé $s \in \langle 0, s_1 \rangle$ orthonormální basi ve V_n a je jednoznačně stanoveno. Položme nyní

$$x^\alpha(s) = \int_0^s e_1^\alpha(s) \, ds + {}^0x^\alpha . \tag{43}$$

Snadno nahlédneme, že parametrická křivka určená v souřadném systému (x) funkcemi $(x^1(s), x^2(s), \ldots, x^n(s))$ je právě hledaná křivka a je jediná.

Poznámka. Zatím co v eukleidovském prostoru tvoří křivosti křivky úplný systém jejích invariantů (t. j. určují křivku jednoznačně až na křivky s ní shodné), v prostoru Minkowského tomu tak obecně není. Můžeme totiž tvrdit jen toto:

Věta 3.7. *Buďte $\varkappa_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, spojité kladné funkce v intervalu $\langle 0, s_1 \rangle$. Buďte ${}^0e_1, \ldots, {}^0e_n$ resp. ${}^0\bar{e}_1, \ldots, {}^0\bar{e}_n$ dvě shodné orthonormální base ve V_n, t. j. takové, že existuje automorfismus ve V_n převádějící jednu basi v druhou. Nechť ${}^0x$, ${}^0\bar{x}$ jsou body v $M_n(\sigma)$.*

Potom orientované křivky k resp. $\bar{k}$, o křivostech $\varkappa_i(s)$, oblouku s, vycházející z ${}^0x$ resp. ${}^0\bar{x}$ a mající ${}^0e_1, \ldots, {}^0e_n$ resp. ${}^0\bar{e}_1, \ldots, {}^0\bar{e}_n$ za svůj základní n-hran v bodě ${}^0x$ resp. ${}^0\bar{x}$ jsou shodné, t. j. existuje isometrické zobrazení v $M_n(\sigma)$, které převádí křivku k v křivku $\bar{k}$.

Důkaz je zřejmý z věty 3.6.

Tedy otázku po shodnosti dvou křivek jsme redukovali pomocí jejich křivostí na otázku, kdy dvě orthonormální base v příslušném V_n jsou shodné. V případě, že $M_n(\sigma)$ je obecný prostor Minkowského, je odpověď na tuto otázku prostá: žádné dvě různé orthonormální base v příslušném vektorovém prostoru V_n nejsou shodné. Tedy platí tato

Věta 3.8. *V obecném prostoru Minkowského $M_n(\sigma)$ tvoří úplný systém invariantů orientované křivky její křivosti $\varkappa_1(s), \varkappa_2(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$ a orthonormální base ${}^0e_1, {}^0e_2, \ldots, {}^0e_n$ v příslušném V_n jako základní n-hran křivky v jejím počátku (t. j. tyto údaje určují křivku jednoznačně až na křivky s ní shodné).*

4. Geometrická interpretace křivostí křivky v $M_n(\sigma)$

Zvolme v n-rozměrném prostoru Minkowského $M_n(\sigma)$ bod p, který nazveme počátkem. Buď k orientovaná regulární křivka v $M_n(\sigma)$, s buď její oblouk,

$s \in \langle 0, s_1 \rangle$. Označme $k(s)$ bod na k o parametru s, a buď $r(s)$ vektor ve V_n, určený úsečkou $\overline{p\,k(s)}$ s počátečním (koncovým) bodem p $(k(s))$. Takto je křivka k dána vektorovou funkcí (průvodičem) $r(s)$. Budeme v dalším předpokládat, že k je alespoň $(n + 1)$-krát spojitě diferencovatelná, takže $r(s)$ má spojitou derivaci řádu $n + 1$.

Lemma 4.1. *Buď $e_1(s)$ tečný vektor, $e_{i+1}(s)$ i-tá normála, $\varkappa_i(s)$ $(1 \leqq i \leqq n - 1)$ i-tá křivost křivky k v bodě $k(s)$. Buď j přirozené číslo, $1 \leqq j \leqq n - 1$. Pak existují skalární funkce $\beta_{j1}(s), \beta_{j2}(s), \ldots, \beta_{jj}(s)$ tak, že*

$$e_1^{(j)} = \beta_{j1}e_1 + \beta_{j2}e_2 + \ldots + \beta_{jj}e_j + \varkappa_1\varkappa_2 \ldots \varkappa_j e_{j+1}\,, \tag{44}$$

kde $e_1^{(j)} = \dfrac{\mathrm{d}^j e_1}{\mathrm{d}s^j}$ *a* $\beta_{11}(s) = 0$.

Důkaz provedeme snadno indukcí podle j užitím věty 3.3.

Věta 4.2. *V bodě $k(0)$ křivky k platí rozvoj*

$$r(s) - {}^0r = {}^0e_1 \left[s + {}^0\beta_{21} \frac{s^3}{3!} + \ldots + {}^0\beta_{n-1,1} \frac{s^n}{n!} + o(s^n) \right] +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} {}^0e_i \left[{}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_{i-1} \frac{s^i}{i!} + {}^0\beta_{ii} \frac{s^{i+1}}{(i+1)!} + \ldots + {}^0\beta_{n-1,i} \frac{s^n}{n!} + o(s^n) \right], \tag{45}$$

kde ${}^0r = r(0)$, ${}^0\varkappa_i = \varkappa_i(0)$, ${}^0\beta_{ji} = \beta_{ji}(0)$, ${}^0e_i = e_i(0)$.

Důkaz. Pro funkci $r(s)$ platí Taylorův rozvoj

$$r(s) - {}^0r = {}^0r' \,.\, s + {}^0r'' \,.\, \frac{s^2}{2!} + \ldots + {}^0r^{(n)} \,.\, \frac{s^n}{n!} + o(s^n)\,.$$

Dosazením ${}^0r^{(k)} = {}^0e_1^{(k-1)}$ a užitím lemmatu 4.1 dostáváme odtud (45).

Poznámka. Pro $n = 3$ rozvoj (45) vypadá explicitně takto:

$$r(s) - {}^0r = {}^0e_1 \left[s - \frac{s^3}{3!} \,.\, {}^0\varkappa_1^2 \,.\, ({}^0e_2, {}^0e_2)_{{}^0e_1} + o(s^3) \right] +$$

$$+ {}^0e_2 \left[\frac{s^2}{2} \,.\, {}^0\varkappa_1 + \frac{s^3}{3!} ({}^0\varkappa_1' + {}^0\varkappa_1^2 \,.\, ({}^0e_2, {}^0e_2)_{{}^0e_1} \,.\, ({}^0e_2', {}^0e_1)) + o(s^3) \right] +$$

$$+ {}^0e_3 \left[\frac{s^3}{3!} \,.\, {}^0\varkappa_1 \,.\, {}^0\varkappa_2 + o(s^3) \right].$$

Definujeme-li obvyklým způsobem styk křivek v $M_n(\sigma)$, dostaneme odtud snadno odpověď na otázku po souvislosti řádu styku obou křivek s jejich základními n-hrany a křivostmi v příslušném bodě. Vše je zcela obdobné eukleidovskému případu.

Ukážeme nyní geometrický význam křivostí orientované křivky k v jejím bodě, který není jejím koncovým bodem. Zřejmě při tom můžeme předpokládat, že tento bod je počátečním bodem křivky k.

Věta 4.3. *Označme $R_i(0)$ i-tý oskulační prostor křivky k v bodě $k(0)$, $S_i(s)$ lineární prostor v $M_n(\sigma)$ určený bodem $k(s)$, $s > 0$ a vektory ${}^0e_{i+1}, \ldots, {}^0e_n$ $(1 \leqq i \leqq n - 1)$.*

Prostory $R_i(0)$ a $S_i(s)$ mají zřejmě právě jeden společný bod $c_i(s) \in M_n(\sigma)$. Pak platí

$$\text{a)} \lim_{s \to 0+} \frac{\sigma[c_i(s), k(s)]}{s^{i+1}} = \frac{1}{(i+1)!} \cdot {}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_i ; \tag{46}$$

pokud ${}^0\varkappa_{j-1} > 0$, pak

$$\text{b)} \lim_{s \to 0+} \frac{\sigma[c_j(s), k(s)]}{s \cdot \sigma[c_{j-1}(s), k(s)]} = \frac{1}{j+1} \cdot {}^0\varkappa_j \quad (2 \leqq j \leqq n-1), \tag{47}$$

kde ${}^0\varkappa_i$ je i-tá křivost křivky k v jejím počátku $k(0)$.

Důkaz. Pro průvodič $r(s)$ bodu $k(s)$ křivky k platí rozvoj (45). Snadno zjistíme, že pro průvodič $r_i(s)$ bodu $c_i(s)$ platí

$$r_i(s) = {}^0r_i + {}^0e_1 \left[s + \frac{s^3}{3!} \cdot {}^0\beta_{2,1} + \ldots + \frac{s^n}{n!} \cdot {}^0\beta_{n-1,1} + o(s^n) \right] +$$
$$+ \sum_{j=2}^{i} {}^0e_j \left[{}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_{j-1} \frac{s^j}{j!} + {}^0\beta_{j,j} \frac{s^{j+1}}{(j+1)!} + \ldots + {}^0\beta_{n-1,j} \frac{s^n}{n!} + o(s^n) \right]. \tag{48}$$

Vzdálenost $\sigma[c_i(s), k(s)]$ bodů $c_i(s)$, $k(s)$ v $M_n(\sigma)$ je rovna normě vektoru $r(s) - r_i(s)$. Podle (45) a (48) jest

$$r(s) - r_i(s) = {}^0e_{i+1} \cdot {}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_i \frac{s^{i+1}}{(i+1)!} + o(s^{i+1}).$$

Odtud plyne, že

$$\|r(s) - r_i(s)\| = {}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_i \frac{s^{i+1}}{(i+1)!} \|{}^0e_{i+1} + o(1)\|. \tag{49}$$

Protože norma je spojitá funkce ve V_n a $\|{}^0e_{i+1}\| = 1$, dostáváme z (49) přímo (46). Limita (47) je pak přímým důsledkem (46).

Poznámka. Z (45) plyne, že $\|r(s) - {}^0r\|^2 = s^2\|{}^0e_1\| + o(s^2)$, takže platí $\lim\limits_{s \to 0+} \frac{\sigma[k(0), k(s)]}{s} = 1$. Odtud snadno nahlédneme, že platí toto tvrzení: Nechť f je libovolná representace orientované křivky k, $f(0)$ její počátek. Pak místo (46) lze psát

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\sigma[c_i(t), f(t)]}{\sigma^{i+1}(f(0), f(t))} = \frac{1}{(i+1)!} {}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_i .$$

Nakonec uvedeme jednu větu týkající se křivek v dvojrozměrném prostoru Minkowského. Zachovávajíce předchozí označení a předpoklady, mějme v $M_2(\sigma)$ orientovanou křivku k o oblouku s, $s \in \langle 0, s_1 \rangle$. Buď $s > 0$. Předpokládejme, že křivost $\varkappa_1(s)$ křivky k je kladná. Označme $a(s)$ průsečík přímek $k(s) + \lambda_1 e_2(s)$, $k(0) + \lambda_2 e_2(0)$. Pak platí