ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 82 * PRAHA, 31. VII. 1957 * ČÍSLO 3

DIRICHLETOVA ÚLOHA

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo dne 23. května 1956.) DT: 517.5

V práci je dokázána věta o existenci a unicitě řešení Dirichletovy úlohy v jisté třídě funkcí a věta o spojité závislosti řešení na okrajových podmínkách. Nic se přitom nepředpokládá o omezenosti základní množiny.

1. V celé práci je m celé číslo > 1. Symbolem $\bar{A}$ (resp. $H(A)$) rozumíme uzávěr (resp. hranici) množiny A v určitém metrickém prostoru (zpravidla v m-rozměrném kartézském prostoru E_m); základní vlastnosti metrických prostorů budeme pokládat za známé. (Viz na př. [1], kap. VI.)

Jestliže $a, b \in E_m$, $a = [a_1, \ldots, a_m]$, $b = [b_1, \ldots, b_m]$, klademe $a \cdot b = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_i$; dále píšeme $a^2 = a \cdot a$, $|a| = \sqrt{a^2}$. — Slovem „funkce" rozumíme vždy konečnou reálnou funkci.

Řekneme, že funkce f je *harmonická* na otevřené množině $G \subset E_m$, je-li spojitá na G a platí-li pro každé $x \in G$

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = 0 \,. \tag{0}$$

(Kromě spojitosti funkce f požadujeme tedy jen, aby v každém bodě $x \in G$ napsané derivace existovaly a splňovaly vztah (0); nic nepředpokládáme o spojitosti derivací funkce f. Uvidíme však, že každá harmonická funkce má spojité derivace všech řádů.)

Buď G otevřená množina v E_m, $H = H(G) \neq \emptyset$ (t. j. $\emptyset \neq G \neq E_m$); buď f spojitá funkce na množině H. *Dirichletovou úlohou* (příslušnou k funkci f a množině G) rozumíme úlohu najít funkci, která je spojitá na $\bar{G}$, harmonická na G a která se na množině H shoduje s funkcí f. Úkolem tohoto článku je zkoumat existenci a jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy. Snadno se zjistí (viz cvič. 2), že řešení existuje nejvýš jedno, když množina G je omezená;

není-li množina G omezená, existuje (podle cvič. 5) nejvýš jedno řešení, které má v nekonečnu limitu 0. Udáme podmínky, postačující k tomu, aby pro každou omezenou spojitou funkci na množině H existovalo řešení Dirichletovy úlohy; určíme pak jistou třídu funkcí, v níž existuje právě jedno řešení.

Základní vlastnosti harmonických funkcí probereme nyní v řadě cvičení s podrobným návodem. Ve cvičeních 14—19 budeme používat také některých vět z integrálního počtu; cvičení jsou tak sestavena, abychom vystačili s větami z prvních sedmi kapitol Jarníkovy učebnice [2]. (Nikde se tedy nemluví o plošném integrálu.) Výsledků cvič. 14—22, z nichž některá jsou poněkud obtížná, se však používá jen ve cvič. 23—24 a později v odst. 16 v poznámce, která není příliš důležitá. Čtenář může proto postupovat také tak, že cvič. 14—22 a poznámku v odst. 16 vynechá a výsledkům cvič. 23—24 prostě uvěří. Jinak se pojem integrálu vyskytuje jen v odst. 21; zde se však vystačí s nejjednoduššími vlastnostmi jednorozměrného integrálu.

Cvičení 1. Buď G neprázdná omezená otevřená část E_m; buď f funkce spojitá na $\bar{G}$ a harmonická na G. Potom existují body $b_1, b_2 \in H(G)$ takové, že pro každé $x \in \bar{G}$ platí $f(b_1) \leqq f(x) \leqq f(b_2)$. (Návod. Buď M_f (resp. m_f) maximum funkce f na množině $\bar{G}$ (resp. $H(G)$). Nechť $M_f > m_f$. Zvolíme-li dosti malé $\varepsilon > 0$, platí pro funkci $g(x) = f(x) + \varepsilon x^2$ také $M_g > m_g$. Buď $M_g = g(y)$. Protože $y \in G$, je $\dfrac{\partial^2 g(y)}{\partial x_i^2} \leqq 0$ pro $i = 1, \ldots, m$, tedy $\Delta g(y) \leqq 0$. Je však $\Delta g(y) = \Delta f(y) + 2m\varepsilon > 0$ — spor.)

Cvičení 2. Buď G neprázdná omezená otevřená část E_m; buďte funkce f, g spojité na $\bar{G}$ a harmonické na G. Buď ε kladné číslo a nechť pro všechna $x \in H(G)$ platí $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Potom je $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in \bar{G}$. Je-li zejména $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in H(G)$, je $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \bar{G}$. (Návod. Použijte cvič. 1 na funkci $f - g$.)

Cvičení 3. Buď P metrický prostor, A, $B \subset P$. Potom

$$H(A \cap B) \subset H(A) \cup H(B)\,. \tag{1}$$

Je-li množina B otevřená, platí

$$\bar{A} \cap B \subset \overline{A \cap B}\,. \tag{2}$$

Cvičení 4. Buď G neprázdná otevřená část E_m; buď f funkce spojitá na $\bar{G}$ a harmonická na G. Nechť $f(x) \leqq 0$ pro každé $x \in H(G)$; nechť $f(x) \to 0$ pro $x \in G$, $|x| \to \infty$.[1]) Potom je $f(x) \leqq 0$ pro každé $x \in G$. (Návod. Zvolme $\varepsilon > 0$,

[1]) Je-li $M \subset E_m$, $c \in E_1$, pak symbolem

$$f(x) \to c \quad \text{pro} \quad x \in M\,, \quad |x| \to \infty \tag{3}$$

nebo výrokem „funkce f má pro $x \in M$, $|x| \to \infty$ limitu c“ (a pod.) budeme rozumět toto: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $A > 0$ tak, že pro všechna $x \in M$, pro něž je $|x| > A$, platí $|f(x) - c| < \varepsilon$. Je-li tedy množina M omezená, budeme vztah (3) pokládat za správný při libovolné funkci f a libovolném $c \in E_1$.

$y \in G$. Existuje $A > |y|$ tak, že pro všechna $x \in \overline{G}$, pro něž je $|x| \geqq A$, platí $f(x) < \varepsilon$. Buď $K = E[x; |x| < A]$. Ze vztahu $H(K \cap G) \subset H(K) \cup H(G)$ (viz (1), cvič. 3) a z cvič. 1 plyne $f(y) < \varepsilon$.)

Cvičení 5. Pomocí cvič. 4 dokažte, že k dané Dirichletově úloze existuje nejvýše jedno řešení, které má pro $|x| \to \infty$ limitu 0.

Cvičení 6. Buď G otevřená část E_m. Nechť funkce f, g mají na množině G spojité derivace prvního (resp. druhého) řádu. Potom platí na množině G

$$\operatorname{grad} (f \,.\, g) = f \,.\, \operatorname{grad} g + g \,.\, \operatorname{grad} f \ ^{2)}$$

$$(\text{resp. } \Delta(f \,.\, g) = f \,.\, \Delta g + 2 \operatorname{grad} f \,.\, \operatorname{grad} g + g \,.\, \Delta f) \,.$$

Cvičení 7. Buď G (resp. U) otevřená část E_m (resp. E_n; n je libovolné přirozené číslo). Nechť funkce f má spojité derivace 2. řádu na množině U. Buď $\varphi = [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ zobrazení množiny G do množiny U; nechť funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ mají spojité derivace 2. řádu. Buď $g(t) = f(\varphi(t))$ $(t \in G)$. Potom je $\Delta g(t) = = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \, \partial x_k} \,.\, \operatorname{grad} \varphi_j(t) \,.\, \operatorname{grad} \varphi_k(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \Delta \varphi_j(t)$ $(t \in G,\ x = \varphi(t))$. Pro $n = 1$ je tedy $\Delta g = f'' \,.\, (\operatorname{grad} \varphi)^2 + f' \,.\, \Delta \varphi$.

Cvičení 8. Pro $x \neq 0$ (píšeme $0 = [0, \ldots, 0]$) platí $\operatorname{grad} |x|^\alpha = \alpha |x|^{\alpha-2} \,.\, x$, $\Delta |x|^\alpha = \alpha(\alpha + m - 2) \, |x|^{\alpha-2}$ (α reálné). Pro $m = 2$, $x \neq 0$ je $\Delta \log |x| = 0$; pro každé m, $x \neq 0$ je $\Delta |x|^{2-m} = 0$. (Návod. Je-li $\varphi(x) = x^2$ $(x \in E_m)$, $f(y) = = y^{\frac{1}{2}\alpha}$ $(y > 0)$, $g(x) = f(\varphi(x))$, je $\operatorname{grad} \varphi(x) = 2x$, $\Delta \varphi(x) = 2m$ a tedy podle cvič. 7 $\Delta g = \frac{1}{2}\alpha \,.\, (\frac{1}{2}\alpha - 1) \,.\, y^{\frac{1}{2}\alpha - 2} \,.\, 4x^2 + \frac{1}{2}\alpha \,.\, y^{\frac{1}{2}\alpha - 1} \,.\, 2m$.)

Cvičení 9. Buď G otevřená část E_m, $0 \operatorname{non} \in G$. Nechť funkce f má spojité derivace 2. řádu na množině G. Buď $R > 0$; pro $t \in E_m$, $t \neq 0$ buď $\varphi(t) = \frac{R^2 t}{t^2}$. Je $\varphi(\varphi(t)) = t$. Pro $t \in \varphi(G)$ položme $g(t) = f(\varphi(t))$. Potom je $\Delta g(t) = \frac{R^4}{|t|^4} \,.\, \Delta f(x) - 2R^2 \,.\, \frac{m-2}{|t|^4} \,.\, t \,.\, \operatorname{grad} f(x)$ $(t \in \varphi(G), x = \varphi(t))$. (Návod. Buď $\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$; položme $e_i = [\delta_{i1}, \ldots, \delta_{im}]$. Píšeme-li $\frac{R^2 t}{t^2} = [\varphi_1(t), \ldots$ $\ldots, \varphi_m(t)]$, je (podle cvič. 6 a 8) $\operatorname{grad} \varphi_i(t) = \frac{R^2}{|t|^4} (e_i t^2 - 2 t t_i)$, $\Delta \varphi_i(t) = = -2(m-2) \frac{R^2 t_i}{|t|^4}$; dále je $\operatorname{grad} \varphi_i(t) \,.\, \operatorname{grad} \varphi_k(t) = \frac{R^4}{|t|^4} \delta_{ik}$. Nyní použijeme cvič. 7.)

Cvičení 10. Předpoklady jako v cvič. 9. Položme $h(t) = |t|^{2-m} \,.\, f(\varphi(t))$ $(t \in \in \varphi(G))$. Potom je $\Delta h(t) = \frac{R^4}{|t|^{m+2}} \Delta f(x)$ $(x = \varphi(t))$. (Plyne z cvič. 6, 8, 9.)

---

[2]) $\operatorname{grad} f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}\right]$.

Cvičení 11. Buď G otevřená množina v E_2, $H(G) \neq \emptyset$. Buď f funkce, která je spojitá a shora omezená na $\bar{G}$ a harmonická na G; nechť $f(x) \leqq 0$ pro každé $x \in H(G)$. Potom je $f(x) \leqq 0$ pro každé $x \in \bar{G}$. (Návod. Zvolme $y \in G$, $b \in H(G)$, $\varepsilon > 0$; dále zvolme $\delta > 0$ ($\delta < \min(|y - b|, 1)$) tak, aby bylo $f(x) < \varepsilon$ pro každé $x \in \bar{G}$, pro něž $|x - b| \leqq \delta$. Nechť $f(x) < C$ pro každé $x \in \bar{G}$, $C > \varepsilon$. Nyní můžeme určit $A > |y - b|$ tak, aby bylo $(C - \varepsilon) \log|y - b| - C \log \delta <$ $< \varepsilon . \log A$; pro $x \neq b$ položme $g(x) = \dfrac{(C - \varepsilon) \log|x - b| + \varepsilon \log A - C \log \delta}{\log A - \log \delta}$. Funkce g je harmonická. Buď K (resp. L) otevřený kruh o středu b a poloměru δ (resp. A). Na $H(K) \cap \bar{G}$ je $g(x) = \varepsilon > f(x)$; na $H(L) \cap \bar{G}$ je $g(x) = C > f(x)$; na $H(G) - K$ je $g(x) \geqq \varepsilon > 0 \geqq f(x)$. Podle (1) (cvič. 3) je $g(x) > f(x)$ pro každé $x \in H((G \cap L) - \bar{K})$ a podle cvič. 1 je $f(y) < g(y) < 2\varepsilon$.)

Cvičení 12. Z předešlého cvičení odvoďte větu, že pro $m = 2$ existuje k dané Dirichletově úloze nejvýš jedno řešení ve třídě omezených funkcí. Pomocí cvič. 5 dokažte, že pro libovolné m (> 1) existuje nejvýš jedno řešení ve třídě funkcí F, pro něž je funkce $|x|^{m-2} . F(x)$ omezená.

Cvičení 13. Buď $G \subset E_m$ poloprostor všech $[x, y]$, kde $x \in E_{m-1}$, $y > 0$; buď f shora omezená spojitá funkce na $\bar{G}$, která je harmonická na G a nekladná na $H(G)$. Potom je funkce f nekladná na $\bar{G}$. Je-li tedy $f_1(x) = f_2(x)$ pro každé $x \in H(G)$, při čemž f_1, f_2 jsou omezené funkce spojité na $\bar{G}$ a harmonické na G, je $f_1(x) = f_2(x)$ pro každé $x \in \bar{G}$. (Návod. Podle cvič. 11 stačí vyšetřit $m > 2$. Buď $y \in G$, $\varepsilon > 0$; nechť $f(x) < c$ pro všechna $x \in G$. Zvolíme-li dosti velké číslo β a položíme-li $b = [0, \ldots, 0, -\beta]$, je $c\left(1 - \left(\dfrac{\beta}{|y - b|}\right)^{m-2}\right) < \varepsilon$. Buď dále R tak velké, aby platilo jednak $R > |y - b|$, jednak $c\left(\dfrac{\beta}{R}\right)^{m-2} < \varepsilon$; buď K otevřená koule o středu b a poloměru R. Položíme-li $g(x) = \varepsilon +$ $+ c\left(1 - \left(\dfrac{\beta}{|x - b|}\right)^{m-2}\right)$, je $g(x) \geqq \varepsilon$ pro $x \in H(G)$, $g(x) > c$ pro $x \in H(K)$, tedy (viz (1), cvič. 3) $g(x) > f(x)$ pro $x \in H(G \cap K)$. Podle cvič. 1 je $f(y) < g(y) < 2\varepsilon$.)

Cvičení 14. Buď f spojitá funkce v intervalu $\langle 0, A \rangle$. Buď K m-rozměrná koule o středu 0 a poloměru A. Potom platí

$$\int_K f(|x|) \, \mathrm{d}x = m\varkappa \int_0^A t^{m-1} f(t) \, \mathrm{d}t \,,$$

kde $\varkappa$ je objem jednotkové koule v E_m. (Návod. Pro $y \in \langle 0, A \rangle$ položme $F(y) = \int_{|x| \leqq y} f(|x|) \, \mathrm{d}x$. Nechť $0 \leqq y < y + h \leqq A$; nechť $\mu \leqq f(t) \leqq M$ pro $t \in (y, y + h)$. Potom je $F(y + h) - F(y) = \int_{y < |x| \leqq y + h} f(|x|) \, \mathrm{d}x$, tedy $\mu(\varkappa(y + h)^m - \varkappa y^m) \leqq F(y + h) - F(y) \leqq M(\varkappa(y + h)^m - \varkappa y^m)$; odtud plyne $F'(y) = \varkappa m y^{m-1} . f(y)$.)

Cvičení 15. Integrál $\int\limits_{E_m} \frac{dx}{(x^2 + \delta)^{\frac{m+1}{2}}}$ konverguje, je-li $\delta > 0$. (Plyne z cvič. 14.)

Cvičení 16. Parciální derivace řádu n funkce $|x|^\alpha$ mají tvar $|x|^{\alpha-2n} . P(x)$, kde P je polynom stupně nejvýš n. (Dokáže se indukcí.)

Cvičení 17. Buď f omezená měřitelná funkce v E_{m-1}. Pro $x \in E_{m-1}$, $y > 0$ položme

$$F(x, y) = y . \int\limits_{E_{m-1}} \frac{f(t)\, dt}{((x - t)^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}} . \tag{4}$$

Potom je funkce F harmonická a má spojité derivace všech řádů. (Návod. Pišme $z = [x, y]$, $\lambda(t) = [t, 0]$. Parciální derivace funkce za integračním znamením v (4) mají (při pevném t) podle cvič. 16 tvar $T = \frac{f(t) . P(z - \lambda(t))}{|z - \lambda(t)|^{m+2n}}$, kde P je polynom stupně nejvýš n. Abychom mohli použít věty o derivování za integračním znamením (viz na př. [2], str. 281—2), je třeba nalézt „integrovatelnou majorantu". Zvolme $A > 0$, $\delta > 0$ a vyšetřujme množinu $|x| < A$, $y > \delta$. Protože $|z - \lambda(t)| > \delta > 0$, je $|P(z - \lambda(t))| \leqq C_1|z - \lambda(t)|^{2n}$, tedy $|T| \leqq \frac{C_2}{|z - \lambda(t)|^m}$. Pro $|t| \leqq 2A$ je $|T| \leqq \frac{C_2}{\delta^m}$; pro $|t| > 2A$ je $|x - t| > \frac{1}{2}|t|$, $(x - t)^2 + y^2 \geqq \frac{1}{4}t^2 + \delta^2$, takže je $|T| \leqq \frac{C_2}{(\frac{1}{4}t^2 + \delta^2)^{\frac{m}{2}}}$. Integrál této funkce (přes E_{m-1}) konverguje podle cvič. 15. — Funkce $\frac{y}{((x - t)^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}}$ je harmonická pro každé t (to se dá zjistit na př. pomocí cvič. 6 a 8); derivováním za integračním znamením zjistíme, že i funkce F je harmonická.)

Cvičení 18. Buď f omezená spojitá funkce v E_{m-1}. Definujme pro $x \in E_{m-1}$, $y \geqq 0$ funkci F předpisem

$$F(x, 0) = f(x)\,, \quad F(x, y) = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{E_{m-1}} \frac{f(t) . y . dt}{((x - t)^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}} \quad (y > 0)\,,$$

kde $\gamma = \int\limits_{E_{m-1}} \frac{dv}{(v^2 + 1)^{\frac{m}{2}}}$. Potom je funkce F spojitá. Je-li $|f(t)| \leqq C$ $(t \in E_{m-1})$, je $|F(x, y)| \leqq C$ $(x \in E_{m-1}, y \geqq 0)$. Je-li $A \in E_1$ a je-li $f(t) = 0$ pro $|t| > A$, je funkce $|z|^{m-1} . F(z)$ omezená. Je-li funkce f nezáporná, ne však identicky rovná nule, je $F(x, y) > 0$ pro $x \in E_{m-1}$, $y > 0$. (Návod. Substitucí $t = vy + x$ $(y > 0)$ dostaneme $F(x, y) = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{E_{m-1}} \frac{f(x + vy)\, dv}{(v^2 + 1)^{\frac{m}{2}}}$ (platí i pro $y = 0$). Jestliže $x_n \to x$, $y_n \to y$, pak $f(x_n + vy_n) \to f(x + vy)$, $|f(x_n + vy_n)| \leqq C$, takže podle věty 65 z [2] (str. 121) a podle cvič. 15 máme $F(x_n, y_n) \to F(x, y)$. Je-li $f(t) = 0$ pro $|t| > A$, je $|F(z)| \,.\, |z|^{m-1} \leqq \left(\frac{|z|}{|z| - A}\right)^m$. konst. pro $|z| > A$.

Cvičení 19. Buď G poloprostor z cvič. 13. Buď $F_1, F_2, \ldots$ omezená posloupnost funkcí, které jsou spojité na $\overline{G}$ a harmonické na G. Nechť pro každé $z \in \overline{G}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(z) = F(z)$. Potom je funkce F harmonická na G a má tam spojité derivace všech řádů. (Návod. Položme $f_n(t) = F_n(t, 0)$, $f(t) = F(t, 0)$ $(t \in E_{m-1})$. Zvolme $z = [x, y]$ $(x \in E_{m-1}$, $y > 0)$. Podle cvič. 13, 17, 18 je $F_n(x, y) = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{E_{m-1}} \frac{f_n(t) \,.\, y \,.\, dt}{((x - t)^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}}$; podle věty 65 z [2] a podle cvič. 15 máme

$$F_n(x, y) \to \frac{1}{\gamma} \,.\, \int\limits_{E_{m-1}} \frac{f(t) \,.\, y \,.\, dt}{((x - t)^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}} = F(x, y)\,.$$ Nyní použijeme cvič. 17.)

Cvičení 20. Buď K otevřená koule o středu 0 a poloměru R; buď G poloprostor z cvič. 13. Nechť $b = [0, \ldots, 0, -R]$. Pro $z \neq 2b$ položme $\varphi(z) = b + (z - 2b) \,.\, \frac{4R^2}{(z - 2b)^2}$; pro $w \neq b$ položme $\psi(w) = 2b + (w - b) \,.\, \frac{4R^2}{(w - b)^2}$. Potom je $\varphi(G) = K$, $\varphi(H(G)) = H(K) - \{b\}$, zobrazení φ je prosté a ψ je příslušné inversní zobrazení. (Návod. Nechť $z \neq 2b$, $w = \varphi(z)$. Potom

$$w^2 = b^2 + b \,.\, (z - 2b) \,.\, \frac{8R^2}{(z - 2b)^2} + \frac{16R^4}{(z - 2b)^2} = b^2 + \frac{8R^2}{(z - 2b)^2} \,.\, b \,.\, z\,. \tag{5}$$

Pro $z \in G$ (resp. $z \in \overline{G}$) je tedy $|w| < R$ (resp. $|w| \leqq R$). Buď naopak $w \in K$; položme $z = \psi(w)$. Zřejmě $z \neq 2b$; protože $\varphi(z) = w$, $|w| < R$, je podle (5) $b \,.\, z < 0$, $z \in G$. Je tedy $\varphi(G) = K$. Podobně se zjistí, že $\varphi(H(G)) = H(K) - \{b\}$. Je-li $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, je $z_1 = \psi(\varphi(z_1)) = \psi(\varphi(z_2)) = z_2$.)

Cvičení 21. Ponechme označení předešlého cvičení. Buď F funkce na množině G, která je harmonická a má spojité derivace 2. řádu. Potom je funkce $|w - b|^{2-m} \,.\, F(\psi(w))$ harmonická pro $w \in K$. (Návod. Utvoříme zobrazení $\lambda(t) = t \,.\, \frac{4R^2}{t^2}$, funkce $F_1(z) = F(2b + z)$, $F_2(t) = |t|^{2-m} \,.\, F_1(\lambda(t))$, $F_3(w) = F_2(w - b) = |w - b|^{2-m} \,.\, F(\psi(w))$ a použijeme cvič. 10.)

Cvičení 22. Ponechme označení ze cvič. 20. Každé funkci f, spojité na množině $H(K)$, přiřaďme funkce $C_f(z)$ $(z \in \overline{G})$, $D_f(w)$ $(w \in \overline{K})$ tímto předpisem: C_f je omezené řešení Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci $(4R^2)^{m-2} \,.\, |z - 2b|^{2-m} \,.\, f(\varphi(z))$ $(z \in H(G))$ a množině G (podle cvič. 13, 17, 18 existuje takové řešení právě jedno a má na G spojité derivace všech řádů); $D_f(w) = |w - b|^{2-m} \,.\, C_f(\psi(w))$ $(w \in \overline{K} - \{b\})$, $D_f(b) = f(b)$. Potom je funkce D_f spojitá na $\overline{K}$ a je

$D_f(w) = f(w)$ pro každé $w \in H(K)$. (Návod. Je-li $f(w) = 1$ ($w \in H(K)$), je $C_f(z) = (4R^2)^{m-2} \,.\, |z - 2b|^{2-m}$ ($z \in \overline{G}$); protože $|\psi(w) - 2b| = \dfrac{4R^2}{|w - b|}$ ($w \neq b$), je $D_f(w) = 1$ ($w \in \overline{K}$). Je-li $f(w) = 0$ pro všechna $w \in H(K)$, dostatečně blízká k b, je podle cvič. 18 funkce $|z|^{m-1} \,.\, C_f(z)$ a tedy i $|z - 2b|^{m-1} \,.\, C_f(z)$ omezená; potom je omezená také funkce $|\psi(w) - 2b|^{m-1} \,.\, C_f(\psi(w)) = (4R^2)^{m-1} \,.\, |w - b|^{1-m} \,.\, C_f(\psi(w)) = (4R^2)^{m-1} \,.\, |w - b|^{-1} \,.\, D_f(w)$ ($w \in \overline{K} - \{b\}$), takže funkce D_f je spojitá v bodě b. Funkce D_f je tedy spojitá v bodě b také tehdy, když existuje okolí U bodu b a číslo α tak, že $f(w) = \alpha$ pro každé $w \in U \cap H(K)$. Je-li nyní f libovolná spojitá funkce na $H(K)$, zvolíme $\varepsilon > 0$ a položíme $g(w) = \min(f(w), f(b) - \varepsilon)$, $h(w) = \max(f(w), f(b) + \varepsilon)$; ze zřejmého vztahu $D_g \leqq D_f \leqq D_h$ plyne snadno spojitost funkce D_f v bodě b.)

Cvičení 23. Buď L otevřená m-rozměrná koule. Potom ke každé spojité funkci f na $H(L)$ existuje (podle cvič. 2 právě jedno) řešení F příslušné Dirichletovy úlohy. Je-li f nezáporná funkce, která není identicky rovna nule, je $F(x) > 0$ pro každé $x \in L$. (Návod. Buď L koule o středu s a poloměru R. Pro $|x| = R$ položme $g(x) = f(x + s)$. Podle cvič. 21—22 je funkce $D_g(x - s)$ řešením naší úlohy. Je-li $f \geqq 0$, ne však $f(x) = 0$ pro všechna $x \in H(L)$, je podle cvič. 18 $C_g(z) > 0$ pro $z \in G$, tedy $F(x) = D_g(x - s) > 0$ pro $x \in L$.)

Cvičení 24. Buď G libovolná otevřená množina v E_m; buď $F_1, F_2, \ldots$ omezená posloupnost funkcí harmonických na G. Nechť pro každé $x \in G$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$. Potom je funkce F harmonická na G a má tam spojité derivace všech řádů. (Návod. Buď L uzavřená koule o středu s a poloměru R, $L \subset G$. Položme $f_n(x) = F_n(x + s)$ ($|x| = R$) a utvořme funkce C_{f_n}, D_{f_n} podle cvič. 22. Z cvič. 19 plyne, že funkce $\Phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} C_{f_n}(x)$ je harmonická (na otevřeném poloprostoru) a má tam spojité derivace všech řádů; funkce $\Psi(x) = |x - b|^{2-m} \,.\, \Phi(\psi(x)) = \lim\limits_{n\to\infty} D_{f_n}(x)$ ($|x| < R$) je tedy podle cvič. 21 harmonická. Je však $D_{f_n}(x) = F_n(x + b)$, tedy $\Psi(x) = F(x + b)$ ($|x| < R$).)

Cvičení 25. Harmonická funkce má spojité derivace všech řádů. (Plyne snadno z předešlého cvičení.)

Cvičení 26. Buď G otevřená část E_m; buď funkce f spojitá na $\overline{G}$ a harmonická na G. Buď φ isometrické zobrazení prostoru E_m na E_m. Potom je funkce $f(\varphi^{-1}(x))$ spojitá na $\overline{\varphi(G)}$ a harmonická na $\varphi(G)$. (Návod. Tvar isometrických zobrazení prostoru E_m na E_m je popsán v [1], kap. VI, § 3, příklad 3 (str. 238—240). Nyní použijeme cvič. 7 (a cvič. 25).)

Cvičení 27. Buď P metrický prostor. Nechť množiny A, B jsou buď obě otevřené nebo obě uzavřené v P a nechť $P = A \cup B$. Buď f funkce na množině P; f buď spojitou funkcí na prostoru A i na prostoru B. Potom je funkce f spojitá na P.

Cvičení 28. Nechť $A \subset E_m$, $b \in E_m$, $H(A) = \{b\}$. Potom je buď $A = \{b\}$ nebo $A = E_m - \{b\}$. Je-li tedy množina A uzavřená (resp. otevřená), je $A = \{b\}$ (resp. $A = E_m - \{b\}$). (Návod. Množina $M = E_m - \{b\}$ je souvislá a $M \cap H(A) = \emptyset$. Je tudíž buď $M \subset A$ nebo $M \subset E_m - A$.)

Cvičení 29. Buď f spojitá funkce na otevřené množině $G \subset E_m$; buď K otevřená koule, $\overline{K} \subset G$. Potom existuje právě jedna funkce g, která má tyto vlastnosti: Je spojitá na G, harmonická na K a shoduje se s f na $G - K$. (Návod. Podle cvič. 23 existuje (právě jedna) funkce g_1, která je spojitá na $\overline{K}$, harmonická na K a shoduje se s f na $H(K)$. Položíme-li $g(x) = g_1(x)$ pro $x \in K$, $g(x) = f(x)$ pro $x \in G - K$, je funkce g spojitá na $\overline{K}$ i na $G - K$; podle cvič. 27 je spojitá i na G.)

Cvičení 30. Funkci g ze cvič. 29 označme symbolem f_K. Jsou-li φ, ψ spojité funkce na otevřené množině G a je-li $\alpha \in E_1$, pak pro každou kouli K ($\overline{K} \subset G$) je $(\varphi + \psi)_K = \varphi_K + \psi_K$, $(\alpha\varphi)_K = \alpha \,.\, \varphi_K$; je-li $\varphi \geqq \psi$, je též $\varphi_K \geqq \psi_K$.

2. Označení f_K, zavedeného ve cvič. 30, budeme stále používat. Buď f spojitá funkce na otevřené množině $G \subset E_m$. Řekneme, že funkce f je *superharmonická* na množině G, jestliže ke každému bodu $b \in G$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou kouli K o středu b a poloměru menším než δ platí

$$f_K(b) \leqq f(b) \,.$$

(Tím je řečeno, že pro každou takovou kouli K je $\overline{K} \subset G$.) — Každá harmonická funkce je zřejmě superharmonická.

3. Lemma. *Buďte G_1, G_2 otevřené množiny v E_m. Na množině $G = G_1 \cup G_2$ mějme funkci f, která je superharmonická na G_1 i na G_2. Potom je funkce f superharmonická i na množině G.*

Důkaz. Podle cvič. 27 je funkce f spojitá na G. Je-li $b \in G$, pak zřejmě pro každou dosti malou kouli K o středu b je $f_K(b) \leqq f(b)$.

4. Lemma. *Buďte φ, ψ superharmonické funkce na otevřené množině $G \subset E_m$; buď α nezáporné číslo. Potom jsou též funkce $\alpha\varphi$, $\varphi + \psi$, $\min(\varphi, \psi)$ superharmonické na G.*

Důkaz. Zvolme $b \in G$. Je-li K dosti malá koule o středu b, je $\varphi_K(b) \leqq \varphi(b)$, $\psi_K(b) \leqq \psi(b)$. Potom však podle cvič. 30 platí $(\alpha\varphi)_K(b) = \alpha\, \varphi_K(b) \leqq \alpha\, \varphi(b)$, $(\varphi + \psi)_K(b) = \varphi_K(b) + \psi_K(b) \leqq (\varphi + \psi)(b)$, a je-li na př. $\varphi(b) \leqq \psi(b)$, platí též $(\min(\varphi, \psi))_K(b) \leqq \varphi_K(b) \leqq \varphi(b) = (\min(\varphi, \psi))(b)$.

5. Lemma. *Buď G otevřená část E_m. Buď funkce f spojitá na $\overline{G}$ a superharmonická na G; nechť existuje $a \in \overline{G}$ tak, že pro každé $x \in G$ je $f(x) \geqq f(a)$. Buď $A = E[x; x \in \overline{G}, f(x) = f(a)]$. Potom $H(A) \subset H(G)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí. Potom existuje $b \in H(A) \cap G$ a k bodu b můžeme určit číslo δ podle odst. 2. Existuje c tak, že $|c - b| < \delta$ (tedy $c \in G$) a zároveň $c \operatorname{non} \in A$ neboli $f(c) > f(a)$. Protože množina A je uzavřená, je $H(A) \subset A$, tedy $b \in A$, $f(b) = f(a)$, $f(c) > f(b)$. Buď K koule o středu b a poloměru $|c - b|$. Pro každé $x \in G$ a tedy i pro každé $x \in H(K)$ je $f(x) \geqq f(b)$; protože $f(c) > f(b)$, je podle cvič. 23 také $f_K(b) > f(b)$. To však odporuje volbě čísla δ; tento spor dokazuje naše tvrzení.

6. Lemma. *Buď G neprázdná omezená otevřená část E_m; buď f funkce spojitá na $\overline{G}$ a superharmonická na G. Potom existuje $b \in H(G)$ tak, že pro každé $x \in \overline{G}$ je $f(x) \geqq f(b)$.*

Důkaz. Zřejmě jsou splněny předpoklady lemmatu 5. Zachováme-li označení, vidíme, že $\emptyset \neq A \neq E_m$, tedy $H(A) \neq \emptyset$. Protože $H(A) \subset H(G)$, můžeme za bod b vzíti libovolný prvek množiny $H(A)$.

7. Lemma. *Buď G_0 omezená otevřená množina, G buď otevřená množina (v E_m); nechť $\overline{G}_0 \subset G$. Buď f funkce superharmonická na G. Buď g funkce, která má tyto vlastnosti: $g(x) = f(x)$ pro $x \in G - G_0$, funkce g je spojitá na G a harmonická na G_0. Potom je $f(x) \geqq g(x)$ pro každé $x \in G$ a funkce g je superharmonická na G.*

Důkaz. Funkce $f - g$ je na $\overline{G}_0$ spojitá a na G_0 superharmonická. Protože $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in H(G_0)$, je podle lemmatu 6 $f(x) \geqq g(x)$ pro každé $x \in G_0$ a tedy pro každé $x \in G$. Zvolme nyní $b \in G$. Je-li $b \in G - G_0$, je pro každou kouli K o středu b, pro niž $\overline{K} \subset G$, splněn vztah $g_K(b) \leqq f_K(b) \leqq f(b) = g(b)$; je-li však $b \in G_0$, pak pro každou dosti malou kouli K o středu b platí $g_K(b) = g(b)$. Funkce g je tudíž superharmonická.

Poznámka. Je-li tedy funkce f superharmonická na G, pak pro každou kouli K ($\overline{K} \subset G$) platí $f_K \leqq f$ a funkce f_K je opět superharmonická.

8. Řekneme, že množina $G \subset E_m$ je *regulární*, jestliže má tuto vlastnost: Je otevřená, $H(G) \neq \emptyset$ a ke každému bodu $b \in H(G)$ existuje okolí U bodu b a funkce φ, která je spojitá na $U \cap \overline{G}$ a superharmonická na $U \cap G$, při čemž $\varphi(b) = 0$ a $\varphi(x) > 0$ pro každé $x \in U \cap \overline{G}$, $x \neq b$. Funkci φ nazveme *bariérou* (příslušnou k bodu b a množině G). Systém všech regulárních množin označíme symbolem $\mathfrak{G}^m$ nebo prostě $\mathfrak{G}$.

Poznámka. Nechť existuje koule K o středu s tak, že $K \cap G = \emptyset$, $b \in \overline{K}$; buď $s_1 = \frac{1}{2}(b + s)$. Je-li $m > 2$ (resp. $m = 2$), položme $\varphi(x) = |b - s_1|^{-m+2} - |x - s_1|^{-m+2}$ (resp. $\log|x - s_1| - \log|b - s_1|$). Potom je funkce φ bariérou. (Viz cvič. 8.) Odtud plyne na př., že každá otevřená konvexní množina s neprázdnou hranicí je regulární. K bodu b lze sestrojit bariéru také tehdy, když existuje kužel, který neprotne množinu G a má vrchol v bodě b. (Viz [3], str. 213.) Jiné účinné kriterium regularity je obsaženo ve větě 23.

9. Lemma. *Buď G otevřená část E_m; nechť $H = H(G) \neq \emptyset$ a nechť ke každému $b \in H$ existuje $U \in \mathfrak{G}$ tak, že $G \subset U$, $b \in H(U)$. Potom je $G \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Za bariéru k bodu b a množině G lze vzít bariéru, sestrojenou k bodu b a množině U.

10. Věta. *Nechť $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$, $G = G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Potom je $G \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Zvolme $b \in H(G)$. Podle (1), cvič. 3 je $H(G) \subset H(G_1) \cup H(G_2)$. Je-li na př. $b \in H(G_1)$, použijeme předešlého lemmatu, kde volíme $U = G_1$.

11. Věta. *Buď G neprázdná otevřená část E_m; nechť její komplement obsahuje aspoň dva body. Dále předpokládejme, že ke každé nezáporné omezené spojité funkci na hranici H množiny G existuje nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy. Potom je $G \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Zvolme $b \in H$ a definujme na množině H funkci f předpisem $f(x) = \min(|x - b|, 1)$. Buď φ nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy; buď $A = E[x; x \in \overline{G}, \varphi(x) = 0]$. Protože množina A je uzavřená, je podle lemmatu 5 $H(A) \subset H \cap A = \{b\}$; podle cvič. 28 je buď $A = \{b\}$ nebo $A = E_m$. Kdyby však bylo $A = E_m$, bylo by $H = H \cap A = \{b\}$ a tedy (viz opět cvič. 28) $E_m - G = \{b\}$ proti předpokladu. Je tedy $A = \{b\}$ neboli $\varphi(x) > 0$ pro každé $x \in \overline{G}$, $x \neq b$. Funkce φ je tudíž bariérou.

Poznámka. Obsahuje-li komplement množiny G právě jeden bod b, pak ke každé nezáporné spojité funkci na množině $H(G) = \{b\}$ zřejmě existuje nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy (totiž konstanta), ale podle věty 15 není $G \in \mathfrak{G}$.

12. Buď G otevřená část E_m; nechť $H = H(G) \neq \emptyset$. Buď f nezáporná spojitá funkce na množině H. Řekneme, že Φ je *horní funkce* vzhledem k funkci f a množině G, jestliže funkce Φ je nezáporná a spojitá na $\overline{G}$, superharmonická na G a jestliže pro každé $x \in H$ platí $\Phi(x) \geqq f(x)$.

Poznámka. Je-li funkce f omezená, pak zřejmě každá funkce $\Phi(x) = c$ ($x \in \overline{G}$), kde c je dosti velká konstanta, je horní funkcí vzhledem k f. K neomezené funkci f nemusí horní funkce existovat (viz poznámku v odst. 16).

13. Věta. *Buď $G \in \mathfrak{G}$; buď f nezáporná spojitá funkce na hranici H množiny G. Nechť k funkci f existuje aspoň jedna horní funkce. Definujme na množině $\overline{G}$ funkci F předpisem*

$$F(x) = \inf \Phi(x)\,,$$

kde Φ probíhá všechny horní funkce k funkci f. Potom je F řešením Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f a množině G; je to nejmenší nezáporné řešení.

Důkaz. Buď Φ horní funkce k funkci f. Zvolme $b \in H = H(G)$, $\varepsilon > 0$. K bodu b určeme okolí U a funkci φ podle odst. 8. Buď dále K taková otevřená koule o středu b, že $\overline{K} \subset U$ a že pro každé $x \in H \cap K$ je $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$; buď $S = H(K)$. Existuje $c \geqq 0$ tak, že pro každé $x \in S \cap \overline{G}$ je $c\varphi(x) \geqq \Phi(x)$. (Je-li $L = S \cap \overline{G} = \emptyset$, stačí položit $c = 0$; jinak můžeme psát $\alpha = \max_{x \in L} \Phi(x)$, $\beta = \min_{x \in L} \varphi(x)$, a protože $\alpha \geqq 0, \beta > 0$, lze volit $c = \alpha \,.\, \beta^{-1}$.) Dále položme $\omega(x) = f(b) + \varepsilon + c\varphi(x)$ ($x \in U \cap \overline{G}$) a definujme na množině $\overline{G}$ funkci Ψ předpisem

$$\Psi(x) = \min(\omega(x), \Phi(x)) \quad \text{pro} \quad x \in \overline{G} \cap K\,,$$
$$\Psi(x) = \Phi(x) \quad \text{pro} \quad x \in \overline{G} - K\,.$$

Buď B množina všech $x \in \overline{K} \cap G$, pro něž je $\omega(x) \leqq \Phi(x)$. Množina B je uzavřená; pro $x \in S$ je $\omega(x) > c\varphi(x) \geqq \Phi(x)$, takže $B \cap S = \emptyset$, $B \subset K \cap \overline{G}$. Pro $x \in \overline{G} - B$ je zřejmě $\Psi(x) = \Phi(x)$. Množiny $\overline{G} - B$, $\overline{G} \cap K$ jsou obě otevřené v prostoru $\overline{G}$, na obou z nich je funkce Ψ spojitá a jejich sjednocení je $\overline{G}$; funkce Ψ je tedy (podle cvič. 27) spojitá na $\overline{G}$. Z lemmat 3, 4 plyne podobně, že je funkce Ψ superharmonická na množině G. Je-li $x \in H - K$, je $\Psi(x) = \Phi(x) \geqq f(x)$; je-li $x \in H \cap K$, je $\omega(x) \geqq f(b) + \varepsilon > f(x)$, tedy $\Psi(x) = \min(\omega(x), \Phi(x)) \geqq f(x)$. Funkce Ψ je tudíž horní funkcí. Dále je $\Psi(b) \leqq \omega(b) = f(b) + \varepsilon$. Protože funkce Ψ je spojitá a protože $F \leqq \Psi$, platí pro všechna $x \in \overline{G}$, dosti blízká k b, vztah

$$F(x) < f(b) + 2\varepsilon\,. \tag{6}$$

Pro $x \in U \cap \overline{G}$ položme dále $\Omega(x) = \Phi(x) + d\varphi(x) - f(b) + \varepsilon$, kde číslo $d \geqq 0$ je tak voleno, aby pro každé $x \in \overline{G} \cap S$ bylo $d\varphi(x) \geqq f(b)$. Funkce Ω je superharmonická na množině $K \cap G$ a spojitá na $\overline{K \cap G}$. Nechť bod x leží na hranici množiny $K \cap G$. Potom je podle (1), cvič. 3 buď $x \in S$ nebo $x \in H$. Je-li $x \in S$, je $\Omega(x) \geqq d\varphi(x) - f(b) \geqq 0$. Není-li $x \in S$, je $x \in H \cap K$, tedy $\Omega(x) \geqq f(x) - f(b) + \varepsilon > 0$. Podle lemmatu 6 je pro každé $x \in \overline{K \cap G}$ splněn vztah $\Omega(x) \geqq 0$ neboli

$$\Phi(x) \geqq f(b) - \varepsilon - d\varphi(x)\,. \tag{7}$$

Protože množina K je otevřená, je podle (2), cvič. 3 $K \cap \overline{G} \subset \overline{K \cap G}$; protože Φ je libovolná horní funkce, plyne z (7), že pro každé $x \in K \cap \overline{G}$ platí

$$F(x) \geqq f(b) - \varepsilon - d\varphi(x)\,.$$

Pro všechna $x \in \overline{G}$, dosti blízká bodu b, je tedy

$$F(x) > f(b) - 2\varepsilon\,.$$

Odtud a z (6) plyne, že $F(b) = f(b)$ a že funkce F je spojitá v bodě b (vzhledem k množině $\overline{G}$).

Nyní dokážeme, že funkce F je harmonická na množině G. Zvolme tedy $s \in G$; buď K otevřená koule o středu s, $\overline{K} \subset G$. Existují horní funkce Φ_1, $\Phi_2, \ldots$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(s) = F(s)$. Položme $\Psi_n = \min(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, $\Gamma_n = (\Psi_n)_K$. Podle lemmatu 4 a poznámky k lemmatu 7 jsou též Ψ_n, Γ_n horní funkce. Protože $F(s) \leqq \Gamma_n(s) \leqq \Phi_n(s)$, je též $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n(s) = F(s)$. Funkce $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ tvoří na množině K omezenou monotonní posloupnost; pro každé $x \in K$ můžeme tedy položit $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n(x)$. Podle cvič. 24 je funkce Γ harmonická na množině K. Protože Γ_n jsou horní funkce, je

$$\Gamma(x) \geqq F(x) \tag{8}$$

pro každé $x \in K$.

Buď opět Φ libovolná horní funkce. Položme $\tilde{\Psi}_n = \min(\Phi, \Psi_n)$, $\tilde{\Gamma}_n = (\tilde{\Psi}_n)_K$, $\tilde{\Gamma}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\Gamma}_n(x)$ $(x \in K)$. Funkce $\tilde{\Gamma}$ je opět harmonická; zřejmě $\tilde{\Gamma}(x) \leqq \Gamma(x)$ $(x \in K)$, $\tilde{\Gamma}(s) = \Gamma(s)$ $(= F(s))$. Kdyby v některém bodě $b \in K$ bylo $\tilde{\Gamma}(b) < \Gamma(b)$, mohli bychom použít cvič. 23 na kouli o středu s a poloměru $|s - b|$ a na funkci $\Gamma - \tilde{\Gamma}$; zjistili bychom tak, že $\tilde{\Gamma}(s) < \Gamma(s)$, což není pravda. Je proto $\Gamma(x) = \tilde{\Gamma}(x) \leqq \Phi(x)$, $\Gamma(x) \leqq \inf \Phi(x) = F(x)$, tedy podle (8) $\Gamma(x) = F(x)$ pro každé $x \in K$. Vidíme, že funkce F je harmonická v okolí libovolného bodu $s \in G$; je tedy harmonická na množině G, takže je řešením dané Dirichletovy úlohy. Protože každé nezáporné řešení Dirichletovy úlohy je horní funkcí, je F nejmenší nezáporné řešení.

14. Lemma. *Nechť $b \in E_m$; buď $\delta > 0$, $G = E[x; 0 < |x - b| < \delta]$. Potom není $G \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Je-li $m = 2$, položme $\Psi(x) = \log(\delta \,.\, |x - b|^{-1})$; je-li $m > 2$, položme $\Psi(x) = |x - b|^{2-m}$. Buď $\varepsilon > 0$. Funkce $\Phi(x) = \min(\varepsilon\Psi(x), 1)$ $(\Phi(b) = 1)$ je podle lemmatu 4 horní funkcí k funkci f, definované na hranici množiny G předpisem $f(b) = 1$, $f(x) = 0$ pro $|x - b| = \delta$. Infimum F všech horních funkcí není tedy spojité (je $F(b) = 1$, ale $F(x) = 0$ pro $x \in G$).

15. Věta. *Nechť množina $B \subset E_m$ má isolovaný bod b. Potom není $E_m - B \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Buď K otevřená koule o středu b taková, že $K \cap B = \{b\}$. Kdyby platilo $G = E_m - B \in \mathfrak{G}$, platilo by podle věty 10 $K - \{b\} = K \cap G \in \mathfrak{G}$; to však odporuje předešlému lemmatu.

16. Buď $G \in \mathfrak{G}$; buď $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(G)$ množina všech spojitých funkcí f na $H(G)$ takových, že k funkci $|f|$ existuje aspoň jedna horní funkce. Systém $\mathfrak{D}$ zřejmě obsahuje všechny omezené spojité funkce na $H(G)$. Každé nezáporné funkci $f \in \mathfrak{D}$ přiřadíme infimum všech horních funkcí; označíme je $D(G, f)$. Je-li $f = 0$, je ovšem $D(G, f) = 0$; je-li f libovolná funkce z $\mathfrak{D}$, můžeme tedy položit

$$D(f) = D(G, f) = D(G, f_+) - D(G, f_-)\,,$$

kde $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$. (Zřejmě $f_+, f_- \in \mathfrak{D}$.) Funkce $D(f)$ je podle věty 13 řešením Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f (a množině G). Místo $(D(f))(x)$ píšeme $D(f, x)$ nebo $D(G, f, x)$ $(x \in \bar{G})$.

Poznámka. Jestliže k nezáporné spojité funkci f na množině $H(G)$ existuje řešení Dirichletovy úlohy, nemusí ještě platit $f \in \mathfrak{D}$. Příklad (v E_2): Funkce $F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ je zřejmě řešením Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci $f(x_1, 0) = x_1^2$ a polorovině $x_2 > 0$. Položme $g_n(t) = \min(n, t^2)$, $f_n(x_1, 0) = g_n(x_1)$. Z cvič. 13, 17, 18 snadno plyne, že pro $x = [x_1, x_2]$, $x_2 > 0$ je $D(f_n, x) = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2 \,.\, g_n(t)}{(x_1 - t)^2 + x_2^2}\, \mathrm{d}t$, kde $\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1}$. Kdyby k funkci f existovala horní funkce Φ, bylo by $D(f_n) \leqq \Phi$ pro každé n; volíme-li však na př. $b = [0, 1]$, dostaneme $D(f_n, b) = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(t)}{t^2 + 1} \, dt \to \infty$.

17. Věta. *Buď $G \in \mathfrak{G}$; nechť existují funkce Φ, Ψ, které mají tyto vlastnosti: Jsou omezené a spojité na $\bar{G}$ a harmonické na G; shodují se na $H(G)$, nejsou si však identicky rovny na $\bar{G}$. Potom platí*

$$\inf_{x \in G} D(G, 1, x) = 0 \tag{9}$$

(je ovšem $D(G, 1) = D(G, f)$, kde $f(x) = 1$ pro každé $x \in H(G)$).

Důkaz. Položme $\Omega_0(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$ $(x \in \bar{G})$. Potom je Ω_0 omezená spojitá funkce, která není identicky rovna nule na množině G. Můžeme tudíž volit číslo c tak, že funkce $\Omega_1 = c\Omega_0$ má supremum rovné 1; položme $\Omega_2 = 1 - \Omega_1$.

Protože $\Omega_2(x) = 1$ pro každé $x \in H(G)$, je Ω_2 horní funkce k funkci $f(x) = 1$ a tedy $D(G, 1) \leqq \Omega_2$. Odtud a ze vztahu $\inf \Omega_2(x) = 0$ plyne (9).

18. Buď $\mathfrak{G}_1^m = \mathfrak{G}_1$ systém těch regulárních množin $G \subset E_m$, pro něž je $D(G, 1) = 1$ (t. j. $D(G, 1, x) = 1$ pro každé $x \in G$); buď $\mathfrak{G}_0^m = \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_1$.

Poznámka. Je-li $G \in \mathfrak{G}_1$, je řešení Dirichletovy úlohy pro každou omezenou spojitou funkci na $H(G)$ vždy jednoznačné ve třídě omezených funkcí (to plyne ihned z věty 17). Je-li však $G \in \mathfrak{G}_0$, existují k funkci $f(x) = 1$ aspoň dvě nezáporná omezená řešení (a platí tedy (9)). Potom ovšem není řešení Dirichletovy úlohy jednoznačné pro žádnou omezenou spojitou funkci na $H(G)$ ani ve třídě omezených funkcí. — Je-li $m = 2$, je systém $\mathfrak{G}_0$ prázdný, jak plyne z cvič. 12. Uvidíme (viz větu 35), že pro $m > 2$ patří do $\mathfrak{G}_0$ každá regulární množina s omezeným komplementem. Do $\mathfrak{G}_1$ patří ovšem všechny omezené regulární množiny. — Buď konečně $G \in \mathfrak{G}_0$ a buď f nezáporná funkce z $\mathfrak{D}$; položme $\delta = \inf_{x \in G} D(f, x)$. Potom je $D(f, x) - \delta(1 - D(1, x))$ horní funkce k f, takže $\delta = 0$ (zobecnění vztahu (9)).

19. Věta. *Buď Z isometrické zobrazení prostoru E_m na E_m; buď $G \in \mathfrak{G}$ (resp. $G \in \mathfrak{G}_0$). Potom $Z(G) \in \mathfrak{G}$ (resp. $Z(G) \in \mathfrak{G}_0$).*

(Plyne snadno ze cvič. 26 a z vět 11, 13 a 15.)

20. Lemma. *Buď M neprázdná kompaktní konvexní část E_m. Nechť existuje funkce Φ, která je spojitá v E_m, harmonická a kladná v $E_m - M$ a rovná nule na M. Potom $E_m - M \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Je-li $b \in E_m$, $\alpha \in E_1$, buď $Z_{b,\alpha}$ zobrazení, které bodu $x \in E_m$ přiřazuje bod $b + \alpha(x - b)$. Je-li tedy $b \in M$, $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, platí $Z_{b,\alpha}(M) \subset M$. Zvolme nyní $b \in H(M)$; buď $M_n = Z_{b,\alpha}(M)$ pro $\alpha = \frac{1}{n}$, $\Phi_n(x) = \Phi(b + n(x - b))$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Buď K otevřená koule o středu b a poloměru 1. Existují kladná čísla $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ taková, že pro $x \in K$ je $|\varepsilon_n \Phi_n(x)| < n^{-2}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \Phi_n(x)$ tedy konverguje stejnoměrně na množině K; buď Ψ její součet. Snadno se zjistí, že každá funkce Φ_n je harmonická a kladná na $E_m - M_n$ a tedy na $E_m - M$. Podle cvič. 24 je funkce Ψ harmonická na $K - M$. Je $\Psi(b) = 0$, funkce Ψ je spojitá na K a kladná na $K - \{b\}$; je to tedy bariéra.

21. Lemma. *Buď* $\varepsilon > 0$,

$$M = E[x; x = [x_1, \ldots, x_m] \in E_m, x_m = 0, |x| \leqq \varepsilon] .$$

Potom existuje funkce Φ, která je spojitá v E_m, harmonická a kladná v $E_m - M$ a rovná nule na M.

Důkaz. Položme $f(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\tau + \varepsilon^2)^{m-1}}}$ $(t \geqq 0)$, $\beta(x) = \frac{1}{2}(x^2 - \varepsilon^2 + \sqrt{(x^2 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2 x_m^2})$, $\Phi(x) = f(\beta(x))$ $(x \in E_m)$. Dokážeme, že funkce Φ má uvedené vlastnosti. Funkce Φ je zřejmě spojitá a nezáporná. Položme ještě

$$D = \sqrt{(x^2 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2 x_m^2} .$$

Je-li $x_m \neq 0$, je $D > |x^2 - \varepsilon^2|$, tedy $\beta(x) > 0$. Je-li $|x| > \varepsilon$, $x_m = 0$, je $D = x^2 - \varepsilon^2$, tedy opět $\beta(x) = x^2 - \varepsilon^2 > 0$. Je-li však $x \in M$, je $x_m = 0$, $D = \varepsilon^2 - x^2$, $\beta(x) = 0$. Vidíme, že $M = E[x; \Phi(x) = 0]$. Máme ještě dokázat, že funkce Φ je harmonická na $E_m - M$. Všimněme si, že na $E_m - M$ je $D > 0$ a (píšeme-li $\beta(x) = \beta$)

$$\beta^2 + \beta(\varepsilon^2 - x^2) - \varepsilon^2 x_m^2 = 0 . \tag{10}$$

Odtud plyne (viz cvič. 6)

$$2\beta \operatorname{grad} \beta + (\varepsilon^2 - x^2) \operatorname{grad} \beta - 2\beta x - 2\varepsilon^2 x_m v = 0 ,$$

kde $v = \operatorname{grad} x_m = [0, \ldots, 0, 1]$. Protože $\beta = \frac{1}{2}(x^2 - \varepsilon^2 + D)$, je

$$2\beta + \varepsilon^2 - x^2 = D , \tag{11}$$

takže $D \operatorname{grad} \beta = 2(\beta x + \varepsilon^2 x_m v)$ a tedy

$$D \,.\, x \,.\, \operatorname{grad} \beta = 2(\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2) , \tag{12}$$

$$D^2 (\operatorname{grad} \beta)^2 = 4(\beta^2 x^2 + 2\beta \varepsilon^2 x_m^2 + \varepsilon^4 x_m^2) . \tag{13}$$

Dále máme (viz (11)) $D(\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2) = (2\beta + \varepsilon^2 - x^2)(\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2) = 2\beta^2 x^2 + 2\beta\varepsilon^2 x_m^2 + (\varepsilon^2 - x^2)\beta x^2 + \varepsilon^4 x_m^2 - x^2 \varepsilon^2 x_m^2 = \beta^2 x^2 + 2\beta\, \varepsilon^2 x_m^2 + \varepsilon^4 x_m^2 + x^2[\beta^2 + \beta(\varepsilon^2 - x^2) - \varepsilon^2 x_m^2]$; protože však $[\ldots] = 0$ podle (10), je

$$D(\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2) = \beta^2 x^2 + 2\beta\varepsilon^2 x_m^2 + \varepsilon^4 x_m^2 .$$

Odtud a z (13), (12) plyne

$$D(\operatorname{grad} \beta)^2 = 4(\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2) , \tag{14}$$

$$(\operatorname{grad} \beta)^2 = 2x \,.\, \operatorname{grad} \beta . \tag{15}$$

Provedeme-li na rovnost (10) operátor Δ, dostaneme podle cvič. 6

$$2(\operatorname{grad}\beta)^2 + 2\beta\Delta\beta + \Delta\beta(\varepsilon^2 - x^2) - 2 \,.\, 2x \,.\, \operatorname{grad}\beta - 2m\beta - 2\varepsilon^2 = 0\,,$$

takže (viz (11), (15))

$$D\Delta\beta = 2(m\beta + \varepsilon^2)\,. \tag{16}$$

Z (10) a (14) plyne $\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2 = \beta^2 + \beta\varepsilon^2$, $(\operatorname{grad}\beta)^2 = \frac{4}{D}\beta(\beta + \varepsilon^2)$ a tedy (viz cvič. 7 a vztah (16)) $\Delta\Phi = f'' \,.\, (\operatorname{grad}\beta)^2 + f' \,.\, \Delta\beta = \frac{2}{D}[f' \,.\, (m\beta + \varepsilon^2) + 2f'' \,.\, \beta(\beta + \varepsilon^2)]$. Protože však $f'(\beta) = (\beta(\beta + \varepsilon^2)^{m-1})^{-\frac{1}{2}}$, $f''(\beta) = -\frac{1}{2}(\ldots)^{-\frac{3}{2}} \,.\, ((\beta + \varepsilon^2)^{m-1} + \beta(m-1)(\beta + \varepsilon^2)^{m-2}) = -\frac{1}{2}(\ldots)^{-\frac{3}{2}} \,.\, (\beta + \varepsilon^2)^{m-2} \,.\, (m\beta + \varepsilon^2)$, dostáváme $\Delta\Phi = \frac{2}{D}[(\ldots)^{-\frac{1}{2}} \,.\, (m\beta + \varepsilon^2) - (\ldots)^{-\frac{3}{2}} \,.\, (\beta + \varepsilon^2)^{m-2} \,.\, (m\beta + \varepsilon^2) \,.\, \beta(\beta + \varepsilon^2)] = \frac{2}{D}[(\ldots)^{-\frac{1}{2}} \,.\, (m\beta + \varepsilon^2) - (\ldots)^{-\frac{3}{2}} \,.\, (\ldots) \,.\, (m\beta + \varepsilon^2)] = 0$. Tím je vše dokázáno.

22. Věta. *Buď R nadrovina, K uzavřená koule o středu v R. Potom je $E_m - (K \cap R) \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Buď ε poloměr koule K; buď $M = E[x; x = [x_1, \ldots, x_m] \in E_m$, $x_m = 0$, $|x| \leqq \varepsilon]$. Podle lemmat 20 a 21 je $E_m - M \in \mathfrak{G}$; podle věty 19 je též $E_m - (K \cap R) \in \mathfrak{G}$.

23. Věta. *Buď G otevřená část E_m; nechť $H(G) \neq \emptyset$ a nechť ke každému $b \in H(G)$ existuje nadrovina R a uzavřená koule K o středu v R tak, že $K \cap R \cap G = \emptyset$, $b \in K \cap R$. Potom $G \in \mathfrak{G}$.*

(Plyne z lemmatu 9 a věty 22.)

24. Věta. *Buď $G_1 \in \mathfrak{G}_0$; buď $G_2 \in \mathfrak{G}$, $G_1 \subset G_2$. Potom $G_2 \in \mathfrak{G}_0$.*

Důkaz. Definujme na množině $\overline{G}_2$ funkci Φ předpisem $\Phi(x) = 1$ pro $x \in \overline{G}_2 - G_1$, $\Phi(x) = D(G_1, 1, x)$ pro $x \in G_1$. Protože $\Phi(x) = D(G_1, 1, x)$ dokonce pro každé $x \in \overline{G}_1$, je podle cvič. 27 funkce Φ spojitá na $\overline{G}_2$. Zvolme $b \in G_2$. Je-li $b \in G_2 - G_1$, je $\Phi(b) = 1$; protože $\Phi(x) \leqq 1$ na $\overline{G}_2$, je $\Phi_K(b) \leqq 1 = \Phi(b)$ pro každou kouli K, pro niž $\overline{K} \subset G_2$. Je-li však $b \in G_1$, pak pro každou dosti malou kouli K o středu b platí $\Phi_K(b) = \Phi(b)$. Funkce Φ je tedy horní funkcí k funkci identicky rovné jedné na $H(G_2)$; protože (podle věty 17) je $\inf_{x \in G_1} D(G_1, 1, x) = 0$, je také $\inf_{x \in G_2} \Phi(x) = 0$, takže $\inf_{x \in G_2} D(G_2, 1, x) = 0$, $G_2 \in \mathfrak{G}_0$.

25. Věta. *Nechť $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Potom $G = G_1 \cup G_2 \in \mathfrak{G}$. Jestliže $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_1$, je též $G \in \mathfrak{G}_1$.*

Důkaz. Protože $\overline{G}_1 \cap G_2 = \emptyset$, je $H(G_1) \cap G_2 = \emptyset$ a tedy $H(G_1) \cap G = \emptyset$; protože $H(G_1) \subset \overline{G}_1 \subset \overline{G}$, je $H(G_1) \subset H(G)$. Podobně se zjistí, že $H(G_2) \subset H(G)$.

Buď nyní f nezáporná omezená spojitá funkce na $H(G)$. Definujme na množině $\overline{G}$ funkci F předpisem $F(x) = D(G_j, f, x)$, je-li $x \in G_j$, $F(x) = f(x)$, je-li $x \in H(G)$. Funkce F je spojitá na $\overline{G}_1$ i na $\overline{G}_2$; podle cvič. 27 je funkce F spojitá i na $\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2 = \overline{G}$, takže je nezáporným řešením Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f a množině G. Protože podle věty 15 má každá z množin $E_m - G_j$ více než jeden bod, má podle cvič. 28 také hranice každé z množin G_j a tedy i hranice množiny G více než jeden bod. Podle věty 11 je tudíž $G \in \mathfrak{G}$. Jestliže nyní $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_1$, je funkce $D(G, 1)$ rovna jedné na G_1 i na G_2 a tedy i na G; odtud plyne $G \in \mathfrak{G}_1$.

26. Věta. *Nechť $G \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$ (resp. $\mathfrak{G}_0^{m+1}$). Potom $G \in \mathfrak{G}^m$ (resp. $G \in \mathfrak{G}_0^m$).*

Důkaz. Buď f nezáporná omezená spojitá funkce na $H(G)$; položme $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) = f(x_1, \ldots, x_m)$. Potom je $\tilde{f}$ nezáporná omezená spojitá funkce na hranici množiny $U = G \times E_1$; buď $\tilde{F} = D(U, \tilde{f})$. Zvolme $y_1, y_2 \in E_1$ a položme $d = y_2 - y_1$. Funkce $\tilde{F}(x, y + d)$ $(x \in \overline{G},\ y \in E_1)$ je horní funkcí k funkci $\tilde{f}$; je tedy $\tilde{F}(x, y_1) \leqq \tilde{F}(x, y_1 + d) = \tilde{F}(x, y_2)$. Podobně se zjistí, že $\tilde{F}(x, y_2) \leqq \tilde{F}(x, y_1)$; vidíme, že existuje funkce F na množině $\overline{G}$ tak, že $\tilde{F}(x, y) = F(x)$. Protože $\dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2} = 0$, je funkce F harmonická na G; je to zřejmě řešení Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f. Má-li tedy komplement množiny G aspoň dva body, je podle věty 11 $G \in \mathfrak{G}^m$. Je-li kromě toho $G \times E_1 \in \mathfrak{G}_0^{m+1}$ a volíme-li $f(x) = 1$, existuje $b \in G$, $c \in E_1$ tak, že $\tilde{F}(b, c) < 1$ a tedy $F(b) < 1$; protože $D(G, 1) = D(G, f) \leqq F$, je také $D(G, 1, b) < 1$. Odtud plyne $G \in \mathfrak{G}_0^m$.

Případ, že by komplement množiny G obsahoval jen jeden bod, nemůže však (za předpokladu $G \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$) nastat; to dokážeme sporem. Nechť tedy $G = E_m - \{b\}$, $G \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$. Buď $L = E[x; x \in E_m, |x - b| < 1]$. Protože $L \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$, je též (podle věty 10) $(L \cap G) \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$. Protože komplement množiny $L \cap G$ obsahuje více než jeden bod, platí (podle toho, co jsme dokázali) $L \cap G \in \mathfrak{G}^m$. To však odporuje lemmatu 14; tím je vše dokázáno.

Poznámka. Je-li $G \times E_1 \in \mathfrak{G}_1^{m+1}$, je ovšem $G \in \mathfrak{G}_1^m$.

27. Věta. *Buď P poloprostor; buď $G \in \mathfrak{G}$, $G \subset P$. Potom $G \in \mathfrak{G}_1$.*

(Plyne snadno z cvič. 13 a z vět 19 a 24.)

28. Věta. *Nechť $G \in \mathfrak{G}_0$; buď $Z(x_1, \ldots, x_m) = [x_1, \ldots, x_{m-1}, -x_m]$. Potom $G \cap Z(G) \in \mathfrak{G}_0$.*

Důkaz. Buď A (resp. B) poloprostor $x_m > 0$ (resp. $x_m < 0$); buď R nadrovina $x_m = 0$. Položme $U = G - R$. Z věty 27 plyne, že není $G \subset A$; je tedy $G \cap B \neq \emptyset$, takže (viz věty 10 a 27) $G \cap B \in \mathfrak{G}_1$. Podobně se zjistí, že $G \cap A \in \mathfrak{G}_1$, a z věty 25 plyne $U = (G \cap A) \cup (G \cap B) \in \mathfrak{G}_1$.

Buď $F = D(G, 1)$. Kdyby bylo $F(x) \geqq \frac{1}{2}$ pro každé $x \in R \cap \overline{G}$, bylo by (viz (1), cvič. 3) $F(x) \geqq \frac{1}{2}$ pro každé $x \in H(G) \cup (R \cap \overline{G}) \supset H(U)$; odtud by však plynulo, že je funkce F horní funkcí vzhledem k funkci $f(x) = \frac{1}{2}$ $(x \in H(U))$ a množině U a že tedy platí $F(x) \geqq D(U, \frac{1}{2}, x) = \frac{1}{2}$ pro každé $x \in U \cup (R \cap \overline{G}) \supset G$, což není možné podle (9) (věta 17). Existuje tedy $b \in R \cap \overline{G}$ tak, že $F(b) < \frac{1}{2}$; zřejmě $b \in G$, tedy $b \in G \cap Z(G) = V$. Definujme na množině $\overline{V}$ funkci Φ předpisem $\Phi(x) = F(x) + F(Z(x))$. Funkce Φ je harmonická na V a spojitá na $\overline{V}$; protože $H(V) \subset H(G) \cup H(Z(G))$, je $\Phi(x) \geqq 1$ pro každé $x \in H(V)$ a tedy $\Phi(x) \geqq D(V, 1, x)$ pro každé $x \in V$. Protože však $\Phi(b) < 1$, je $V \in \mathfrak{G}_0$.

29. Věta. *Nechť* $U \in \mathfrak{G}_1^m$, $U \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$, $G \in \mathfrak{G}^{m+1}$, $G \cap ((E_m - U) \times \langle 0, \infty)) = \emptyset$. *Potom* $G \in \mathfrak{G}_1^{m+1}$.

Důkaz. Buď $Z(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) = [x_1, \ldots, x_m, -x_{m+1}]$. Zřejmě $Z(G) \cap ((E_m - U) \times (-\infty, 0\rangle) = \emptyset$, takže $G \cap Z(G) \cap ((E_m - U) \times E_1) = \emptyset$ neboli $G \cap Z(G) \subset U \times E_1$. Kdyby bylo $G \in \mathfrak{G}_0^{m+1}$, měli bychom podle vět 28, 24 a 26 postupně $G \cap Z(G) \in \mathfrak{G}_0^{m+1}$, $U \times E_1 \in \mathfrak{G}_0^{m+1}$ a konečně $U \in \mathfrak{G}_0^m$ proti předpokladu.

30. Věta. *Buď G otevřená část E_m, $H = H(G) \neq \emptyset$. Nechť ke každému $b \in H$ existuje nadrovina R a uzavřená koule K se středem v R tak, že $b \in K \cap R$, $K \cap R \cap G = \emptyset$. Potom $G \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$.*

Důkaz. Zvolme $d \in H(G \times E_1)$, $d = [b, c]$, kde $b \in H$, $c \in E_1$. Sestrojme k bodu b podle předpokladů věty nadrovinu R a kouli K; položme $S = R \times E_1$. Buď $K = E[x; x \in E_m, |x - s| \leqq \delta]$, $t = [s, c]$, $L = E[x; x \in E_{m+1}, |x - t| \leqq \delta]$. Potom je L koule se středem v nadrovině S; snadno se zjistí, že $d \in L \cap S$, $L \cap S \cap (G \times E_1) = \emptyset$. Podle věty 23 je $G \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$.

31. Věta. *Buď C úsečka v E_2; nechť $G \in \mathfrak{G}^3$, $G \cap (C \times \langle 0, \infty)) = \emptyset$. Potom $G \in \mathfrak{G}_1^3$.*

Důkaz. Úsečka v E_2 je zřejmě průnikem nadroviny (= přímky) s koulí (= kruhem) se středem v této nadrovině. Podle věty 30 je $(E_2 - C) \times E_1 \in \mathfrak{G}^3$. Protože $\mathfrak{G}_0^2 = \emptyset$ (viz cvič. 12), je podle věty 26 $(E_2 - C) \times E_1 \in \mathfrak{G}_1^3$. Podle věty 29, kde píšeme $U = E_2 - C$, je tudíž $G \in \mathfrak{G}_1^3$.

Poznámka. Ty regulární množiny s neomezeným komplementem, s nimiž se setkáváme při konkretním řešení trojrozměrné Dirichletovy úlohy, patří podle vět 31 a 19 zpravidla do $\mathfrak{G}_1^3$. To znamená zejména, jak víme, že ke každé funkci, spojité a omezené na hranici takové množiny, existuje právě jedno omezené řešení příslušné Dirichletovy úlohy.

32. Věta. *Pro každou množinu $G \in \mathfrak{G}$ jsou správná tato tvrzení:*

a) *Jestliže $f, g \in \mathfrak{D}$, je $f + g \in \mathfrak{D}$ a*

$$D(f + g) = D(f) + D(g) .$$

b) *Jestliže $f \in \mathfrak{D}$, $c \in E_1$, je $cf \in \mathfrak{D}$ a*

$$D(cf) = cD(f) .$$

c) *Jestliže* $f, g \in \mathfrak{D}$, $f \leqq g$, *je*

$$D(f) \leqq D(g) .$$

d) *Jestliže* f *je spojitá funkce na* $H(G)$, $g \in \mathfrak{D}$, $|f| \leqq g$, *je* $f \in \mathfrak{D}$ *a*

$$|D(f)| \leqq D(g) .$$

Důkaz. Buďte napřed f, g nezáporné funkce z $\mathfrak{D}$. Potom je $D(f) + D(g)$ horní funkce k $f + g$, takže $D(f) + D(g) \geqq D(f + g)$. Protože $D(f + g)$ je horní funkce k f, je $D(f + g) \geqq D(f)$; vidíme, že $D(f + g) - D(f)$ je horní funkcí k funkci g. Odtud plyne $D(f + g) - D(f) \geqq D(g)$, $D(f + g) \geqq D(f) + D(g)$. Tvrzení a) je tedy v našem případě správné.

Buďte nyní f, g libovolné funkce z $\mathfrak{D}$. Definujme funkce φ, ψ předpisem $(f + g)_+ + \varphi = f_+ + g_+$, $(f + g)_- + \psi = f_- + g_-$. Odečtením těchto rovností dostaneme vztah $\varphi = \psi$. Zřejmě $\varphi \geqq 0$, $\varphi \in \mathfrak{D}$. Je $D(f + g) = D((f + g)_+) - D((f + g)_-) = D((f + g)_+) + D(\varphi) - (D((f + g)_-) + D(\psi))$; podle toho, co jsme již dokázali, je tedy $D(f + g) = D((f + g)_+ + \varphi) - D((f + g)_- + \psi) = D(f_+) + D(g_+) - (D(f_-) + D(g_-)) = D(f) + D(g)$. Tím je úplně dokázáno tvrzení a). Důkaz tvrzení b) a c) lze přenechat čtenáři. Platí-li nyní předpoklady tvrzení d), je zřejmě $f \in \mathfrak{D}$, $-g \leqq f \leqq g$, tedy $D(f) \leqq D(g)$, $D(-g) \leqq D(f)$, $D(g) \geqq -D(f)$, takže opravdu $|D(f)| \leqq D(g)$.

33. Věta. *Buď* $G \in \mathfrak{G}^m$, $f \in \mathfrak{D}$, $H = H(G)$. *Potom platí*

$$\sup_{x \in G} |x|^{m-2} . |D(f, x)| = \sup_{x \in H} |x|^{m-2} . |f(x)| , \tag{17}$$

$$\sup_{x \in G} |D(f, x)| = \sup_{x \in H} |f(x)| . \tag{18}$$

Důkaz. Buď napřed funkce f nezáporná. Není-li funkce $|x|^{m-2} . f(x)$ omezená, je vztah (17) zřejmě správný; buď tedy $\sup_{x \in H} |x|^{m-2} . f(x) = s < \infty$. Potom existuje číslo c tak, že $f(x) < c$ pro všechna $x \in H$. Snadno se zjistí (viz odst. 3, 4), že funkce $\Phi(x) = \min(c, s . |x|^{2-m})$ ($\Phi(0) = c$) je horní funkcí k funkci f. Pro každé $x \in G$ je tedy $D(f, x) \leqq \Phi(x)$, takže $|x|^{m-2} . D(f, x) \leqq s$. Odtud plyne ihned, že (17) platí pro každou nezápornou funkci $f \in \mathfrak{D}$.

Buď nyní f libovolná funkce z $\mathfrak{D}$. Podle 32, d) je $|D(f)| \leqq D(|f|)$; podle toho, co jsme dokázali, je tedy $\sup_{x \in G} |x|^{m-2} . |D(f, x)| \leqq \sup_{x \in G} |x|^{m-2} . D(|f|, x) \leqq \sup_{x \in H} |x|^{m-2} . |f(x)|$. Odtud snadno plyne (17). Důkaz vztahu (18) lze přenechat čtenáři.

34. Věta. *Buď* $m > 2$, $G \in \mathfrak{G}^m$, $H = H(G)$, $f \in \mathfrak{D}$; *nechť* $f(x) \to 0$ *pro* $x \in H$, $|x| \to \infty$. *Potom platí* $D(f, x) \to 0$ *pro* $x \in G$, $|x| \to \infty$.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že funkce f je nezáporná. Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $g(x) = \max(f(x) - \varepsilon, 0)$ ($x \in H$). Existuje koule K tak, že $g(x) = 0$ pro každé $x \in H - K$; funkce $|x|^{m-2} . g(x)$ ($x \in H$) je tedy omezená. Podle (17) je také funkce $|x|^{m-2} \,.\, D(g, x)$ $(x \in G)$ omezená, takže $D(g, x) \to 0$ pro $x \in G$, $|x| \to \infty$. Protože však $f(x) \leqq g(x) + \varepsilon$ $(x \in H)$, je funkce $D(g, x) + \varepsilon$ $(x \in \overline{G})$ horní funkcí k f; odtud plyne $D(f, x) \leqq D(g, x) + \varepsilon$ $(x \in G)$ a tedy také $D(f, x) \to 0$ pro $x \in G$, $|x| \to \infty$.

35. Věta. *Buď G regulární množina s omezeným komplementem; buď f spojitá funkce na hranici H množiny G. Potom existují čísla c, d tak, že pro každé $x \in G$, $x \neq 0$ je*

$$\left| \frac{c}{|x|^{m-2}} - D(f, x) \right| < \frac{d}{|x|^{m-1}} \,.$$

Důkaz. Buď K otevřená koule o středu v počátku a poloměru R; nechť $K \supset E_m - G$. Definujme na množině $H(K)$ funkci g předpisem $g(x) = D(G, f, x)$. Podle cvič. 10 je funkce

$$F(x) = \frac{R^{m-2}}{|x|^{m-2}} \,.\, D\left(K, g, x \,.\, \frac{R^2}{x^2}\right) \quad (x \in E_m - K)$$

řešením Dirichletovy úlohy pro funkci g a množinu $E_m - \overline{K}$; touž vlastnost má i funkce $D(G, f, x)$ $(x \in E_m - K)$. Funkce $|x|^{m-2} \,.\, F(x)$ je zřejmě omezená; funkce $|x|^{m-2} \,.\, D(G, f, x)$ je omezená podle (17) (věta 33). Podle cvič. 12 je tedy $F(x) = D(G, f, x)$ pro každé $x \in E_m - K$.

Buď nyní $c_0 = D(K, g, 0)$. Na množině $\overline{K}$ existuje omezená funkce φ tak, že $D(K, g, x) = c_0 + |x| \,.\, \varphi(x)$ pro každé $x \in \overline{K}$. Pro x non $\in K$ potom platí $D(G, f, x) = F(x) = \dfrac{R^{m-2}}{|x|^{m-2}} \left(c_0 + \dfrac{R^2}{|x|} \,.\, \varphi\left(x \,.\, \dfrac{R^2}{x^2}\right)\right)$; píšeme-li ještě $c = R^{m-2} \,.\, c_0$ a je-li $|\varphi(x)| < d_0$ pro $x \in \overline{K}$, platí pro x non $\in K$ vztah

$$\big| |x|^{m-1} \,.\, D(G, f, x) - c|x| \big| < R^m \,.\, d_0 \,.$$

Protože však levá strana této nerovnosti je omezená na množině $G \cap K$, existuje d tak, že je

$$\big| |x|^{m-1} \,.\, D(G, f, x) - c|x| \big| < d$$

pro všechna $x \in G$; odtud plyne ihned tvrzení věty.

Poznámka. Zřejmě $|x|^{m-2} D(f, x) \to c$ pro $|x| \to \infty$.

36. Z věty 35 snadno plyne, že pro $m > 2$ patří do $\mathfrak{G}_0$ každá množina $G \in \mathfrak{G}$ s omezeným komplementem. Nyní ukážeme, že i množina s neomezeným komplementem může patřit do $\mathfrak{G}_0$. Příklad (v E_3): Buď $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, kde B_n je uzavřená koule o středu $s_n = [0, 0, n^3]$ a poloměru n; buď $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$. Pro $x \in G_0 = E_m - S$ položme $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{|x - s_n|}$. Je-li $x \in G_0$, $|s_{n_0}| > 2|x|$, pak pro každé $n \geqq n_0$ platí $|x - s_n| > \dfrac{1}{2} |s_n|$, tedy $\dfrac{n}{|x - s_n|} < \dfrac{2n}{|s_n|} = \dfrac{2}{n^2}$. Řada, definující funkci F, konverguje tedy na množině G_0 lokálně stejnoměrně.

Je-li $x = [x_1, x_2, x_3]$, kde $x_3 \leqq 0$, je $\frac{n}{|x - s_n|} \leqq \frac{1}{n^2}$; v poloprostoru $x_3 \leqq 0$ konverguje tedy řada dokonce stejnoměrně. Odtud snadno plyne, že funkce F je harmonická na množině $G = E_3 - B$, spojitá na $\overline{G}$ a splňuje vztah $F(x) \to 0$ pro $|x| \to \infty$, $x_3 \leqq 0$. Na hranici množiny G je však zřejmě $F(x) > 1$, takže $F \geqq D(G, 1)$, $\inf_{x \in G} D(G, 1, x) = 0$, $G \in \mathfrak{G}_0$.

37. Věta. *Nechť $G \in \mathfrak{G}$; buďte $G_1, G_2, \ldots$ takové otevřené množiny, že $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset \overline{G}$ a že $G \cap G_n \in \mathfrak{G}$ pro každé n. Buď $f \in \mathfrak{D}(G)$; buďte $f_1, f_2, \ldots$ spojité funkce na množině $H = H(G)$, které mají tyto vlastnosti:*

$$|f_1(x)| \leqq |f_2(x)| \leqq \ldots, \; f_n(x) \, . \, f(x) \geqq 0, \; f_n(x) \to f(x) \text{ pro každé } x \in H; \tag{19}$$

$$f_n(x) = 0 \text{ pro každé } x \in H - G_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \, . \tag{20}$$

Každému přirozenému n přiřaďme funkci g_n definovanou na množině $A_n = H(G \cap G_n)$ předpisem

$$g_n(x) = f_n(x) \quad (x \in A_n \cap H) \, , \tag{21}$$

$$g_n(x) = 0 \quad (x \in A_n - H) \, . \tag{22}$$

Potom je $g_n \in \mathfrak{D}(G \cap G_n)$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a platí

$$D(G \cap G_n, g_n, x) \to D(G, f, x) \tag{23}$$

pro každé $x \in \overline{G}$.

Důkaz. Předpokládejme napřed, že funkce f je nezáporná (a tedy $0 \leqq f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \ldots$). Zvolme index n a položme $C = A_n \cap H$, $D = A_n \cap H(G_n)$. Podle (21) je funkce g_n spojitá na množině C. Buď nyní $x \in D$. Je-li $x \in H$, je podle (20), (21) $g_n(x) = 0$; jestliže však x non $\in H$, je podle (22) opět $g_n(x) = 0$. Protože množiny C, D jsou uzavřené a protože $A_n = C \cup D$ (jak plyne ze vztahu (1), cvič. 3), je podle cvič. 27 funkce g_n spojitá také na množině A_n. Z (21), (22) plyne, že $g_n(x) \leqq D(G, f, x)$ pro každé $x \in A_n$; je tedy $g_n \in \mathfrak{D}(G \cap G_n)$. Položme $F_n = D(G \cap G_n, g_n)$, $F = D(G, f)$.

Zvolme bod $x \in A_n$ a index $p > n$. Jestliže $x \in G$, je $g_n(x) = 0 \leqq F_p(x)$; není-li $x \in G$, je ovšem $x \in \overline{G \cap G_n} - G \subset \overline{G \cap G_p} - G \subset A_p$ a podle (19), (21) je opět $g_n(x) \leqq g_p(x) = F_p(x)$. Odtud plyne, že na množině $\overline{G \cap G_n}$ platí $F_n(x) \leqq F_p(x) \leqq F(x)$.

Buď x libovolný bod množiny $\overline{G}$. Protože $\overline{G} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, existuje index n tak, že $x \in \overline{G} \cap G_n$; podle (2) (cvič. 3) je

$$\overline{G} \cap G_n \subset \overline{G \cap G_n} \tag{24}$$

a tedy $x \in \overline{G \cap G_n}$. Na množině $\overline{G}$ můžeme proto definovat funkci Φ předpisem

$$\Phi(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x)$$

(při libovolném $x \in \overline{G}$ je posloupnost $\{F_n(x)\}$ definována pro všechna dosti velká n a je monotonní); zřejmě

$$\Phi \leqq F\,. \tag{25}$$

Protože je posloupnost funkcí F_n omezená v okolí každého bodu množiny G, je podle cvič. 24 funkce Φ harmonická na G.

Buď nyní $b \in H$, $\varepsilon > 0$; nechť $b \in G_n$. Je-li $p > n$, je podle (24) $b \in \overline{G \cap G_n} - G \subset A_p$, tedy $F_p(b) = f_p(b)$. Protože $f_p(b) \to f(b)$, existuje $p > n$ tak, že $F_p(b) > f(b) - \varepsilon$. Protože funkce F_p je spojitá na $\overline{G \cap G_n}$, je podle (24) spojitá i na $G_n \cap \overline{G}$; existuje tedy okolí U bodu b tak, že

$$F_p(x) > f(b) - \varepsilon$$

pro všechna $x \in U \cap (G_n \cap \overline{G}) = V \cap \overline{G}$, kde $V = U \cap G_n$. Protože $F(b) = f(b)$, existuje takové okolí W bodu b, že pro každé $x \in W \cap \overline{G}$ je

$$F(x) < f(b) + \varepsilon\,.$$

Pro všechna $x \in (V \cap W) \cap \overline{G}$ je potom

$$f(b) - \varepsilon < F_p(x) \leqq \Phi(x) \leqq F(x) < f(b) + \varepsilon\,.$$

Vidíme, že $\Phi(b) = f(b)$ a že funkce Φ je spojitá v bodě b vzhledem k množině $\overline{G}$.

Tím jsme dokázali, že Φ je horní funkcí k funkci f a že tedy $\Phi \geqq F$. Odtud a z (25) plyne (23). Pro libovolnou funkci $f \in \mathfrak{D}(G)$ dokážeme větu rozkladem funkce f na rozdíl $f_+ - f_-$.

Poznámka. V této větě můžeme množiny G_n a funkce f_n volit na př. takto: Buď $b \in G$; buď G_n koule o středu b a poloměru n. Dále buď $\psi_n(t) = 1$ pro $0 \leqq t \leqq n - 1$, $\psi_n(t) = 0$ pro $t \geqq n$ a funkce ψ_n buď lineární v intervalu $\langle n - 1, n\rangle$; položme $f_n(x) = f(x) \,.\, \psi_n(|x - b|)$. Věta potom říká, že řešení Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f a množině G, lze přibližně vyjádřit řešením Dirichletovy úlohy, příslušným k funkci g_n a množině $G \cap G_n$. Důležité je přitom, že množina $G \cap G_n$ je (v tomto případě) omezená; pro omezené množiny platí totiž věta o unicitě řešení a jsou též známy různé přibližné metody k jeho nalezení.

38. Lemma. *Buď $G \in \mathfrak{G}$, $f, f_1, f_2, \ldots \in \mathfrak{D}$; nechť $f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \ldots$, $f_n(x) \to f(x)$ pro každé $x \in H(G)$. Potom platí $D(f_n, x) \to D(f, x)$ pro každé $x \in \overline{G}$.*

Důkaz. Předpokládejme napřed, že funkce f_1 je nezáporná. Položíme-li v předešlé větě $G_n = E_m$ $(n = 1, 2, \ldots)$, bude $g_n = f_n$ a podle (23) dostaneme $D(f_n, x) \to D(f, x)$ $(x \in \overline{G})$. Vynechme nyní předpoklad, že funkce f_1 je nezáporná, a pišme $\varphi_n = f_n - f_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\varphi = f - f_1$. Podle toho, co jsme dokázali (a podle věty 32), je $D(\varphi_n, x) \to D(\varphi, x)$ a tedy $D(f_n, x) = D(\varphi_n, x) + D(f_1, x) \to D(\varphi, x) + D(f_1, x) = D(f, x)$ pro každé $x \in \overline{G}$.

39. Věta. *Buď $G \in \mathfrak{G}$; buďte $f, f_1, f_2, \ldots$ spojité funkce na hranici H množiny G. Nechť $f_n(x) \to f(x)$ pro každé $x \in H$ a nechť všechny funkce $|f_1|, |f_2|, \ldots$ mají společnou horní funkci. Potom platí $D(f_n, x) \to D(f, x)$ pro každé $x \in \overline{G}$.*