Резюме

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага.

(Поступило в редакцию 23/V 1956 г.)

Пусть G — открытая часть m-мерного евклидова пространства E_m, $\emptyset \neq G \neq E_m$; пусть f — (конечная вещественная) непрерывная функция на множестве $H(G)$. ($H(G)$ — граница, $\overline{G}$ — замыкание множества G.) Если функция F непрерывна в $\overline{G}$, гармонична в G и равна f на $H(G)$, то скажем, что F — решение задачи Дирихле, соответствующей функции f и множеству G. Если множество G ограничено, существует не более чем одна такая функция F. Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — система всех непустых открытых ограниченных множеств $G \subset E_m$ таких, что для каждой непрерывной функции на $H(G)$ существует решение задачи Дирихле; пусть, далее, $\mathfrak{G}^m = \mathfrak{G}$ — система всех $G \subset E_m$ ($G \neq E_m$), обладающих тем свойством, что $G \cap K \in \mathfrak{g}$ для всякой достаточно большой открытой сферы K с центром в начале координат. Если $G \in \mathfrak{G}$, пусть $\mathfrak{D}(G)$ — множество тех функций f, непрерывных на $H(G)$, которые обладают следующим свойством: Существует неотрицательная непрерывная в $\overline{G}$ функция F, гармоническая в G и удовлетворяющая соотношению $F(x) \geqq |f(x)|$ для всякого $x \in H(G)$.

Нетрудным следствием теоремы 13 является следующее предложение: *Для каждой неотрицательной функции $f \in \mathfrak{D}(G)$ ($G \in \mathfrak{G}$) существует наименьшее неотрицательное решение соответствующей задачи Дирихле.*

Это решение обозначим символом $D(G, f)$ и для произвольной функции $f \in \mathfrak{D}(G)$ положим $D(G, f) = D(f) = D(G, f_+) - D(G, f_-)$, где $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$. Функция $D(f)$ является, очевидно, решением соответствующей задачи Дирихле. Вместо $(D(f))(x)$ пишем $D(f, x)$ ($x \in \overline{G}$). — Теорема 23 утверждает:

Пусть $G \subset E_m$ открыто, $0 \neq G \neq E_m$. Предположим, что для всякого $b \in H(G)$ существует гиперплоскость R и замкнутая сфера K с центром в R так, что $b \in R \cap K$ и что $R \cap K \cap G = \emptyset$. Тогда $G \in \mathfrak{G}$.

Пусть теперь $\mathfrak{G}_1^m = \mathfrak{G}_1$ — система тех $G \in \mathfrak{G}$, для которых $D(G, 1, x) = 1$ ($x \in G$); далее положим $\mathfrak{G}_0^m = \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_1$. Из упражнения 12 следует, что $\mathfrak{G}_1^2 = \mathfrak{G}^2$; всякое ограниченное множество $G \in \mathfrak{G}^m$ является, очевидно, элементом $\mathfrak{G}_1^m$ (m произвольно). Если $m > 2$, тогда каждое множество $G \in \mathfrak{G}$ с ограниченным дополнением принадлежит $\mathfrak{G}_0^m$ (см. теорему 35). — Из отделов 17—19, 24—31 следует:

Если $G \in \mathfrak{G}_0$, то $\inf\limits_{x \in G} D(f, x) = 0$ *для всякой неотрицательной функции $f \in \mathfrak{D}(G)$.*