ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 82 * PRAHA, 30. III. 1957 * ČÍSLO 1

STUDIE ZE ZÁKLADŮ GEOMETRIE
I. ÚTVARY NEORIENTOVANÉ

BORIS GRUBER, Poděbrady.
(Došlo dne 3. října 1955.) DT: 513,01

Práce je věnována axiomatickému budování základů trojrozměrné euklidovské geometrie. Tato první část studuje vlastnosti incidenční, rovnoběžnost, kolmost a důsledky pátého Euklidova postulátu o rovnoběžkách. Primitivní pojmy jsou *bod, zaměření* (ve smyslu neorientovaný směr) a *kolmý*, pro něž je vysloveno devět axiomů. Definují se zejména pojmy přímka a rovina jako jisté množiny bodů.

Primitivní pojmy jsou *bod, zaměření* a *kolmý*. Body značíme $A, B, C, \ldots$, zaměření $z, z', z_1, z_2, \ldots$ Každé dvojici různých bodů A, B je přiřazeno zaměření, které značíme $\zeta(AB)$. Jsou-li z_1, z_2 zaměření, pak jsou buď kolmá (znak $z_1 \perp z_2$) nebo nejsou kolmá (znak z_1 non $\perp z_2$). Množinu všech bodů nazýváme prostorem a označujeme **P**. Tyto pojmy mají následující vlastnosti:

I. *Existuje aspoň jeden bod a aspoň jedno zaměření.*

II. $A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BA)$.

III. $\zeta(AB) = \zeta(AC), B \neq C \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BC)$.

IV. *Je-li dán bod A a zaměření z, pak existují body B, C tak, že* $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) \neq z$.

V. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_2 \perp z_1$.

VI. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_1 \neq z_2$.

VII. *Je-li $z_1 \neq z_2$, pak existuje právě jedno zaměření z, pro něž platí $z_1 \perp z \perp z_2$.*

VIII. $\zeta(AB) \perp z$, $\zeta(AC) \perp z$, $B \neq C \Rightarrow \zeta(BC) \perp z$.

IX. *Je-li $A \neq B$ a z_1 non $\perp z_2$, pak existuje bod C, pro nějž platí* $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$.[1])

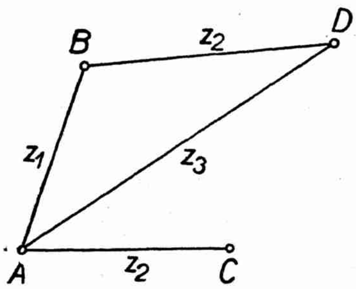
[1]) Nezávislost uvedeného systému axiomů zde nebudeme zkoumat. Že je bezesporný, ukazuje na př. model trojrozměrného euklidovského prostoru. Rozumějme bodem uspořádanou trojici $[a, b, c]$ reálných čísel a zaměřením poměr $p : q : r$ tří reálných čísel. (To je uspořádaná trojice reálných čísel, z nichž aspoň jedno je různé od nuly; přitom poměry $p_1 : q_1 : r_1$, $p_2 : q_2 : r_2$ považujeme za totožné, existuje-li číslo $k \neq 0$ tak, že je $p_1 = kp_2$, $q_1 = kq_2$, $r_1 = kr_2$.) Jsou-li body $[a_1, b_1, c_1]$, $[a_2, b_2, c_2]$ různé, přiřadíme jim zaměření $(a_1 - a_2) : (b_1 - b_2) : (c_1 - c_2)$. Zaměření $p_1 : q_1 : r_1$, $p_2 : q_2 : r_2$ považujeme za kolmá, je-li $p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$. Axiomy I až IX jsou pak zřejmě splněny.

1. Přímka

Zde zkoumáme důsledky axiomů I až IV.

1.1. *Existují aspoň čtyři různé body a tři různá zaměření.*

Důkaz. Podle I existuje bod A a zaměření z_1. Podle IV existují body B, C tak, že $\zeta(AB) = z_1$, $\zeta(AC) \neq z_1$ (obr. 1). Označme $\zeta(AC) = z_2$, takže $z_1 \neq z_2$. Jest $B \neq A \neq C$, ježto symboly $\zeta(AB)$, $\zeta(AC)$ mají smysl, a $B \neq C$, ježto $z_1 \neq z_2$. Podle IV existuje bod D tak, že platí $\zeta(BD) = z_2$; tedy jest $B \neq D$. Rovněž jest $A \neq D$; jinak by totiž podle II bylo $z_2 = \zeta(BD) = \zeta(BA) = \zeta(AB) = z_1$ proti předpokladu. Označme $z_3 = \zeta(AD)$. Tvrdíme, že je $z_1 \neq z_3 \neq z_2$. Kdyby bylo $z_1 = z_3$, bylo by $\zeta(AB) = \zeta(AD)$ a z toho podle III $\zeta(AB) = \zeta(BD)$ čili $z_1 = z_2$ — spor. Kdyby bylo $z_2 = z_3$, bylo by $\zeta(DB) = \zeta(DA)$, z toho podle III $\zeta(DB) = \zeta(BA)$, to jest $z_2 = z_1$ — opět spor. Konečně jest $D \neq C$, neboť jinak by bylo $z_2 = z_3$.



Obr. 1.

1.2. Definice. *Množinu $M \subset \mathbf{P}$ nazýváme maximální množinou o vlastnosti V, jestliže*

1. *M má vlastnost V,*
2. *je-li $M \subset M_1 \subset \mathbf{P}$, $M \neq M_1$, pak M_1 nemá vlastnost V.*

1.3. Definice. *Množinu $p \subset \mathbf{P}$ nazýváme přímkou, jestliže*

1. *obsahuje aspoň dva různé body,*
2. *je to maximální množina této vlastnosti:*

$$A, B, C, D \in p,\ A \neq B,\ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD)\,. \tag{1}$$

1.4. Definice. *Zaměřením přímky p rozumíme zaměření $\zeta(AB)$, je-li $A, B \in p$, $A \neq B$. Zaměření přímky p značíme $\zeta(p)$.*

1.5. *Jestliže pro přímky p, p_1 platí $p \subset p_1$, jest $p = p_1$.*

Důkaz. Platí (1) a

$$A, B, C, D \in p_1,\ A \neq B,\ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD)\,. \tag{2}$$

Kdyby bylo $p \neq p_1$, nebyla by p maximální množina vlastnosti (1) — spor s definicí 1.3.

1.6. *Budiž A bod, z zaměření. Potom množina všech bodů X, pro něž platí*

$$\text{buď } X = A \text{ nebo } \zeta(AX) = z\,, \tag{3}$$

je přímka o zaměření z obsahující bod A.

Důkaz. Označme p množinu všech bodů X, pro něž platí (3). Jest $A \in p$. Podle IV existuje bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z$. Tedy $B \in p$, $B \neq A$, takže p obsahuje aspoň dva různé body. Zvolme v množině p body C, D, E, F tak, aby $C \neq D$, $E \neq F$. Je-li $C = A$ nebo $D = A$, jest $\zeta(CD) = z$ (užíváme II). Je-li $C \neq A \neq D$, jest $\zeta(AC) = z$, $\zeta(AD) = z$; z III pak plyne $\zeta(CD) = z$. Stejně se dokáže $\zeta(EF) = z$, takže $\zeta(CD) = \zeta(EF)$. Tedy p má vlastnost (1). Budiž konečně $p \subset p_1 \subset \mathsf{P}$, $p \neq p_1$, takže existuje bod G patřící do p_1, nikoli však do p. Podle definice množiny p je $G \neq A$, $\zeta(AG) \neq z$. V množině p_1 vezměme body A, B, A, G, takže $A \neq B$, $A \neq G$. Podle předcházejícího je $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AG) \neq z$, což znamená, že p_1 nemá vlastnost (2). Tedy p je maximální množina o vlastnosti (1), tedy přímka. Obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(p) = \zeta(AB) = z$.

1.7. *Budiž A bod, z zaměření. Pak existuje právě jedna přímka, která obsahuje bod A a má zaměření z. Je to množina všech bodů X splňujících* (3).

Důkaz. Označme p množinu všech bodů X, pro něž platí (3). Podle 1.6 je množina p přímka, která obsahuje bod A a má zaměření z. Budiž p_1 přímka o zaměření z, obsahující bod A. Pro každý bod X přímky p_1 platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) = z$, takže $p_1 \subset p$. Z 1.5 plyne $p_1 = p$.

1.8. *Nechť přímka p obsahuje bod A a má zaměření z. Potom p je množina všech bodů X, pro něž platí* (3).

Důkaz plyne z 1.7.

1.9. *Existuje aspoň jedna přímka.*

Důkaz plyne z I a 1.7.

1.10. *Ke každé přímce existuje bod, který na ní neleží. Ke každému bodu existuje přímka, která jím neprochází.*

Důkaz. 1. Budiž p libovolná přímka. Zvolme bod $A \in p$ a označme $z = \zeta(p)$. Podle IV existuje bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) \neq z$; tedy C non $\in p$.

2. Budiž A libovolný bod. Podle 1.1 existují zaměření $z_1 \neq z_2$ a podle IV lze najít bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z_1$, takže $A \neq B$. Podle 1.7 existuje přímka p, která obsahuje bod B a má zaměření z_2. Je to množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = B$ nebo $\zeta(BX) = z_2$. Ježto $\zeta(BA) = z_1 \neq z_2$, neprochází přímka p bodem A.

1.11. *Budiž $A \neq B$. Pak existuje právě jedna přímka, která obsahuje body A, B.*

Důkaz. Označme $z = \zeta(AB)$. Z 1.7 plyne, že existuje přímka p, která obsahuje bod A a má zaměření z, a že je $B \in p$. Za druhé nechť každá z přímek p_1, p_2 obsahuje body A, B. Pak každá z nich obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(A, B)$, takže jest podle 1.7 $p_1 = p_2$.

1.12. *Nechť body A, B, C neleží v přímce. Potom jsou tyto body navzájem různé a rovněž zaměření $\zeta(AB)$, $\zeta(AC)$, $\zeta(BC)$ jsou navzájem různá.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve $A = B = C$. Podle I existuje zaměření z a podle 1.7 přímka, která má zaměření z a obsahuje bod A a tedy i body B, C. To je však spor s předpokladem. Za druhé předpokládejme $A = B \neq C$. Podle 1.11 existuje přímka, která obsahuje body B, C, tedy i bod A, opět spor. Stejně v případech $A \neq B = C$, $A = C \neq B$. Tedy body A, B, C jsou navzájem různé. Konečně předpokládejme, že platí $\zeta(AB) = \zeta(AC)$ a označme toto zaměření z. Z 1.7 plyne, že existuje přímka, která obsahuje bod A a má zaměření z a že tato přímka obsahuje též body B, C, neboť platí $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) = z$. To však je spor. Tedy $\zeta(AB) \neq \zeta(AC)$ a stejně v ostatních dvou případech.

1.13. *Existují tři (navzájem různé) body, které neleží v přímce.*

Důkaz. Podle I existuje bod A a zaměření z a podle IV body B, C, pro něž platí $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) \neq z$. Body A, B, C nemohou ležet na žádné přímce, neboť pak by muselo být $\zeta(AB) = \zeta(AC)$.

1.14. Definice. *Přímky p, q nazýváme rovnoběžné*, je-li $\zeta(p) = \zeta(q)$.

1.15. *Jsou-li přímky p, q rovnoběžné, jsou buď disjunktní nebo totožné.*

Důkaz. Nechť přímky p, q mají zaměření z. Nejsou-li disjunktní, označme A některý jejich společný bod. Z 1.7 plyne $p = q$.

1.16. *Existují dvě rovnoběžné disjunktní přímky.*

Důkaz. Podle 1.9 existuje přímka; označme ji p. Podle 1.10 existuje bod A, který neleží na p. Podle 1.7 existuje přímka, která obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(p)$; označme ji q. Přímky p, q jsou rovnoběžné. Nemohou být totožné, neboť A neleží na p. Tedy jsou podle 1.15 disjunktní.

1.17. *Nechť p, q jsou přímky. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, q jsou disjunktní,*
2. *p, q mají společný právě jeden bod,*
3. *p, q jsou totožné.*

Důkaz. Protože každá přímka obsahuje aspoň dva různé body, nemohou nastat zároveň žádné dva z uvedených tří případů. Nejsou-li přímky p, q disjunktní, mají společný aspoň jeden bod. Mají-li společný více než jeden bod, jsou podle 1.11 totožné.

1.18. Definice. *Přímky p, q nazýváme různoběžné, mají-li společný právě jeden bod.*

1.19. *Jsou-li přímky p, q různoběžné, jsou navzájem různé a jest $\zeta(p) \neq \zeta(q)$.*

Důkaz. Kdyby různoběžné přímky p, q byly totožné, nastávaly by zároveň případy 2, 3 z věty 1.17, což tato věta vylučuje. Kdyby bylo $\zeta(p) = \zeta(q)$, byly by p, q rovnoběžné. Protože nejsou totožné, byly by podle 1.15 disjunktní, takže by nastávaly zároveň případy 2 a 1 z věty 1.17, což není možné.

1.20. *Existují dvě různoběžné přímky.*

Důkaz. Podle 1.1. existují bod A a zaměření $z_1 \neq z_2$. Podle 1.7 existuje přímka p_1, která obsahuje bod A a má zaměření z_1, a přímka p_2, která obsahuje bod A a má zaměření z_2. Kdyby přímky p_1, p_2 měly kromě bodu A společný ještě nějaký jiný bod, byly by podle 1.11 totožné, takže by bylo $z_1 = z_2$ — spor.

1.21. *Existují přímky p, q, pro něž nastává případ* 1 *z věty* 1.17. *Existují přímky p, q, pro něž nastává případ* 2 *z věty* 1.17. *Existují přímky p, q, pro něž nastává případ* 3 *z věty* 1.17.

Důkaz plyne z 1.16, 1.20 a 1.9.

2. Rovina

Zde vyvozujeme důsledky z axiomů I až VIII.

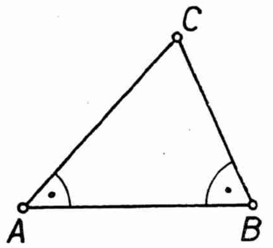
2.1. *Ke každému zaměření existuje zaměření kolmé.*

Důkaz. Budiž z_1 libovolné zaměření. Podle 1.1 existuje zaměření $z_2 \neq z_1$ a podle VII existuje zaměření $z \perp z_1$.

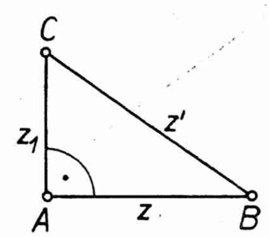
2.2. *Nechť A, B, C jsou tři různé body. Pak neplatí zároveň*

$$\zeta(AB) \perp \zeta(AC)\,, \qquad \zeta(AB) \perp \zeta(BC)\,.$$

Důkaz. Předpokládejme, že uvedené vztahy platí, a označme $\zeta(AB) = z$, takže $\zeta(CA) \perp z$, $\zeta(CB) \perp z$, $A \neq B$ (obr. 2). Z VIII plyne $\zeta(AB) \perp z$, t. j. $z \perp z$, což je spor s VI.



Obr. 2.



Obr. 3.

2.3. *Ke každému zaměření z existuje zaměření z', pro něž platí $z' \neq z$, z' non $\perp z$.*

Důkaz. Budiž z libovolné zaměření. Podle 2.1 existuje zaměření $z_1 \perp z$ a podle I bod A (obr. 3). Najděme podle IV body B a C tak, aby platilo

$$\zeta(AB) = z\,, \qquad \zeta(AC) = z_1\,.$$

Jest $B \neq C$, neboť jinak by bylo $z = z_1$ a to není podle VI možné. Označme $z' = \zeta(BC)$. Kdyby bylo $z = z'$, to jest $\zeta(BA) = \zeta(BC)$, plynulo by z III $\zeta(BA) = \zeta(AC)$, to jest $z = z_1$, což není možné. Tedy je $z' \neq z$. Ježto platí $z \perp z_1$, to jest $\zeta(AB) \perp \zeta(AC)$, nemůže podle 2.2 platit $\zeta(AB) \perp \zeta(BC)$, to jest $z \perp z'$. Tedy z' non $\perp z$.

2.4. *Existují zaměření z_1, z_2, z_3, pro něž platí $z_1 \perp z_2$, $z_1 \perp z_3$, $z_2 \perp z_3$.*

Důkaz. Podle I existuje zaměření z_1 a podle 2.1 zaměření $z_2 \perp z_1$. Podle VI je $z_1 \neq z_2$, takže podle VII existuje zaměření z_3, pro něž platí $z_1 \perp z_3 \perp z_2$.

2.5. *Budiž $n \geqq 4$, buďtež $z_1, z_2, \ldots, z_n$ zaměření. Potom existují taková i, j ($1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$), že z_i non $\perp z_j$.*

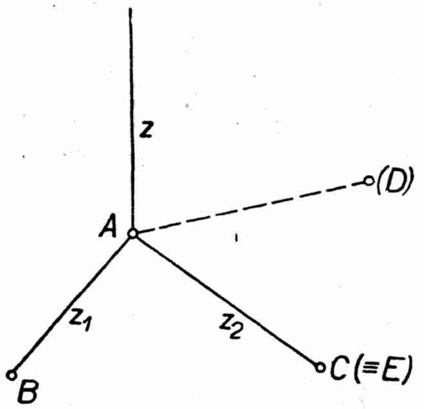
Důkaz. Předpokládejme naopak, že platí $z_i \perp z_j$ pro všechna i, j ($1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$). Platí tedy $z_1 \perp z_3 \perp z_2$, $z_1 \perp z_4 \perp z_2$. Podle VI je $z_1 \neq z_2$ a podle VII $z_3 = z_4$, což je spor s předpokladem $z_3 \perp z_4$.

2.6 Definice. *Množinu $\tau \subset$ **P** nazýváme rovinou, jestliže*

1. *obsahuje aspoň dva různé body,*
2. *existuje takové zaměření z, že τ je maximální množina této vlastnosti:*

$$A, B \in \tau\,, \; A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z\,. \tag{1}$$

2.7. *Každá rovina obsahuje tři body, které neleží v přímce.*



Obr. 4.

Důkaz. Mějme libovolnou rovinu τ. Podle 2.6 existují body $A \neq B$, které leží v τ. Dále existuje takové zaměření z, že τ je maximální množina vlastnosti (1). Označme $z_1 = \zeta(AB)$. Ježto τ má vlastnost (1), jest $z_1 \perp z$ a tedy $z_1 \neq z$. Podle VII existuje zaměření z_2, pro něž platí $z_1 \perp z_2 \perp z$ (obr. 4), a podle IV můžeme nalézt bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) = z_2$. Protože $z_2 \perp z_1$, je $z_2 \neq z_1$, takže body A, B, C neleží v přímce. Předpokládejme, že bod C neleží v τ, a označme $\tau_1 = \tau \cup \{C\}$, takže $\tau \subset \tau_1 \subset$ **P**, $\tau \neq \tau_1$. Dokážeme implikaci

$$D, E \in \tau_1\,, \; D \neq E \Rightarrow \zeta(DE) \perp z\,. \tag{2}$$

Zvolme libovolně body $D, E \in \tau_1$, $D \neq E$. Je-li $D \neq C \neq E$, patří body D, E do τ a (2) plyne z (1). Nechť je tedy třeba $E = C$, takže $D \in \tau$. Je-li $D = A$, jest $\zeta(DE) = \zeta(AC) = z_2 \perp z$. Je-li $D \neq A$, jest $\zeta(AD) \perp z$, neboť $D \in \tau$, a $\zeta(AE) = \zeta(AC) = z_2 \perp z$. Z toho pode VIII je $\zeta(DE) \perp z$. Tím je správnost implikace (2) dokázána. To však znamená, že τ není maximální množina vlastnosti (1), což je spor. Nebyl tedy správný předpoklad, že C neleží v τ. Tedy v τ leží body A, B, C, které neleží v přímce.

2.8. *Žádná množina není zároveň přímkou a rovinou.*

Důkaz plyne z 2.7.

2.9. *Nechť τ je rovina a nechť platí implikace* (1) *a implikace*

$$A, B \in \tau, A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z' . \tag{3}$$

Potom jest $z = z'$.

Důkaz. Podle 2.7 existují v rovině τ body C, D, E, které neleží v přímce. Podle 1.12 jsou tyto body navzájem různé a platí $\zeta(CD) \neq \zeta(CE)$. Protože platí (1), jest $\zeta(CD) \perp z \perp \zeta(CE)$, a protože platí (3), jest $\zeta(CD) \perp z' \perp \zeta(CE)$. Ze VII plyne $z = z'$.

2.10. *Nechť τ jest rovina. Potom existuje právě jedno zaměření z tak, že τ je maximální množinou vlastnosti* (1). *Toto zaměření z nazýváme zaměřením kolmým k rovině τ nebo krátce zaměřením roviny τ a označujeme $\zeta(\tau)$.*[2])

Důkaz. Aspoň jedno takové zaměření z existuje podle 2.6. Předpokládejme, že pro zaměření z' platí, že τ je maximální množina vlastnosti (3). Potom tedy platí jak implikace (1), tak implikace (3), a z 2.9 dostáváme $z = z'$.

2.11. *Nechť τ je rovina a nechť platí implikace* (1). *Potom z jest zaměřením roviny τ.*

Důkaz. Označme z' zaměření roviny τ. To znamená, že τ je maximální množina vlastnosti (3). Tedy τ má vlastnost (3), t. j. platí implikace (3) a podle předpokladu implikace (1). Z 2.9 plyne $z = z'$.

2.12. *Jestliže pro roviny τ, τ_1 platí $\tau \subset \tau_1$, jest $\tau = \tau_1$.*

Důkaz. Označíme-li $z = \zeta(\tau)$, $z_1 = \zeta(\tau_1)$, platí (1) a

$$A, B \in \tau_1, A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z_1 . \tag{4}$$

Je-li $A, B \in \tau$, je také $A, B \in \tau_1$, neboť $\tau \subset \tau_1$, takže

$$A, B \in \tau, A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z_1 . \tag{5}$$

Z (1) a (5) podle 2.9 plyne $z = z_1$. Kdyby bylo $\tau \neq \tau_1$, plynulo by z (1) a (4), že τ není maximální množinou vlastnosti (1) — spor.

2.13. *Buď A bod, z zaměření. Potom množina všech bodů X, pro něž platí*

$$\text{buď } X = A \text{ nebo } \zeta(AX) \perp z , \tag{6}$$

je rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z.

Důkaz. Označme τ množinu všech bodů X, pro něž platí (6). Podle 2.1 existuje zaměření $z_1 \perp z$ a podle IV bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z_1$. Tedy $B \in \tau$, takže τ obsahuje dva různé body. Za druhé zvolme libovolně body C, $D \in \tau$, $C \neq D$. Je-li $C = A$ nebo $D = A$, jest podle (6) $\zeta(CD) \perp z$. Je-li $C \neq A \neq D$, plyne ze vztahů $\zeta(AC) \perp z$, $\zeta(AD) \perp z$ podle VIII $\zeta(CD) \perp z$. Je tedy správná

[2]) Zaměření $\zeta(\tau)$ znamená zřejmě zaměření přímky kolmé k rovině τ (viz definici 3.30). Název „zaměření roviny" není sice běžný, ale je zcela důsledný. Přímka i rovina určují jednoznačně jisté zaměření. Nazýváme-li je v prvním případě „zaměření přímky", je přirozené nazývat je v druhém případě „zaměřením roviny".

implikace (1). Konečně vezměme libovolnou množinu τ_1, pro niž platí $\tau \subset \tau_1 \subset \subset \mathbf{P}$, $\tau \neq \tau_1$. Existuje bod E, který patří do τ_1, nikoli však do τ, takže je $E \neq A$, $\zeta(AE)$ non $\perp z$. Protože τ_1 obsahuje bod $E \neq A$, pro nějž neplatí $\zeta(AE) \perp z$, jest τ maximální množinou vlastnosti (1), tedy rovinou. Tato rovina obsahuje bod A a platí pro ni implikace (1), takže podle 2.11 je jejím zaměřením zaměření z.

2.14. *Budiž A bod, z zaměření. Potom existuje právě jedna rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z. Je to množina všech bodů X, splňujících* (6).

Důkaz. Označme τ množinu všech bodů X, které splňují (6). Podle 2.13 je τ rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z. Je-li τ_1 rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z, pak τ_1 je maximální množinou vlastnosti (2). Z toho plyne, že pro každý bod X množiny τ_1 platí (6), takže $\tau_1 \subset \tau$. Z 2.12 plyne $\tau_1 = \tau$.

2.15. *Nechť rovina τ obsahuje bod A a má zaměření z. Potom τ je množina všech bodů X, splňujících* (6).

Důkaz plyne z 2.14.

2.16. *Existuje aspoň jedna rovina.*

Důkaz plyne z I a 2.14.

2.17. *Ke každé rovině existuje bod, který na ní neleží. Ke každému bodu existuje rovina, která jím neprochází.*

Důkaz. 1. Budiž τ rovina; označme $z = \zeta(\tau)$ a zvolme $A \in \tau$. Podle IV existuje bod B, pro který platí $\zeta(AB) = z$, tedy vzhledem k VI $\zeta(AB)$ non $\perp z$. Z 2.15 pak plyne B non $\in \tau$.

2. Budiž A libovolný bod. Podle I existuje zaměření z a podle IV bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z$. Podle 2.14 existuje rovina τ, která obsahuje bod B a má zaměření z. Je to množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = B$ nebo $\zeta(BX) \perp z$. Bod A neleží v τ, neboť není ani $A = B$ ani $\zeta(BA) \perp z$.

2.18. *Třemi body, které neleží v přímce, prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť body A, B, C neleží v přímce. Podle 1.12 jsou navzájem různé a platí $\zeta(AB) \neq \zeta(AC)$. Podle VII existuje zaměření z, pro něž platí

$$\zeta(AB) \perp z \perp \zeta(AC). \tag{7}$$

Z 2.14 plyne, že existuje rovina τ, která obsahuje bod A a má zaměření z, a že tato rovina — vzhledem k (7) — obsahuje též body B, C. Za druhé předpokládejme, že rovina τ_1 obsahuje body A, B, C. Pak tedy platí $\zeta(AB) \perp \perp \zeta(\tau_1) \perp \zeta(AC)$. Odtud a ze (7) plyne podle VII $\zeta(\tau_1) = z$. Každá z rovin τ, τ_1 obsahuje tedy bod A a má zaměření z, takže $\tau = \tau_1$ podle 2.14.

2.19. Definice. *Roviny τ_1, τ_2 nazýváme rovnoběžné, je-li $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$.*

2.20. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 rovnoběžné, pak jsou buď disjunktní nebo totožné.*

Důkaz. Nechť roviny τ_1, τ_2 mají zaměření z. Nejsou-li disjunktní, označme A některý jejich společný bod a užijme 2.14.

2.21. *Existují dvě rovnoběžné disjunktní roviny.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina; označme ji τ. Podle 2.17 existuje bod A, který neleží v τ, a podle 2.14 existuje rovina, která obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(\tau)$. Označme ji τ_1. Roviny τ, τ_1 jsou rovnoběžné. Nejsou totožné, ježto A leží v τ_1 a neleží v τ. Tedy jsou podle 2.20 disjunktní.

2.22. *Budiž τ rovina, A bod. Pak existuje právě jedna rovina, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ.*

Důkaz. Hledaná rovina musí obsahovat bod A a mít zaměření $\zeta(\tau)$. Podle 2.14 taková rovina existuje, a to právě jedna.

2.23. *Budiž τ rovina a A bod, který neleží v τ. Pak existuje aspoň jedna rovina, která prochází bodem A a je disjunktní s rovinou τ.*

Důkaz. Podle 2.22 existuje rovina τ_1, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ. Roviny τ, τ_1 nejsou totožné, neboť A leží v τ_1 a neleží v τ. Tedy jsou podle 2.20 disjunktní.

2.24. *Jestliže roviny τ_1, τ_2 mají společný bod, pak mají společnou přímku.*

Důkaz. Nechť roviny τ_1, τ_2 mají společný bod A. Označme $z_1 = \zeta(\tau_1)$, $z_2 = \zeta(\tau_2)$. Ze VII nebo 2.1 plyne existence zaměření z, pro něž platí $z_1 \perp \perp z \perp z_2$. Podle 1.7 existuje přímka p, která obsahuje bod A a má zaměření z. Podle 2.15 je τ_1 množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp \perp z_1$, a τ_2 množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp z_2$. Je-li $X \in p$, je podle 1.8 buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) = z$, to jest buď $X = A$ nebo $z_1 \perp \zeta(AX) \perp z_2$, takže $X \in \tau_1$ i $X \in \tau_2$. Tedy přímka p leží v rovině τ_1 i v rovině τ_2.

2.25. *Nechť τ_1, τ_2 jsou roviny. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *τ_1, τ_2 jsou disjunktní,*
2. *τ_1, τ_2 se protínají v přímce,*[3])
3. *τ_1, τ_2 jsou totožné.*

Důkaz. Zřejmě nemůže nastat zároveň případ 1 a některý z případů 2, 3. Že nemohou nastat zároveň ani případy 2, 3 plyne z 2.8. Nejsou-li roviny τ_1, τ_2 disjunktní, mají podle 2.24 společnou přímku p. Mají-li společný ještě bod A, který neleží v p, zvolme na p body $B \neq C$. Body A, B, C neleží v přímce. Kdyby totiž nějaká přímka tyto body obsahovala, byla by podle 1.11 totožná s p, a to není možné, protože A neleží na p. Z 2.18 plyne, že roviny τ_1, τ_2 jsou totožné, neboť každá z nich obsahuje body A, B, C.

2.26. Definice. *Roviny τ_1, τ_2 nazýváme různoběžné, protínají-li se v přímce.*

2.27. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 různoběžné, jsou navzájem různé a jest $\zeta(\tau_1) \neq \zeta(\tau_2)$.*

Důkaz. Kdyby různoběžné roviny τ_1, τ_2 byly totožné, nastávaly by zároveň případy 2, 3 z věty 2.25, což však tato věta nepřipouští. Kdyby bylo $\zeta(\tau_1) =$

---

[3]) Tím rozumíme, že průnik množin τ_1, τ_2 je přímka.

$= \zeta(\tau_2)$, byly by τ_1, τ_2 rovnoběžné. Jelikož nejsou totožné, byly by podle 2.20 disjunktní, takže by nastávaly zároveň případy 2, 1 z věty 2.25. To však není možné.

2.28. *Existují dvě různoběžné roviny.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina. Označme ji τ_1 a zvolme na ní bod A. Podle 1.1 existuje zaměření $z_2 \neq \zeta(\tau_1)$ a podle 2.14 existuje rovina τ_2, která obsahuje bod A a má zaměření z_2. Roviny τ_1, τ_2 nejsou disjunktní, neboť obě obsahují bod A, a nejsou totožné, neboť mají různá zaměření. Z 2.25 plyne, že jsou různoběžné.

2.29. *Existují roviny τ_1, τ_2, pro něž nastává případ 1 z věty 2.25. Existují roviny τ_1, τ_2, pro něž nastává případ 2 z věty 2.25. Existují roviny τ_1, τ_2, pro něž nastává případ 3 z věty 2.25.*

Důkaz plyne z 2.21, 2.28 a 2.16.

2.30. Definice. *Roviny τ_1, τ_2 nazýváme kolmé, je-li $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$.*

2.31. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 kolmé, pak nejsou rovnoběžné a tedy jsou navzájem různé.*

Důkaz plyne z VI.

2.32. *Existují tři roviny, z nichž každé dvě jsou kolmé.*

Důkaz plyne z 2.4, I a 2.14.

2.33. *Jsou-li dány více než tři roviny, pak mezi nimi existují dvě, které nejsou kolmé.*

Důkaz plyne z 2.5.

3. Rovina a přímka

Stále předpokládáme platnost axiomů I až VIII.

3.1. *Nechť přímka p má s rovinou τ společný aspoň jeden bod. Potom p leží v τ tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau) . \tag{1}$$

Důkaz. 1. Nechť p leží v τ. Zvolíme-li na přímce p body $A \neq B$, jest $\zeta(p) = \zeta(AB) \perp \zeta(\tau)$.

2. Nechť přímka p má s rovinou τ společný bod A a nechť platí (1). Označme $z_1 = \zeta(p)$, $z_2 = \zeta(\tau)$, takže $z_1 \perp z_2$. Rovina τ je podle 2.15 množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp z_2$. Je-li $X \in p$, jest podle 1.8 buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) = z_1$, tedy buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp z_2$, takže $X \in \tau$. Tedy $p \subset \tau$.

3.2. *Leží-li přímka p v rovině τ, platí* (1).

Důkaz plyne z 3.1.

3.3. *Nechť přímka p a bod A leží v rovině τ. Potom existuje v rovině τ právě jedna přímka, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p.*

Důkaz. Podle 3.2 jest $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Hledaná přímka musí procházet bodem A a mít zaměření $\zeta(p)$. Podle 1.7 taková přímka existuje, a to právě jedna. Z 3.1 pak plyne, že tato přímka leží v rovině τ.

3.4. *Nechť přímka p a bod A leží v rovině τ, nechť A neleží na p. Potom existuje v rovině τ aspoň jedna přímka, která prochází bodem A a je disjunktní s p.*

Důkaz. Podle 3.3 existuje v rovině τ přímka q, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p. Přímky p, q nejsou totožné, neboť A neleží na p. Tedy jsou podle 1.15 disjunktní.

3.5. *V každé rovině leží dvě různoběžné přímky.*

Důkaz. Nechť τ je rovina. Podle 2.1 existuje zaměření $z_1 \perp \zeta(\tau)$, takže $z_1 \neq \zeta(\tau)$. Podle VII existuje zaměření z_2, pro něž platí $z_1 \perp z_2 \perp \zeta(\tau)$, tedy $z_1 \neq z_2$. Zvolme v rovině τ bod A a označme p_i $(i = 1, 2)$ přímku procházející bodem A, která má zaměření z_i. Přímky p_1, p_2 existují podle 1.7. Nejsou disjunktní, neboť obě procházejí bodem A, a nejsou totožné, neboť mají různá zaměření. Tedy jsou podle 1.17 různoběžné. Každá z přímek p_i $(i = 1, 2)$ má s rovinou τ společný bod A a platí $\zeta(p_i) = z_i \perp \zeta(\tau)$ pro $i = 1, 2$. Z 3.1 plyne, že přímky p_1, p_2 leží v τ.

3.6. *Budiž τ rovina. Potom platí:*

1. *V τ existují přímky p, q, které jsou disjunktní.*
2. *V τ existují přímky p, q, které jsou různoběžné.*
3. *V τ existují přímky p, q, které jsou totožné.*

Důkaz. Druhé tvrzení je věta 3.5, třetí tvrzení plyne z druhého. Podle třetího tvrzení existuje v τ přímka p a podle 2.8 existuje v τ bod A, který neleží na p. Z 3.4 plyne existence přímky q, která leží v τ a je disjunktní s p. Tím je dokázáno i první tvrzení.

3.7. *Má-li přímka s rovinou společné dva různé body, leží v rovině celá.*

Důkaz. Nechť přímka p má s rovinou τ společné body A, B $(A \neq B)$. Potom jest $\zeta(p) = \zeta(AB) \perp \zeta(\tau)$. Z 3.1 plyne, že p leží v τ.

3.8. *Přímkou a bodem, který na té přímce neleží, prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť bod A neleží na přímce p. Zvolme na p body $B \neq C$. Body A, B, C neleží v přímce. Kdyby totiž nějaká přímka tyto body obsahovala, byla by podle 1.11 totožná s p, což není možné, neboť A neleží na p. Podle 2.18 existuje rovina τ, která obsahuje body A, B, C a podle 3.7 leží p v τ. Jestliže rovina τ_1 prochází bodem A a přímkou p, pak obsahuje body A, B, C a je podle 2.18 totožná s τ.

3.9. *Nechť p je přímka a z zaměření, nechť*

$$z \neq \zeta(p) . \tag{2}$$

Pak existuje právě jedna rovina, která obsahuje přímku p a jejíž zaměření je kolmé k zaměření z.

Důkaz. Na přímce p zvolme bod A. Podle IV existuje bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z$, tedy $\zeta(AB) \neq \zeta(p)$, takže B neleží na přímce p. Podle 3.8 existuje rovina τ, která obsahuje přímku p a bod B. Užitím 3.2 máme

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau) \perp \zeta(AB) = z\,. \tag{3}$$

Jestliže za druhé rovina τ_1 obsahuje přímku p a má zaměření kolmé k zaměření z, jest

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1) \perp z\,. \tag{4}$$

Z (2), (3), (4) plyne podle VII, že roviny τ, τ_1 mají stejná zaměření. Ježto obě obsahují bod A, jsou podle 2.14 totožné.

3.10. *Dvěma různoběžkami prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť p, q jsou různoběžky a A jejich společný bod. Podle 1.19 je $\zeta(p) \neq \zeta(q)$, takže existuje zaměření z, pro něž platí

$$\zeta(p) \perp z \perp \zeta(q)\,. \tag{5}$$

Podle 2.14 existuje rovina τ, která prochází bodem A a má zaměření z. Z 3.1 plyne, že přímky p, q leží v τ. Jestliže rovina τ_1 obsahuje přímky p, q, jest podle 3.2

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1) \perp \zeta(q)\,. \tag{6}$$

Z (5) a (6) plyne podle VII $\zeta(\tau_1) = z$. Rovina τ_1 obsahuje tedy bod A a má zaměření z, takže podle 2.14 je totožná s τ.

3.11. *Dvěma různými rovnoběžnými přímkami prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť přímky p, q jsou různé a mají obě totéž zaměření. Zvolme na q bod A. Podle 1.15 jsou p, q disjunktní, takže A neleží na p. Podle 3.8 existuje rovina τ, která prochází přímkou p a bodem A. Z 3.2 plyne $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Ježto $\zeta(p) = \zeta(q)$, jest také $\zeta(q) \perp \zeta(\tau)$, a užijeme-li 3.1, dostaneme, že q leží v τ. Prochází-li rovina τ_1 přímkami p, q, prochází přímkou p a bodem A, a z 3.8 plyne $\tau_1 = \tau$.

3.12. *Jestliže body A, B, C, D neleží v rovině, pak jsou navzájem různé a žádné tři z nich neleží v přímce.*

Důkaz. Předpokládejme, že na př. body A, B, C leží na přímce p. Jestliže D neleží na p, označme τ rovinu, která prochází přímkou p a bodem D. Taková rovina τ existuje podle 3.8. Jestliže bod D leží na p, existuje podle 1.10 bod E, který neleží na p. Označme pak τ rovinu, která prochází přímkou p a bodem E. Rovina τ v obou případech obsahuje body A, B, C, D, což je spor s předpokladem. Tedy žádné tři z bodů A, B, C, D neleží v přímce. Nyní užijeme věty 1.12 na trojice A, B, C, A, B, D, B, C, D.

3.13. *Existují čtyři body, které neleží v rovině.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina; označme ji τ. Podle 2.7 obsahuje τ body A, B, C, které neleží v přímce, a podle 2.17 existuje bod D, který neleží v τ.

Kdyby nějaká rovina τ_1 obsahovala body A, B, C, D, byla by podle 2.18 totožná s τ. To však není možné, neboť D neleží v τ.

3.14. Definice. *Pravíme, že přímka p a rovina τ jsou rovnoběžné, je-li* $\zeta(p) \perp \perp \zeta(\tau)$.

3.15. *Leží-li přímka p v rovině τ, pak p a τ jsou rovnoběžné.*

Důkaz plyne z 3.2.

3.16. *Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou τ, pak buď p leží v τ nebo p a τ jsou disjunktní.*

Důkaz. Podle předpokladu jest $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Nejsou-li p, τ disjunktní, plyne z 3.1, že p leží v τ.

3.17. *Existují přímka a rovina, které jsou disjunktní rovnoběžné.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina τ a podle 2.17 existuje bod A, který neleží v τ. Podle 2.1 existuje zaměření $z \perp \zeta(\tau)$ a podle 1.7 existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření z. Přímka p je rovnoběžná s τ, avšak neleží v τ, neboť bod A neleží v τ. Z 3.16 plyne, že p, τ jsou disjunktní.

3.18. *Nechť p je přímka, τ rovina. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, τ jsou disjunktní,*
2. *p, τ mají společný právě jeden bod,*
3. *p leží v τ.*

Důkaz. Protože každá přímka obsahuje aspoň dva různé body, nemohou nastat zároveň žádné dva z uvedených tří případů. Nejsou-li p, τ disjunktní, mají společný aspoň jeden bod. Mají-li společný více než jeden bod, leží p v τ podle 3.7.

3.19 Definice. *Pravíme, že přímka p a rovina τ jsou různoběžné, mají-li společný právě jeden bod.*

3.20. *Jsou-li přímka p a rovina τ různoběžné, pak p neleží v τ a jest* $\zeta(p)$ non $\perp \perp \zeta(\tau)$.

Důkaz. Kdyby p ležela v τ, nastávaly by zároveň případy 2, 3 z věty 3.18, což tato věta nepřipouští. Kdyby bylo $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, byly by p, τ rovnoběžné. Ježto p neleží v τ, byly by podle 3.16 p a τ disjunktní, takže by nastávaly zároveň případy 2, 1 z věty 3.18. To však není možné.

3.21. *Existují přímka p a rovina τ, které jsou různoběžné.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina. Označme ji τ a zvolme na ní libovolný bod A. Podle 1.7 existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(\tau)$. Kdyby p ležela v τ, bylo by podle 3.2 $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, to jest $\zeta(\tau) \perp \zeta(\tau)$, což by byl spor s VI. Z 3.18 plyne, že p, τ jsou různoběžné.

3.22. *Existují přímka p a rovina τ, pro něž nastává případ* 1 *z věty* 3.18. *Existují přímka p a rovina τ, pro něž nastává případ* 2 *z věty* 3.18. *Existují přímka p a rovina τ, pro něž nastává případ* 3 *z věty* 3.18.

Důkaz. První dvě tvrzení plynou z 3.17 a 3.21. Třetí plyne z druhého tvrzení věty 2.29.

3.23. *Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou τ_1 a rovina τ_1 rovnoběžná s rovinou τ_2, je p rovnoběžná s τ_2.*

Důkaz. Podle předpokladu je $\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1)$ a $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$. Tedy je $\zeta(p) \perp$. $\perp \zeta(\tau_2)$.

3.24. *Přímka p je rovnoběžná s rovinou τ tehdy a jen tehdy, je-li rovnoběžná aspoň s jednou přímkou roviny τ.*

Důkaz. 1. Je-li p rovnoběžná s přímkou q, která leží v τ, jest podle 3.2 $\zeta(p) = \zeta(q) \perp \zeta(\tau)$, takže p a τ jsou rovnoběžné.

2. Nechť p je rovnoběžná s τ, takže platí $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. V rovině τ zvolme bod A a označme q přímku, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(p)$. Taková přímka existuje podle 1.7. Přímky p, q jsou rovnoběžné a z 3.1 plyne, že q leží v τ.

3.25. *Rovina τ_1 je rovnoběžná s rovinou τ_2 tehdy a jen tehdy, obsahuje-li dvě různoběžky, které jsou obě rovnoběžné s τ_2.*

Důkaz. 1. Nechť τ_1 obsahuje různoběžné přímky p, q, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou τ_2. Označíme-li $z_1 = \zeta(p_1)$, $z_2 = \zeta(q)$, jest podle předpokladu $z_1 \perp \zeta(\tau_2) \perp z_2$, podle 1.19 $z_1 \neq z_2$ a podle 3.2 $z_1 \perp \zeta(\tau_1) \perp z_2$. Z toho plyne podle VII $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$, takže τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné.

2. Nechť roviny τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné. Podle 3.5 obsahuje τ_1 dvě různoběžné přímky p, q a podle 3.2 platí

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)\,, \qquad \zeta(q) \perp \zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)\,,$$

takže p, q jsou rovnoběžné s τ_2.

3.26. *Nechť přímka p je rovnoběžná s rovinami τ_1, τ_2, nechť roviny τ_1, τ_2 jsou různoběžné. Potom p je rovnoběžná s průsečnicí rovin τ_1, τ_2.*

Důkaz. Podle předpokladu jest $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(p) \perp \zeta(\tau_2)$ a podle 2.27 $\zeta(\tau_1) \neq \zeta(\tau_2)$. Označíme-li q průsečnici rovin τ_1, τ_2, plyne z 3.2 $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(q) \perp \zeta(\tau_2)$. Odtud podle VII $\zeta(p) = \zeta(q)$, takže p, q jsou rovnoběžné.

3.27. *Nechť roviny τ_1, τ_2 jsou různoběžné, nechť přímka p leží v τ_1 a je rovnoběžná s τ_2. Potom p je rovnoběžná s průsečnicí rovin τ_1, τ_2.*

Důkaz. Podle 3.15 je p rovnoběžná s τ_1, takže podle 3.26 platí 3.27.

3.28. *Nechť rovina τ je různoběžná s rovinami τ_1, τ_2, nechť roviny τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné. Potom průsečnice rovin τ, τ_1 je rovnoběžná s průsečnicí rovin τ, τ_2.*

Důkaz. Označme p_i ($i = 1, 2$) průsečnici rovin τ, τ_i. Přímka p_1 leží v rovině τ i v rovině τ_1. Podle 3.15 je rovnoběžná s τ_1 a podle 3.23 rovnoběžná s τ_2. Vezmeme-li ve větě 3.27 p_1, τ, τ_2 místo p, τ_1, τ_2, dostáváme, že p_1 je rovnoběžná s p_2.

3.29. *Nechť τ je rovina, A bod. Potom sjednocení všech přímek, které procházejí bodem A a jsou rovnoběžné s rovinou τ, je rovina, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ.*

Důkaz. Označme τ_1 sjednocení všech přímek, které procházejí bodem A a jsou rovnoběžné s rovinou τ. Podle 1.7 existuje aspoň jedna taková přímka, neboť podle 2.1 existuje zaměření $z \perp \zeta(\tau)$. Speciálně tedy bod A patří do množiny τ_1. Dále označme τ_2 rovinu, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ. Podle 2.22 existuje právě jedna taková rovina; z 2.15 plyne, že to je množina všech bodů X, pro něž platí

$$\text{buď } X = A \text{ nebo } \zeta(AX) \perp \zeta(\tau) . \tag{7}$$

Ježto bod A patří do množiny τ_1 i do množiny τ_2, budeme dále uvažovat jen body $X \neq A$. 1. Budiž $X \in \tau_1$, $X \neq A$. Pak existuje přímka p tak, že platí $A \in p$, $X \in p$, $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Tedy jest $\zeta(AX) = \zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, takže $X \in \tau_2$ (viz (7)). 2. Budiž $X \in \tau_2$, $X \neq A$. Označíme-li p přímku, procházející body A, X, jest vzhledem k (7) $\zeta(p) = \zeta(AX) \perp \zeta(\tau)$, takže p je rovnoběžná s rovinou τ a prochází bodem A. Tedy $X \in \tau_1$.

3.30. Definice. *Pravíme, že přímka p je kolmá k rovině τ, platí-li $\zeta(p) = \zeta(\tau)$.*

3.31. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ, pak p neleží v τ a není s τ rovnoběžná.*

Důkaz. Z VI plyne, že je-li p kolmá k τ, nemůže být rovnoběžná s τ. Podle 3.15 pak p nemůže ležet v τ.

3.32. *Existují přímka p a rovina τ tak, že p je kolmá k τ.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina — označme ji τ — a podle I bod A. Z 1.7 plyne, že existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(\tau)$. Tedy p je kolmá k τ.

3.33. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ_1 a k rovině τ_2, pak roviny τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné.*

Důkaz. Podle předpokladu je $\zeta(p) = \zeta(\tau_1)$ a $\zeta(p) = \zeta(\tau_2)$, takže $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$.

3.34. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ_1 a rovina τ_1 rovnoběžná s rovinou τ_2, je přímka p kolmá k rovině τ_2.*

Důkaz. Podle předpokladu je $\zeta(p) = \zeta(\tau_1)$ a $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$, takže je $\zeta(p) = \zeta(\tau_2)$.

3.35. *Nechť přímka p není kolmá k rovině τ. Pak existuje právě jedna rovina, která obsahuje přímku p a je kolmá k rovině τ.*

Důkaz. Podle předpokladu jest $\zeta(p) \neq \zeta(\tau)$. Že rovina τ_1 obsahuje přímku p a je kolmá k rovině τ, znamená totéž, jako že τ_1 obsahuje přímku p a její zaměření je kolmé k zaměření $\zeta(\tau)$. Taková rovina τ_1 existuje podle 3.9, a to právě jedna.

3.36. *Je-li rovina τ kolmá ke dvěma různoběžným rovinám τ_1, τ_2, je kolmá i k jejich průsečnici.*

Důkaz. Podle předpokladu jest $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau) \perp \zeta(\tau_2)$ a podle 2.27 $\zeta(\tau_1) \neq \zeta(\tau_2)$. Označíme-li q průsečnici rovin τ_1, τ_2, plyne z 3.2 $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(q) \perp \zeta(\tau_2)$. Odtud podle VII $\zeta(\tau) = \zeta(q)$, což znamená, že přímka q je kolmá k rovině τ.

3.37 Definice. *Přímky p, q nazýváme kolmé, platí-li $\zeta(p) \perp \zeta(q)$.*

3.38. *Jsou-li přímky p, q kolmé, pak nejsou totožné ani rovnoběžné.*

Důkaz plyne z VI.

3.39. *Existují dvě kolmé přímky.*

Důkaz. Podle I existuje bod A a zaměření z_1. Podle 2.1 existuje zaměření $z_2 \perp z_1$. Z 1.7 plyne existence přímek p_i $(i = 1, 2)$, z nichž každá prochází bodem A a má zaměření z_i.

3.40. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ, pak je kolmá ke každé přímce, která leží v τ.*

Důkaz. Nechť přímka q leží v τ. Potom jest podle předpokladu a podle 3.2 $\zeta(p) = \zeta(\tau) \perp \zeta(q)$, takže p, q jsou kolmé.

3.41. *Přímka p je kolmá k rovině τ tehdy a jen tehdy, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám ležícím v τ.*

Důkaz. 1. Nechť p je kolmá k různoběžným přímkám q_1, q_2, které leží v τ. Platí tedy $\zeta(q_1) \perp \zeta(p) \perp \zeta(q_2)$, dále podle 1.19 $\zeta(q_1) \neq \zeta(q_2)$ a podle 3.2 $\zeta(q_1) \perp \zeta(\tau) \perp \zeta(q_2)$. Odtud plyne podle VII $\zeta(p) = \zeta(\tau)$, takže p je kolmá k τ. 2. Nechť p je kolmá k τ. Podle 3.5 obsahuje τ dvě různoběžky a podle 3.40 je p ke každé z těchto různoběžek kolmá.

3.42. *Rovina τ_1 je kolmá k rovině τ_2 tehdy a jen tehdy, obsahuje-li aspoň jednu přímku kolmou k τ_2.*

Důkaz. 1. Nechť τ obsahuje přímku p, která je kolmá k τ_2. Pak jest jednak $\zeta(p) = \zeta(\tau_2)$, jednak podle 3.2 $\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1)$, tedy $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$, takže roviny τ_1, τ_2 jsou kolmé. 2. Nechť roviny τ_1, τ_2 jsou kolmé, takže $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$. Zvolme v rovině τ_1 bod A. Podle 1.7 existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(\tau_2)$. Tedy p je kolmá k τ_2 a z 3.1 plyne, že leží v τ_1.

3.43. Definice. *Přímky p, q nazýváme mimoběžné, neleží-li v rovině.*

3.44. *Jsou-li přímky p, q mimoběžné, jsou disjunktní (tedy navzájem různé) a jest $\zeta(p) \neq \zeta(q)$.*

Důkaz. Uvažme nejprve, že ke každé přímce existuje rovina, která tuto přímku obsahuje. To plyne na př. z 1.10 a 3.8. Tedy přímky p, q nemohou být totožné. Podle 3.10 nemohou být ani různoběžné, takže podle 1.17 jsou disjunktní. Kdyby bylo $\zeta(p) = \zeta(q)$, byly by p, q rovnoběžné disjunktní a věta 3.11 by vedla ke sporu. Tedy je $\zeta(p) \neq \zeta(q)$.

3.45. *Existují dvě mimoběžné přímky.*

Důkaz. Podle 3.13 existují body A, B, C, D, které neleží v rovině. Podle 3.12 jsou tyto body navzájem různé. Označme p přímku, procházející body

A, B, a q přímku, procházející body C, D. Přímky p, q existují podle 1.11. Kdyby nějaká rovina obsahovala přímky p, q, obsahovala by body A, B, C, D, a to není možné.

3.46. *Jsou-li přímky p, q mimoběžné, pak existuje právě jedna rovina, která obsahuje přímku p a je rovnoběžná s přímkou q.*

Důkaz. Podle 3.44 je $\zeta(p) \neq \zeta(q)$. Že rovina τ obsahuje přímku p a je rovnoběžná s přímkou q, znamená totéž, jako že τ obsahuje přímku p a její zaměření je kolmé k zaměření $\zeta(q)$. Podle 3.9 taková rovina τ existuje, a to právě jedna.

4. Euklidovské vlastnosti

K axiomům I až VIII připojme nyní ještě axiom IX.

4.1. *Je-li $A \neq B$ a z_1 non $\perp z_2$, pak existuje právě jeden bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$.*

Důkaz. Existence bodu C je zaručena axiomem IX. Předpokládejme dále, že body C_1, C_2 splňují vztahy

$$\zeta(AC_1) = z_1 , \quad \zeta(BC_1) \perp z_2 , \tag{1}$$

$$\zeta(AC_2) = z_1 , \quad \zeta(BC_2) \perp z_2 . \tag{2}$$

Označme p přímku, která prochází bodem A a má zaměření z_1, a τ rovinu, která prochází bodem B a má zaměření z_2. Taková přímka a rovina existují podle 1.7 a 2.14. Z těchto vět zároveň plyne s ohledem na (1) a (2), že body C_1, C_2 leží na přímce p i v rovině τ. Kdyby bylo $C_1 \neq C_2$, ležela by p podle 3.7 v τ a bylo by podle 3.2 $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, to jest $z_1 \perp z_2$, což by byl spor s předpokladem.

4.2. *Jestliže přímka p není rovnoběžná s rovinou τ, pak s ní má společný právě jeden bod.*

Důkaz. Přímka p má s rovinou τ společný nejvýše jeden bod. Jinak by totiž podle 3.7 ležela v τ a tedy byla podle 3.15 rovnoběžná s τ proti předpokladu. Existují tedy body $A \in p$, A non $\in \tau$, $B \in \tau$, B non $\in p$, takže $A \neq B$.

Označme z_1 zaměření přímky p, z_2 zaměření roviny τ. Protože p není rovnoběžná s τ, jest z_1 non $\perp z_2$. Podle IX existuje bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$. Odtud plyne podle 1.8 $C \in p$ a podle 2.15 $C \in \tau$, takže p a τ mají společný aspoň jeden bod.

4.3. *Jestliže přímka p je kolmá k rovině τ, pak s ní má společný právě jeden bod.*

Důkaz plyne z 3.31 a 4.2.

4.4. *Jestliže přímka p a rovina τ jsou disjunktní, pak p je rovnoběžná s τ.*

Důkaz plyne z 4.2.

4.5. *Nechť p je přímka, τ rovina. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, τ jsou rovnoběžné disjunktní,*
2. *p, τ jsou různoběžné,*
3. *p leží v τ.*

Důkaz plyne z 3.18 a 4.4.

4.6. *Jestliže roviny τ_1, τ_2 nejsou rovnoběžné, pak se protínají v přímce.*

Důkaz. Podle 3.5 obsahuje rovina τ_1 dvě různoběžné přímky p, q. Kdyby každá z těchto přímek byla rovnoběžná s rovinou τ_2, byly by τ_1, τ_2 podle 3.25 rovnoběžné, což podle předpokladu nenastává. Tedy jedna z přímek p, q — budiž to třeba přímka p — není rovnoběžná s rovinou τ_2. Podle 4.2 existuje bod, který leží v rovině τ_2 a na přímce p, tedy i v rovině τ_1. Roviny τ_1, τ_2 tedy nejsou disjunktní a také ne totožné, neboť pak by byly rovnoběžné. Z 2.25 plyne, že se protínají v přímce.

4.7. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 kolmé, pak se protínají v přímce.*

Důkaz plyne z 2.31 a 4.6.

4.8. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 disjunktní, jsou rovnoběžné.*

Důkaz plyne z 4.6.

4.9. *Nechť τ_1, τ_2 jsou roviny. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné disjunktní,*
2. *τ_1, τ_2 jsou různoběžné,*
3. *τ_1, τ_2 jsou totožné.*

Důkaz plyne z 2.25 a 4.8.

4.10. *Budiž τ rovina a A bod, který neleží v τ. Pak existuje právě jedna rovina, která prochází bodem A a je disjunktní s rovinou τ. Je to rovina, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ.*

Důkaz. Podle 2.22 existuje rovina τ_1, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ. Roviny τ, τ_1 nejsou totožné, neboť A leží v τ_1 a neleží v τ. Jsou tedy podle 2.20 disjunktní. Jestliže rovina τ_2 prochází bodem A a je disjunktní s rovinou τ, pak je podle 4.8 rovnoběžná s τ a podle 2.22 totožná s τ_1.

4.11. *Jestliže přímky p_1, p_2 leží v rovině a nejsou rovnoběžné, pak mají společný právě jeden bod.*

Důkaz. Přímky p_1, p_2 mají společný nejvýše jeden bod. Jinak by byly podle 1.11 totožné a tedy rovnoběžné proti předpokladu. Označme τ rovinu, v níž leží přímky p_1, p_2. Podle 3.31 nejsou přímky p_1, p_2 kolmé k τ. Podle 3.35 existují roviny τ_i ($i = 1, 2$) tak, že τ_i obsahuje přímku p_i a je kolmá k rovině τ. Přímka p_i leží v rovině τ_i i v rovině τ a tyto roviny se podle 4.7 protínají v přímce. Z 1.5 plyne, že touto přímkou je přímka p_i. Kdyby roviny τ_1, τ_2 byly