ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

3

82

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 82 • Č. 3 • STR. 257—384 • PRAHA 31. VII. 1957

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky"*)

SVAZEK 82 (1957)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd
Praha II, Žitná 25

Obsah

Články:

Jan Mařík, Praha: Dirichletova úloha 257
Václav Vilhelm, Praha: Křivky v prostorech Minkowského 283
Karel Svoboda, Brno: Příspěvek k theorii normální křivky čtyrrozměrného prostoru 301
Вацлав Фабиан, Прага: Расширение меры на σ-кольцо, содержащее все одноточечные множества 308
Vlastimil Dlab, Praha: D-hodnost Abelovy grupy 314
Alena Červená, Praha: Poznámka k otázce řešitelnosti jisté soustavy nerovností kladnými čísly 335
Miloš Ráb, Brno: Poznámka k otázce o oscilačních vlastnostech řešení diferenciální rovnice $y'' + A(x)\,y = 0$ 342
Jiří Sedláček, Praha: Poznámka o konvexním mnohoúhelníku 349
Karel Čulík, Brno: O jedné vlastnosti celočíselných nezáporných řešení rovnice $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ 353
Václav Havel, Praha: O dvojici (m, n) konfigurací 360

Úlohy a problémy: č. 5 a 6 365

Referáty:

Albína Dratvová, Praha: Z dějin nejstarší matematiky 366
Miroslav Katětov, Praha: O dvou výsledcích z obecné topologie 367
František Nožička, Praha: O styku ploch a křivek 367

Recense:

K. Rychlík: Úvod do analytické theorie mnohočlenů s reálnými koeficienty (*V. Vilhelm*) 370
А. Г. Витушкин: О многомерных вариациях (*K. Karták*) 372
M. Biernacki: Geometria różniczkowa, I (*F. Vyčichlo*) 374
A. Grzegorczyk: Populární logika (*J. Bečvář*) 375
V. G. Boltjanskij: Co je to derivace (*J. Sedláček*) 377

Zprávy:

Profesor dr František Rádl zemřel (*K. Rychlík* a *L. Rieger*) 378

Další zprávy 383

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 82 * PRAHA, 31. VII. 1957 * ČÍSLO 3

DIRICHLETOVA ÚLOHA

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo dne 23. května 1956.) DT: 517.5

V práci je dokázána věta o existenci a unicitě řešení Dirichletovy úlohy v jisté třídě funkcí a věta o spojité závislosti řešení na okrajových podmínkách. Nic se přitom nepředpokládá o omezenosti základní množiny.

1. V celé práci je m celé číslo > 1. Symbolem $\bar{A}$ (resp. $H(A)$) rozumíme uzávěr (resp. hranici) množiny A v určitém metrickém prostoru (zpravidla v m-rozměrném kartézském prostoru E_m); základní vlastnosti metrických prostorů budeme pokládat za známé. (Viz na př. [1], kap. VI.)

Jestliže $a, b \in E_m$, $a = [a_1, \ldots, a_m]$, $b = [b_1, \ldots, b_m]$, klademe $a \cdot b = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_i$; dále píšeme $a^2 = a \cdot a$, $|a| = \sqrt{a^2}$. — Slovem „funkce" rozumíme vždy konečnou reálnou funkci.

Řekneme, že funkce f je *harmonická* na otevřené množině $G \subset E_m$, je-li spojitá na G a platí-li pro každé $x \in G$

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = 0 . \tag{0}$$

(Kromě spojitosti funkce f požadujeme tedy jen, aby v každém bodě $x \in G$ napsané derivace existovaly a splňovaly vztah (0); nic nepředpokládáme o spojitosti derivací funkce f. Uvidíme však, že každá harmonická funkce má spojité derivace všech řádů.)

Buď G otevřená množina v E_m, $H = H(G) \neq \emptyset$ (t. j. $\emptyset \neq G \neq E_m$); buď f spojitá funkce na množině H. *Dirichletovou úlohou* (příslušnou k funkci f a množině G) rozumíme úlohu najít funkci, která je spojitá na $\bar{G}$, harmonická na G a která se na množině H shoduje s funkcí f. Úkolem tohoto článku je zkoumat existenci a jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy. Snadno se zjistí (viz cvič. 2), že řešení existuje nejvýš jedno, když množina G je omezená;

není-li množina G omezená, existuje (podle cvič. 5) nejvýš jedno řešení, které má v nekonečnu limitu 0. Udáme podmínky, postačující k tomu, aby pro každou omezenou spojitou funkci na množině H existovalo řešení Dirichletovy úlohy; určíme pak jistou třídu funkcí, v níž existuje právě jedno řešení.

Základní vlastnosti harmonických funkcí probereme nyní v řadě cvičení s podrobným návodem. Ve cvičeních 14—19 budeme používat také některých vět z integrálního počtu; cvičení jsou tak sestavena, abychom vystačili s větami z prvních sedmi kapitol Jarníkovy učebnice [2]. (Nikde se tedy nemluví o plošném integrálu.) Výsledků cvič. 14—22, z nichž některá jsou poněkud obtížná, se však používá jen ve cvič. 23—24 a později v odst. 16 v poznámce, která není příliš důležitá. Čtenář může proto postupovat také tak, že cvič. 14—22 a poznámku v odst. 16 vynechá a výsledkům cvič. 23—24 prostě uvěří. Jinak se pojem integrálu vyskytuje jen v odst. 21; zde se však vystačí s nejjednoduššími vlastnostmi jednorozměrného integrálu.

Cvičení 1. Buď G neprázdná omezená otevřená část E_m; buď f funkce spojitá na $\bar{G}$ a harmonická na G. Potom existují body $b_1, b_2 \in H(G)$ takové, že pro každé $x \in \bar{G}$ platí $f(b_1) \leqq f(x) \leqq f(b_2)$. (Návod. Buď M_f (resp. m_f) maximum funkce f na množině $\bar{G}$ (resp. $H(G)$). Nechť $M_f > m_f$. Zvolíme-li dosti malé $\varepsilon > 0$, platí pro funkci $g(x) = f(x) + \varepsilon x^2$ také $M_g > m_g$. Buď $M_g = g(y)$. Protože $y \in G$, je $\dfrac{\partial^2 g(y)}{\partial x_i^2} \leqq 0$ pro $i = 1, \ldots, m$, tedy $\Delta g(y) \leqq 0$. Je však $\Delta g(y) = \Delta f(y) + 2m\varepsilon > 0$ — spor.)

Cvičení 2. Buď G neprázdná omezená otevřená část E_m; buďte funkce f, g spojité na $\bar{G}$ a harmonické na G. Buď ε kladné číslo a nechť pro všechna $x \in H(G)$ platí $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Potom je $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in \bar{G}$. Je-li zejména $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in H(G)$, je $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \bar{G}$. (Návod. Použijte cvič. 1 na funkci $f - g$.)

Cvičení 3. Buď P metrický prostor, A, $B \subset P$. Potom

$$H(A \cap B) \subset H(A) \cup H(B)\,. \tag{1}$$

Je-li množina B otevřená, platí

$$\bar{A} \cap B \subset \overline{A \cap B}\,. \tag{2}$$

Cvičení 4. Buď G neprázdná otevřená část E_m; buď f funkce spojitá na $\bar{G}$ a harmonická na G. Nechť $f(x) \leqq 0$ pro každé $x \in H(G)$; nechť $f(x) \to 0$ pro $x \in G$, $|x| \to \infty$.[1]) Potom je $f(x) \leqq 0$ pro každé $x \in G$. (Návod. Zvolme $\varepsilon > 0$,

[1]) Je-li $M \subset E_m$, $c \in E_1$, pak symbolem

$$f(x) \to c \quad \text{pro} \quad x \in M\,, \quad |x| \to \infty \tag{3}$$

nebo výrokem „funkce f má pro $x \in M$, $|x| \to \infty$ limitu c" (a pod.) budeme rozumět toto: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $A > 0$ tak, že pro všechna $x \in M$, pro něž je $|x| > A$, platí $|f(x) - c| < \varepsilon$. Je-li tedy množina M omezená, budeme vztah (3) pokládat za správný při libovolné funkci f a libovolném $c \in E_1$.

$y \in G$. Existuje $A > |y|$ tak, že pro všechna $x \in \bar{G}$, pro něž je $|x| \geqq A$, platí $f(x) < \varepsilon$. Buď $K = E[x; |x| < A]$. Ze vztahu $H(K \cap G) \subset H(K) \cup H(G)$ (viz (1), cvič. 3) a z cvič. 1 plyne $f(y) < \varepsilon$.)

Cvičení 5. Pomocí cvič. 4 dokažte, že k dané Dirichletově úloze existuje nejvýše jedno řešení, které má pro $|x| \to \infty$ limitu 0.

Cvičení 6. Buď G otevřená část E_m. Nechť funkce f, g mají na množině G spojité derivace prvního (resp. druhého) řádu. Potom platí na množině G

$$\operatorname{grad}(f \,.\, g) = f \,.\, \operatorname{grad} g + g \,.\, \operatorname{grad} f \;^{2})$$

$$(\text{resp. } \Delta(f \,.\, g) = f \,.\, \Delta g + 2 \operatorname{grad} f \,.\, \operatorname{grad} g + g \,.\, \Delta f)\,.$$

Cvičení 7. Buď G (resp. U) otevřená část E_m (resp. E_n; n je libovolné přirozené číslo). Nechť funkce f má spojité derivace 2. řádu na množině U. Buď $\varphi = [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ zobrazení množiny G do množiny U; nechť funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ mají spojité derivace 2. řádu. Buď $g(t) = f(\varphi(t))$ $(t \in G)$. Potom je $\Delta g(t) = = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \, \partial x_k} \,.\, \operatorname{grad} \varphi_j(t) \,.\, \operatorname{grad} \varphi_k(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \Delta \varphi_j(t)$ $(t \in G,\ x = \varphi(t))$. Pro $n = 1$ je tedy $\Delta g = f'' \,.\, (\operatorname{grad} \varphi)^2 + f' \,.\, \Delta \varphi$.

Cvičení 8. Pro $x \neq 0$ (píšeme $0 = [0, \ldots, 0]$) platí $\operatorname{grad} |x|^\alpha = \alpha |x|^{\alpha-2} \,.\, x$, $\Delta |x|^\alpha = \alpha(\alpha + m - 2)\, |x|^{\alpha-2}$ (α reálné). Pro $m = 2$, $x \neq 0$ je $\Delta \log |x| = 0$; pro každé m, $x \neq 0$ je $\Delta |x|^{2-m} = 0$. (Návod. Je-li $\varphi(x) = x^2$ $(x \in E_m)$, $f(y) = = y^{\frac{1}{2}\alpha}$ $(y > 0)$, $g(x) = f(\varphi(x))$, je $\operatorname{grad} \varphi(x) = 2x$, $\Delta \varphi(x) = 2m$ a tedy podle cvič. 7 $\Delta g = \frac{1}{2}\alpha \,.\, (\frac{1}{2}\alpha - 1) \,.\, y^{\frac{1}{2}\alpha - 2} \,.\, 4x^2 + \frac{1}{2}\alpha \,.\, y^{\frac{1}{2}\alpha - 1} \,.\, 2m$.)

Cvičení 9. Buď G otevřená část E_m, $0 \operatorname{non} \in G$. Nechť funkce f má spojité derivace 2. řádu na množině G. Buď $R > 0$; pro $t \in E_m$, $t \neq 0$ buď $\varphi(t) = \frac{R^2 t}{t^2}$. Je $\varphi(\varphi(t)) = t$. Pro $t \in \varphi(G)$ položme $g(t) = f(\varphi(t))$. Potom je $\Delta g(t) = \frac{R^4}{|t|^4} \,.\, \Delta f(x) - 2R^2 \,.\, \frac{m-2}{|t|^4} \,.\, t \,.\, \operatorname{grad} f(x)$ $(t \in \varphi(G), x = \varphi(t))$. (Návod. Buď $\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$; položme $e_i = [\delta_{i1}, \ldots, \delta_{im}]$. Píšeme-li $\frac{R^2 t}{t^2} = [\varphi_1(t), \ldots$ $\ldots, \varphi_m(t)]$, je (podle cvič. 6 a 8) $\operatorname{grad} \varphi_i(t) = \frac{R^2}{|t|^4} (e_i t^2 - 2tt_i)$, $\Delta \varphi_i(t) = = -2(m-2) \frac{R^2 t_i}{|t|^4}$; dále je $\operatorname{grad} \varphi_i(t) \,.\, \operatorname{grad} \varphi_k(t) = \frac{R^4}{|t|^4} \delta_{ik}$. Nyní použijeme cvič. 7.)

Cvičení 10. Předpoklady jako v cvič. 9. Položme $h(t) = |t|^{2-m} \,.\, f(\varphi(t))$ $(t \in \in \varphi(G))$. Potom je $\Delta h(t) = \frac{R^4}{|t|^{m+2}} \Delta f(x)$ $(x = \varphi(t))$. (Plyne z cvič. 6, 8, 9.)

---

[2]) $\operatorname{grad} f(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}\right]$.

Cvičení 11. Buď G otevřená množina v E_2, $H(G) \neq \emptyset$. Buď f funkce, která je spojitá a shora omezená na $\overline{G}$ a harmonická na G; nechť $f(x) \leqq 0$ pro každé $x \in H(G)$. Potom je $f(x) \leqq 0$ pro každé $x \in \overline{G}$. (Návod. Zvolme $y \in G$, $b \in H(G)$, $\varepsilon > 0$; dále zvolme $\delta > 0$ ($\delta < \min(|y - b|, 1)$) tak, aby bylo $f(x) < \varepsilon$ pro každé $x \in \overline{G}$, pro něž $|x - b| \leqq \delta$. Nechť $f(x) < C$ pro každé $x \in \overline{G}$, $C > \varepsilon$. Nyní můžeme určit $A > |y - b|$ tak, aby bylo $(C - \varepsilon) \log|y - b| - C \log \delta <$ $< \varepsilon \,.\, \log A$; pro $x \neq b$ položme $g(x) = \dfrac{(C - \varepsilon) \log|x - b| + \varepsilon \log A - C \log \delta}{\log A - \log \delta}$. Funkce g je harmonická. Buď K (resp. L) otevřený kruh o středu b a poloměru δ (resp. A). Na $H(K) \cap \overline{G}$ je $g(x) = \varepsilon > f(x)$; na $H(L) \cap \overline{G}$ je $g(x) = C > f(x)$; na $H(G) - K$ je $g(x) \geqq \varepsilon > 0 \geqq f(x)$. Podle (1) (cvič. 3) je $g(x) > f(x)$ pro každé $x \in H((G \cap L) - \overline{K})$ a podle cvič. 1 je $f(y) < g(y) < 2\varepsilon$.)

Cvičení 12. Z předešlého cvičení odvoďte větu, že pro $m = 2$ existuje k dané Dirichletově úloze nejvýš jedno řešení ve třídě omezených funkcí. Pomocí cvič. 5 dokažte, že pro libovolné m (> 1) existuje nejvýš jedno řešení ve třídě funkcí F, pro něž je funkce $|x|^{m-2} \,.\, F(x)$ omezená.

Cvičení 13. Buď $G \subset E_m$ poloprostor všech $[x, y]$, kde $x \in E_{m-1}$, $y > 0$; buď f shora omezená spojitá funkce na $\overline{G}$, která je harmonická na G a nekladná na $H(G)$. Potom je funkce f nekladná na $\overline{G}$. Je-li tedy $f_1(x) = f_2(x)$ pro každé $x \in H(G)$, při čemž f_1, f_2 jsou omezené funkce spojité na $\overline{G}$ a harmonické na G, je $f_1(x) = f_2(x)$ pro každé $x \in \overline{G}$. (Návod. Podle cvič. 11 stačí vyšetřit $m > 2$. Buď $y \in G$, $\varepsilon > 0$; nechť $f(x) < c$ pro všechna $x \in G$. Zvolíme-li dosti velké číslo β a položíme-li $b = [0, \ldots, 0, -\beta]$, je $c\left(1 - \left(\dfrac{\beta}{|y - b|}\right)^{m-2}\right) < \varepsilon$. Buď dále R tak velké, aby platilo jednak $R > |y - b|$, jednak $c\left(\dfrac{\beta}{R}\right)^{m-2} < \varepsilon$; buď K otevřená koule o středu b a poloměru R. Položíme-li $g(x) = \varepsilon +$ $+ c\left(1 - \left(\dfrac{\beta}{|x - b|}\right)^{m-2}\right)$, je $g(x) \geqq \varepsilon$ pro $x \in H(G)$, $g(x) > c$ pro $x \in H(K)$, tedy (viz (1), cvič. 3) $g(x) > f(x)$ pro $x \in H(G \cap K)$. Podle cvič. 1 je $f(y) < g(y) < 2\varepsilon$.)

Cvičení 14. Buď f spojitá funkce v intervalu $\langle 0, A \rangle$. Buď K m-rozměrná koule o středu 0 a poloměru A. Potom platí

$$\int_K f(|x|) \,\mathrm{d}x = m\varkappa \int_0^A t^{m-1} f(t) \,\mathrm{d}t \,,$$

kde $\varkappa$ je objem jednotkové koule v E_m. (Návod. Pro $y \in \langle 0, A \rangle$ položme $F(y) = \int_{|x| \leqq y} f(|x|) \,\mathrm{d}x$. Nechť $0 \leqq y < y + h \leqq A$; nechť $\mu \leqq f(t) \leqq M$ pro $t \in (y, y + h)$. Potom je $F(y + h) - F(y) = \int_{y < |x| \leqq y + h} f(|x|) \,\mathrm{d}x$, tedy $\mu(\varkappa(y + h)^m - \varkappa y^m) \leqq F(y + h) - F(y) \leqq M(\varkappa(y + h)^m - \varkappa y^m)$; odtud plyne $F'(y) = \varkappa m y^{m-1} \,.\, f(y)$.)

Cvičení 15. Integrál $\int\limits_{E_m} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + \delta)^{\frac{m+1}{2}}}$ konverguje, je-li $\delta > 0$. (Plyne z cvič. 14.)

Cvičení 16. Parciální derivace řádu n funkce $|x|^\alpha$ mají tvar $|x|^{\alpha-2n} \, . \, P(x)$, kde P je polynom stupně nejvýš n. (Dokáže se indukcí.)

Cvičení 17. Buď f omezená měřitelná funkce v E_{m-1}. Pro $x \in E_{m-1}$, $y > 0$ položme

$$F(x, y) = y \, . \int\limits_{E_{m-1}} \frac{f(t) \, \mathrm{d}t}{((x - t)^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}} \, . \tag{4}$$

Potom je funkce F harmonická a má spojité derivace všech řádů. (Návod. Pišme $z = [x, y]$, $\lambda(t) = [t, 0]$. Parciální derivace funkce za integračním znamením v (4) mají (při pevném t) podle cvič. 16 tvar $T = \frac{f(t) \, . \, P(z - \lambda(t))}{|z - \lambda(t)|^{m+2n}}$, kde P je polynom stupně nejvýš n. Abychom mohli použít věty o derivování za integračním znamením (viz na př. [2], str. 281—2), je třeba nalézt „integrovatelnou majorantu". Zvolme $A > 0$, $\delta > 0$ a vyšetřujme množinu $|x| < A$, $y > \delta$. Protože $|z - \lambda(t)| > \delta > 0$, je $|P(z - \lambda(t))| \leqq C_1 |z - \lambda(t)|^{2n}$, tedy $|T| \leqq \frac{C_2}{|z - \lambda(t)|^m}$. Pro $|t| \leqq 2A$ je $|T| \leqq \frac{C_2}{\delta^m}$; pro $|t| > 2A$ je $|x - t| > \frac{1}{2}|t|$, $(x - t)^2 + y^2 \geqq \frac{1}{4}t^2 + \delta^2$, takže je $|T| \leqq \frac{C_2}{(\frac{1}{4}t^2 + \delta^2)^{\frac{m}{2}}}$. Integrál této funkce (přes E_{m-1}) konverguje podle cvič. 15. — Funkce $\frac{y}{((x - t)^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}}$ je harmonická pro každé t (to se dá zjistit na př. pomocí cvič. 6 a 8); derivováním za integračním znamením zjistíme, že i funkce F je harmonická.)

Cvičení 18. Buď f omezená spojitá funkce v E_{m-1}. Definujme pro $x \in E_{m-1}$, $y \geqq 0$ funkci F předpisem

$$F(x, 0) = f(x) \, , \quad F(x, y) = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{E_{m-1}} \frac{f(t) \, . \, y \, . \, \mathrm{d}t}{((x - t)^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}} \quad (y > 0) \, ,$$

kde $\gamma = \int\limits_{E_{m-1}} \frac{\mathrm{d}v}{(v^2 + 1)^{\frac{m}{2}}}$. Potom je funkce F spojitá. Je-li $|f(t)| \leqq C$ ($t \in E_{m-1}$), je $|F(x, y)| \leqq C$ ($x \in E_{m-1}$, $y \geqq 0$). Je-li $A \in E_1$ a je-li $f(t) = 0$ pro $|t| > A$, je funkce $|z|^{m-1} \, . \, F(z)$ omezená. Je-li funkce f nezáporná, ne však identicky rovná nule, je $F(x, y) > 0$ pro $x \in E_{m-1}$, $y > 0$. (Návod. Substitucí $t = vy + x$ ($y > 0$) dostaneme $F(x, y) = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{E_{m-1}} \frac{f(x + vy) \, \mathrm{d}v}{(v^2 + 1)^{\frac{m}{2}}}$ (platí i pro $y = 0$). Jestliže $x_n \to x$, $y_n \to y$, pak $f(x_n + vy_n) \to f(x + vy)$, $|f(x_n + vy_n)| \leqq C$, takže podle věty 65 z [2] (str. 121) a podle cvič. 15 máme $F(x_n, y_n) \to F(x, y)$. Je-li $f(t) = 0$ pro $|t| > A$, je $|F(z)| \, . \, |z|^{m-1} \leqq \left(\frac{|z|}{|z| - A}\right)^m$. konst. pro $|z| > A$.

Cvičení 19. Buď G poloprostor z cvič. 13. Buď $F_1, F_2, \ldots$ omezená posloupnost funkcí, které jsou spojité na $\overline{G}$ a harmonické na G. Nechť pro každé $z \in \overline{G}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(z) = F(z)$. Potom je funkce F harmonická na G a má tam spojité derivace všech řádů. (Návod. Položme $f_n(t) = F_n(t, 0)$, $f(t) = F(t, 0)$ $(t \in E_{m-1})$. Zvolme $z = [x, y]$ $(x \in E_{m-1}, \; y > 0)$. Podle cvič. 13, 17, 18 je $F_n(x, y) = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{E_{m-1}} \frac{f_n(t) \, . \, y \, . \, dt}{((x - t)^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}}$; podle věty 65 z [2] a podle cvič. 15 máme $F_n(x, y) \to \frac{1}{\gamma} \, . \int\limits_{E_{m-1}} \frac{f(t) \, . \, y \, . \, dt}{((x - t)^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}} = F(x, y)$. Nyní použijeme cvič. 17.)

Cvičení 20. Buď K otevřená koule o středu 0 a poloměru R; buď G poloprostor z cvič. 13. Nechť $b = [0, \ldots, 0, -R]$. Pro $z \neq 2b$ položme $\varphi(z) = b + (z - 2b) \, . \, \frac{4R^2}{(z - 2b)^2}$; pro $w \neq b$ položme $\psi(w) = 2b + (w - b) \, . \, \frac{4R^2}{(w - b)^2}$. Potom je $\varphi(G) = K$, $\varphi(H(G)) = H(K) - \{b\}$, zobrazení φ je prosté a ψ je příslušné inversní zobrazení. (Návod. Nechť $z \neq 2b$, $w = \varphi(z)$. Potom

$$w^2 = b^2 + b \, . \, (z - 2b) \, . \, \frac{8R^2}{(z - 2b)^2} + \frac{16R^4}{(z - 2b)^2} = b^2 + \frac{8R^2}{(z - 2b)^2} \, . \, b \, . \, z \, . \qquad (5)$$

Pro $z \in G$ (resp. $z \in \overline{G}$) je tedy $|w| < R$ (resp. $|w| \leqq R$). Buď naopak $w \in K$; položme $z = \psi(w)$. Zřejmě $z \neq 2b$; protože $\varphi(z) = w$, $|w| < R$, je podle (5) $b \, . \, z < 0$, $z \in G$. Je tedy $\varphi(G) = K$. Podobně se zjistí, že $\varphi(H(G)) = H(K) - \{b\}$. Je-li $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, je $z_1 = \psi(\varphi(z_1)) = \psi(\varphi(z_2)) = z_2$.)

Cvičení 21. Ponechme označení předešlého cvičení. Buď F funkce na množině G, která je harmonická a má spojité derivace 2. řádu. Potom je funkce $|w - b|^{2-m} \, . \, F(\psi(w))$ harmonická pro $w \in K$. (Návod. Utvoříme zobrazení $\lambda(t) = t \, . \, \frac{4R^2}{t^2}$, funkce $F_1(z) = F(2b + z)$, $F_2(t) = |t|^{2-m} \, . \, F_1(\lambda(t))$, $F_3(w) = F_2(w - b) = |w - b|^{2-m} \, . \, F(\psi(w))$ a použijeme cvič. 10.)

Cvičení 22. Ponechme označení ze cvič. 20. Každé funkci f, spojité na množině $H(K)$, přiřaďme funkce $C_f(z)$ $(z \in \overline{G})$, $D_f(w)$ $(w \in \overline{K})$ tímto předpisem: C_f je omezené řešení Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci $(4R^2)^{m-2} \, . \, |z - 2b|^{2-m} \, . \, f(\varphi(z))$ $(z \in H(G))$ a množině G (podle cvič. 13, 17, 18 existuje takové řešení právě jedno a má na G spojité derivace všech řádů); $D_f(w) = |w - b|^{2-m} \, . \, C_f(\psi(w))$ $(w \in \overline{K} - \{b\})$, $D_f(b) = f(b)$. Potom je funkce D_f spojitá na $\overline{K}$ a je

$D_f(w) = f(w)$ pro každé $w \in H(K)$. (Návod. Je-li $f(w) = 1$ $(w \in H(K))$, je $C_f(z) = (4R^2)^{m-2} \, . \, |z - 2b|^{2-m}$ $(z \in \overline{G})$; protože $|\psi(w) - 2b| = \dfrac{4R^2}{|w - b|}$ $(w \neq b)$, je $D_f(w) = 1$ $(w \in \overline{K})$. Je-li $f(w) = 0$ pro všechna $w \in H(K)$, dostatečně blízká k b, je podle cvič. 18 funkce $|z|^{m-1} \, . \, C_f(z)$ a tedy i $|z - 2b|^{m-1} \, . \, C_f(z)$ omezená; potom je omezená také funkce $|\psi(w) - 2b|^{m-1} \, . \, C_f(\psi(w)) = (4R^2)^{m-1} \, . \, |w - b|^{1-m} \, . \, C_f(\psi(w)) = (4R^2)^{m-1} \, . \, |w - b|^{-1} \, . \, D_f(w)$ $(w \in \overline{K} - \{b\})$, takže funkce D_f je spojitá v bodě b. Funkce D_f je tedy spojitá v bodě b také tehdy, když existuje okolí U bodu b a číslo α tak, že $f(w) = \alpha$ pro každé $w \in U \cap H(K)$. Je-li nyní f libovolná spojitá funkce na $H(K)$, zvolíme $\varepsilon > 0$ a položíme $g(w) = \min(f(w), f(b) - \varepsilon)$, $h(w) = \max(f(w), f(b) + \varepsilon)$; ze zřejmého vztahu $D_g \leqq D_f \leqq D_h$ plyne snadno spojitost funkce D_f v bodě b.)

Cvičení 23. Buď L otevřená m-rozměrná koule. Potom ke každé spojité funkci f na $H(L)$ existuje (podle cvič. 2 právě jedno) řešení F příslušné Dirichletovy úlohy. Je-li f nezáporná funkce, která není identicky rovna nule, je $F(x) > 0$ pro každé $x \in L$. (Návod. Buď L koule o středu s a poloměru R. Pro $|x| = R$ položme $g(x) = f(x + s)$. Podle cvič. 21—22 je funkce $D_g(x - s)$ řešením naší úlohy. Je-li $f \geqq 0$, ne však $f(x) = 0$ pro všechna $x \in H(L)$, je podle cvič. 18 $C_g(z) > 0$ pro $z \in G$, tedy $F(x) = D_g(x - s) > 0$ pro $x \in L$.)

Cvičení 24. Buď G libovolná otevřená množina v E_m; buď $F_1, F_2, \ldots$ omezená posloupnost funkcí harmonických na G. Nechť pro každé $x \in G$ existuje $\lim\limits_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$. Potom je funkce F harmonická na G a má tam spojité derivace všech řádů. (Návod. Buď L uzavřená koule o středu s a poloměru R, $L \subset G$. Položme $f_n(x) = F_n(x + s)$ $(|x| = R)$ a utvořme funkce C_{f_n}, D_{f_n} podle cvič. 22. Z cvič. 19 plyne, že funkce $\Phi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} C_{f_n}(x)$ je harmonická (na otevřeném poloprostoru) a má tam spojité derivace všech řádů; funkce $\Psi(x) = |x - b|^{2-m} \, . \, \Phi(\psi(x)) = \lim\limits_{n \to \infty} D_{f_n}(x)$ $(|x| < R)$ je tedy podle cvič. 21 harmonická. Je však $D_{f_n}(x) = F_n(x + b)$, tedy $\Psi(x) = F(x + b)$ $(|x| < R)$.)

Cvičení 25. Harmonická funkce má spojité derivace všech řádů. (Plyne snadno z předešlého cvičení.)

Cvičení 26. Buď G otevřená část E_m; buď funkce f spojitá na $\overline{G}$ a harmonická na G. Buď φ isometrické zobrazení prostoru E_m na E_m. Potom je funkce $f(\varphi^{-1}(x))$ spojitá na $\overline{\varphi(G)}$ a harmonická na $\varphi(G)$. (Návod. Tvar isometrických zobrazení prostoru E_m na E_m je popsán v [1], kap. VI, § 3, příklad 3 (str. 238—240). Nyní použijeme cvič. 7 (a cvič. 25).)

Cvičení 27. Buď P metrický prostor. Nechť množiny A, B jsou buď obě otevřené nebo obě uzavřené v P a nechť $P = A \cup B$. Buď f funkce na množině P; f buď spojitou funkcí na prostoru A i na prostoru B. Potom je funkce f spojitá na P.

Cvičení 28. Nechť $A \subset E_m$, $b \in E_m$, $H(A) = \{b\}$. Potom je buď $A = \{b\}$ nebo $A = E_m - \{b\}$. Je-li tedy množina A uzavřená (resp. otevřená), je $A = \{b\}$ (resp. $A = E_m - \{b\}$). (Návod. Množina $M = E_m - \{b\}$ je souvislá a $M \cap H(A) = \emptyset$. Je tudíž buď $M \subset A$ nebo $M \subset E_m - A$.)

Cvičení 29. Buď f spojitá funkce na otevřené množině $G \subset E_m$; buď K otevřená koule, $\overline{K} \subset G$. Potom existuje právě jedna funkce g, která má tyto vlastnosti: Je spojitá na G, harmonická na K a shoduje se s f na $G - K$. (Návod. Podle cvič. 23 existuje (právě jedna) funkce g_1, která je spojitá na $\overline{K}$, harmonická na K a shoduje se s f na $H(K)$. Položíme-li $g(x) = g_1(x)$ pro $x \in K$, $g(x) = f(x)$ pro $x \in G - K$, je funkce g spojitá na $\overline{K}$ i na $G - K$; podle cvič. 27 je spojitá i na G.)

Cvičení 30. Funkci g ze cvič. 29 označme symbolem f_K. Jsou-li φ, ψ spojité funkce na otevřené množině G a je-li $\alpha \in E_1$, pak pro každou kouli K ($\overline{K} \subset G$) je $(\varphi + \psi)_K = \varphi_K + \psi_K$, $(\alpha\varphi)_K = \alpha \,.\, \varphi_K$; je-li $\varphi \geqq \psi$, je též $\varphi_K \geqq \psi_K$.

2. Označení f_K, zavedeného ve cvič. 30, budeme stále používat. Buď f spojitá funkce na otevřené množině $G \subset E_m$. Řekneme, že funkce f je *superharmonická* na množině G, jestliže ke každému bodu $b \in G$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou kouli K o středu b a poloměru menším než δ platí

$$f_K(b) \leqq f(b) \,.$$

(Tím je řečeno, že pro každou takovou kouli K je $\overline{K} \subset G$.) — Každá harmonická funkce je zřejmě superharmonická.

3. Lemma. *Buďte G_1, G_2 otevřené množiny v E_m. Na množině $G = G_1 \cup G_2$ mějme funkci f, která je superharmonická na G_1 i na G_2. Potom je funkce f superharmonická i na množině G.*

Důkaz. Podle cvič. 27 je funkce f spojitá na G. Je-li $b \in G$, pak zřejmě pro každou dosti malou kouli K o středu b je $f_K(b) \leqq f(b)$.

4. Lemma. *Buďte φ, ψ superharmonické funkce na otevřené množině $G \subset E_m$; buď α nezáporné číslo. Potom jsou též funkce $\alpha\varphi$, $\varphi + \psi$, $\min(\varphi, \psi)$ superharmonické na G.*

Důkaz. Zvolme $b \in G$. Je-li K dosti malá koule o středu b, je $\varphi_K(b) \leqq \varphi(b)$, $\psi_K(b) \leqq \psi(b)$. Potom však podle cvič. 30 platí $(\alpha\varphi)_K(b) = \alpha\, \varphi_K(b) \leqq \alpha\, \varphi(b)$, $(\varphi + \psi)_K\,(b) = \varphi_K(b) + \psi_K(b) \leqq (\varphi + \psi)(b)$, a je-li na př. $\varphi(b) \leqq \psi(b)$, platí též $(\min(\varphi, \psi))_K\,(b) \leqq \varphi_K(b) \leqq \varphi(b) = (\min(\varphi, \psi))(b)$.

5. Lemma. *Buď G otevřená část E_m. Buď funkce f spojitá na $\overline{G}$ a superharmonická na G; nechť existuje $a \in \overline{G}$ tak, že pro každé $x \in G$ je $f(x) \geqq f(a)$. Buď $A = E[x;\, x \in \overline{G},\ f(x) = f(a)]$. Potom $H(A) \subset H(G)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí. Potom existuje $b \in H(A) \cap G$ a k bodu b můžeme určit číslo δ podle odst. 2. Existuje c tak, že $|c - b| < \delta$ (tedy $c \in G$) a zároveň c non $\in A$ neboli $f(c) > f(a)$. Protože množina A je uzavřená, je $H(A) \subset A$, tedy $b \in A$, $f(b) = f(a)$, $f(c) > f(b)$. Buď K koule o středu b a poloměru $|c - b|$. Pro každé $x \in G$ a tedy i pro každé $x \in H(K)$ je $f(x) \geqq f(b)$; protože $f(c) > f(b)$, je podle cvič. 23 také $f_K(b) > f(b)$. To však odporuje volbě čísla δ; tento spor dokazuje naše tvrzení.

6. Lemma. *Buď G neprázdná omezená otevřená část E_m; buď f funkce spojitá na $\overline{G}$ a superharmonická na G. Potom existuje $b \in H(G)$ tak, že pro každé $x \in \overline{G}$ je $f(x) \geqq f(b)$.*

Důkaz. Zřejmě jsou splněny předpoklady lemmatu 5. Zachováme-li označení, vidíme, že $\emptyset \neq A \neq E_m$, tedy $H(A) \neq \emptyset$. Protože $H(A) \subset H(G)$, můžeme za bod b vzíti libovolný prvek množiny $H(A)$.

7. Lemma. *Buď G_0 omezená otevřená množina, G buď otevřená množina (v E_m); nechť $\overline{G}_0 \subset G$. Buď f funkce superharmonická na G. Buď g funkce, která má tyto vlastnosti: $g(x) = f(x)$ pro $x \in G - G_0$, funkce g je spojitá na G a harmonická na G_0. Potom je $f(x) \geqq g(x)$ pro každé $x \in G$ a funkce g je superharmonická na G.*

Důkaz. Funkce $f - g$ je na $\overline{G}_0$ spojitá a na G_0 superharmonická. Protože $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in H(G_0)$, je podle lemmatu 6 $f(x) \geqq g(x)$ pro každé $x \in G_0$ a tedy pro každé $x \in G$. Zvolme nyní $b \in G$. Je-li $b \in G - G_0$, je pro každou kouli K o středu b, pro niž $\overline{K} \subset G$, splněn vztah $g_K(b) \leqq f_K(b) \leqq f(b) = g(b)$; je-li však $b \in G_0$, pak pro každou dosti malou kouli K o středu b platí $g_K(b) = g(b)$. Funkce g je tudíž superharmonická.

Poznámka. Je-li tedy funkce f superharmonická na G, pak pro každou kouli K ($\overline{K} \subset G$) platí $f_K \leqq f$ a funkce f_K je opět superharmonická.

8. Řekneme, že množina $G \subset E_m$ je *regulární*, jestliže má tuto vlastnost: Je otevřená, $H(G) \neq \emptyset$ a ke každému bodu $b \in H(G)$ existuje okolí U bodu b a funkce φ, která je spojitá na $U \cap \overline{G}$ a superharmonická na $U \cap G$, při čemž $\varphi(b) = 0$ a $\varphi(x) > 0$ pro každé $x \in U \cap \overline{G}$, $x \neq b$. Funkci φ nazveme *bariérou* (příslušnou k bodu b a množině G). Systém všech regulárních množin označíme symbolem $\mathfrak{G}^m$ nebo prostě $\mathfrak{G}$.

Poznámka. Nechť existuje koule K o středu s tak, že $K \cap G = \emptyset$, $b \in \overline{K}$; buď $s_1 = \frac{1}{2}(b + s)$. Je-li $m > 2$ (resp. $m = 2$), položme $\varphi(x) = |b - s_1|^{-m+2} - |x - s_1|^{-m+2}$ (resp. $\log|x - s_1| - \log|b - s_1|$). Potom je funkce φ bariérou. (Viz cvič. 8.) Odtud plyne na př., že každá otevřená konvexní množina s neprázdnou hranicí je regulární. K bodu b lze sestrojit bariéru také tehdy, když existuje kužel, který neprotne množinu G a má vrchol v bodě b. (Viz [3], str. 213.) Jiné účinné kriterium regularity je obsaženo ve větě 23.

9. Lemma. *Buď G otevřená část E_m; nechť $H = H(G) \neq \emptyset$ a nechť ke každému $b \in H$ existuje $U \in \mathfrak{G}$ tak, že $G \subset U$, $b \in H(U)$. Potom je $G \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Za bariéru k bodu b a množině G lze vzít bariéru, sestrojenou k bodu b a množině U.

10. Věta. *Nechť $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$, $G = G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Potom je $G \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Zvolme $b \in H(G)$. Podle (1), cvič. 3 je $H(G) \subset H(G_1) \cup H(G_2)$. Je-li na př. $b \in H(G_1)$, použijeme předešlého lemmatu, kde volíme $U = G_1$.

11. Věta. *Buď G neprázdná otevřená část E_m; nechť její komplement obsahuje aspoň dva body. Dále předpokládejme, že ke každé nezáporné omezené spojité funkci na hranici H množiny G existuje nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy. Potom je $G \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Zvolme $b \in H$ a definujme na množině H funkci f předpisem $f(x) = \min(|x - b|, 1)$. Buď φ nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy; buď $A = E[x; x \in \overline{G}, \varphi(x) = 0]$. Protože množina A je uzavřená, je podle lemmatu 5 $H(A) \subset H \cap A = \{b\}$; podle cvič. 28 je buď $A = \{b\}$ nebo $A = E_m$. Kdyby však bylo $A = E_m$, bylo by $H = H \cap A = \{b\}$ a tedy (viz opět cvič. 28) $E_m - G = \{b\}$ proti předpokladu. Je tedy $A = \{b\}$ neboli $\varphi(x) > 0$ pro každé $x \in \overline{G}$, $x \neq b$. Funkce φ je tudíž bariérou.

Poznámka. Obsahuje-li komplement množiny G právě jeden bod b, pak ke každé nezáporné spojité funkci na množině $H(G) = \{b\}$ zřejmě existuje nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy (totiž konstanta), ale podle věty 15 není $G \in \mathfrak{G}$.

12. Buď G otevřená část E_m; nechť $H = H(G) \neq \emptyset$. Buď f nezáporná spojitá funkce na množině H. Řekneme, že Φ je *horní funkce* vzhledem k funkci f a množině G, jestliže funkce Φ je nezáporná a spojitá na $\overline{G}$, superharmonická na G a jestliže pro každé $x \in H$ platí $\Phi(x) \geqq f(x)$.

Poznámka. Je-li funkce f omezená, pak zřejmě každá funkce $\Phi(x) = c$ $(x \in \overline{G})$, kde c je dosti velká konstanta, je horní funkcí vzhledem k f. K neomezené funkci f nemusí horní funkce existovat (viz poznámku v odst. 16).

13. Věta. *Buď $G \in \mathfrak{G}$; buď f nezáporná spojitá funkce na hranici H množiny G. Nechť k funkci f existuje aspoň jedna horní funkce. Definujme na množině $\overline{G}$ funkci F předpisem*

$$F(x) = \inf \Phi(x)\,,$$

kde Φ probíhá všechny horní funkce k funkci f. Potom je F řešením Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f a množině G; je to nejmenší nezáporné řešení.

Důkaz. Buď Φ horní funkce k funkci f. Zvolme $b \in H = H(G)$, $\varepsilon > 0$. K bodu b určeme okolí U a funkci φ podle odst. 8. Buď dále K taková otevřená koule o středu b, že $\overline{K} \subset U$ a že pro každé $x \in H \cap K$ je $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$; buď $S = H(K)$. Existuje $c \geqq 0$ tak, že pro každé $x \in S \cap \overline{G}$ je $c\varphi(x) \geqq \Phi(x)$. (Je-li $L = S \cap \overline{G} = \emptyset$, stačí položit $c = 0$; jinak můžeme psát $\alpha = \max\limits_{x \in L} \Phi(x)$, $\beta = \min\limits_{x \in L} \varphi(x)$, a protože $\alpha \geqq 0, \beta > 0$, lze volit $c = \alpha \,.\, \beta^{-1}$.) Dále položme $\omega(x) = f(b) + \varepsilon + c\varphi(x)$ $(x \in U \cap \overline{G})$ a definujme na množině $\overline{G}$ funkci Ψ předpisem

$$\Psi(x) = \min(\omega(x), \Phi(x)) \quad \text{pro} \quad x \in \overline{G} \cap K\,,$$
$$\Psi(x) = \Phi(x) \quad \text{pro} \quad x \in \overline{G} - K\,.$$

Buď B množina všech $x \in \overline{K} \cap G$, pro něž je $\omega(x) \leqq \Phi(x)$. Množina B je uzavřená; pro $x \in S$ je $\omega(x) > c\varphi(x) \geqq \Phi(x)$, takže $B \cap S = \emptyset$, $B \subset K \cap \overline{G}$. Pro $x \in \overline{G} - B$ je zřejmě $\Psi(x) = \Phi(x)$. Množiny $\overline{G} - B$, $\overline{G} \cap K$ jsou obě otevřené v prostoru $\overline{G}$, na obou z nich je funkce Ψ spojitá a jejich sjednocení je $\overline{G}$; funkce Ψ je tedy (podle cvič. 27) spojitá na $\overline{G}$. Z lemmat 3, 4 plyne podobně, že je funkce Ψ superharmonická na množině G. Je-li $x \in H - K$, je $\Psi(x) = \Phi(x) \geqq f(x)$; je-li $x \in H \cap K$, je $\omega(x) \geqq f(b) + \varepsilon > f(x)$, tedy $\Psi(x) = \min(\omega(x), \Phi(x)) \geqq f(x)$. Funkce Ψ je tudíž horní funkcí. Dále je $\Psi(b) \leqq \omega(b) = f(b) + \varepsilon$. Protože funkce Ψ je spojitá a protože $F \leqq \Psi$, platí pro všechna $x \in \overline{G}$, dosti blízká k b, vztah

$$F(x) < f(b) + 2\varepsilon\,. \tag{6}$$

Pro $x \in U \cap \overline{G}$ položme dále $\Omega(x) = \Phi(x) + d\varphi(x) - f(b) + \varepsilon$, kde číslo $d \geqq 0$ je tak voleno, aby pro každé $x \in \overline{G} \cap S$ bylo $d\varphi(x) \geqq f(b)$. Funkce Ω je superharmonická na množině $K \cap G$ a spojitá na $\overline{K \cap G}$. Nechť bod x leží na hranici množiny $K \cap G$. Potom je podle (1), cvič. 3 buď $x \in S$ nebo $x \in H$. Je-li $x \in S$, je $\Omega(x) \geqq d\varphi(x) - f(b) \geqq 0$. Není-li $x \in S$, je $x \in H \cap K$, tedy $\Omega(x) \geqq f(x) - f(b) + \varepsilon > 0$. Podle lemmatu 6 je pro každé $x \in \overline{K \cap G}$ splněn vztah $\Omega(x) \geqq 0$ neboli

$$\Phi(x) \geqq f(b) - \varepsilon - d\varphi(x)\,. \tag{7}$$

Protože množina K je otevřená, je podle (2), cvič. 3 $K \cap \overline{G} \subset \overline{K \cap G}$; protože Φ je libovolná horní funkce, plyne z (7), že pro každé $x \in K \cap \overline{G}$ platí

$$F(x) \geqq f(b) - \varepsilon - d\varphi(x)\,.$$

Pro všechna $x \in \overline{G}$, dosti blízká bodu b, je tedy

$$F(x) > f(b) - 2\varepsilon\,.$$

Odtud a z (6) plyne, že $F(b) = f(b)$ a že funkce F je spojitá v bodě b (vzhledem k množině $\overline{G}$).

Nyní dokážeme, že funkce F je harmonická na množině G. Zvolme tedy $s \in G$; buď K otevřená koule o středu s, $\overline{K} \subset G$. Existují horní funkce Φ_1, $\Phi_2, \ldots$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n(s) = F(s)$. Položme $\Psi_n = \min(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, $\Gamma_n = (\Psi_n)_K$. Podle lemmatu 4 a poznámky k lemmatu 7 jsou též Ψ_n, Γ_n horní funkce. Protože $F(s) \leqq \Gamma_n(s) \leqq \Phi_n(s)$, je též $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n(s) = F(s)$. Funkce $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ tvoří na množině K omezenou monotonní posloupnost; pro každé $x \in K$ můžeme tedy položit $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n(x)$. Podle cvič. 24 je funkce Γ harmonická na množině K. Protože Γ_n jsou horní funkce, je

$$\Gamma(x) \geqq F(x) \tag{8}$$

pro každé $x \in K$.

Buď opět Φ libovolná horní funkce. Položme $\tilde{\Psi}_n = \min(\Phi, \Psi_n)$, $\tilde{\Gamma}_n = (\tilde{\Psi}_n)_K$, $\tilde{\Gamma}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\Gamma}_n(x)$ $(x \in K)$. Funkce $\tilde{\Gamma}$ je opět harmonická; zřejmě $\tilde{\Gamma}(x) \leqq \Gamma(x)$ $(x \in K)$, $\tilde{\Gamma}(s) = \Gamma(s)$ $(= F(s))$. Kdyby v některém bodě $b \in K$ bylo $\tilde{\Gamma}(b) < \Gamma(b)$, mohli bychom použít cvič. 23 na kouli o středu s a poloměru $|s - b|$ a na funkci $\Gamma - \tilde{\Gamma}$; zjistili bychom tak, že $\tilde{\Gamma}(s) < \Gamma(s)$, což není pravda. Je proto $\Gamma(x) = \tilde{\Gamma}(x) \leqq \Phi(x)$, $\Gamma(x) \leqq \inf \Phi(x) = F(x)$, tedy podle (8) $\Gamma(x) = F(x)$ pro každé $x \in K$. Vidíme, že funkce F je harmonická v okolí libovolného bodu $s \in G$; je tedy harmonická na množině G, takže je řešením dané Dirichletovy úlohy. Protože každé nezáporné řešení Dirichletovy úlohy je horní funkcí, je F nejmenší nezáporné řešení.

14. Lemma. *Nechť $b \in E_m$; buď $\delta > 0$, $G = E[x; 0 < |x - b| < \delta]$. Potom není $G \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Je-li $m = 2$, položme $\Psi(x) = \log(\delta \,.\, |x - b|^{-1})$; je-li $m > 2$, položme $\Psi(x) = |x - b|^{2-m}$. Buď $\varepsilon > 0$. Funkce $\Phi(x) = \min\,(\varepsilon\Psi(x), 1)$ $(\Phi(b) = 1)$ je podle lemmatu 4 horní funkcí k funkci f, definované na hranici množiny G předpisem $f(b) = 1$, $f(x) = 0$ pro $|x - b| = \delta$. Infimum F všech horních funkcí není tedy spojité (je $F(b) = 1$, ale $F(x) = 0$ pro $x \in G$).

15. Věta. *Nechť množina $B \subset E_m$ má isolovaný bod b. Potom není $E_m - B \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Buď K otevřená koule o středu b taková, že $K \cap B = \{b\}$. Kdyby platilo $G = E_m - B \in \mathfrak{G}$, platilo by podle věty 10 $K - \{b\} = K \cap G \in \mathfrak{G}$; to však odporuje předešlému lemmatu.

16. Buď $G \in \mathfrak{G}$; buď $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(G)$ množina všech spojitých funkcí f na $H(G)$ takových, že k funkci $|f|$ existuje aspoň jedna horní funkce. Systém $\mathfrak{D}$ zřejmě obsahuje všechny omezené spojité funkce na $H(G)$. Každé nezáporné funkci $f \in \mathfrak{D}$ přiřadíme infimum všech horních funkcí; označíme je $D(G, f)$. Je-li $f = 0$, je ovšem $D(G, f) = 0$; je-li f libovolná funkce z $\mathfrak{D}$, můžeme tedy položit

$$D(f) = D(G, f) = D(G, f_+) - D(G, f_-)\,,$$

kde $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$. (Zřejmě $f_+, f_- \in \mathfrak{D}$.) Funkce $D(f)$ je podle věty 13 řešením Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f (a množině G). Místo $(D(f))(x)$ píšeme $D(f, x)$ nebo $D(G, f, x)$ $(x \in \bar{G})$.

Poznámka. Jestliže k nezáporné spojité funkci f na množině $H(G)$ existuje řešení Dirichletovy úlohy, nemusí ještě platit $f \in \mathfrak{D}$. Příklad (v E_2): Funkce $F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ je zřejmě řešením Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci $f(x_1, 0) = x_1^2$ a polorovině $x_2 > 0$. Položme $g_n(t) = \min(n, t^2)$, $f_n(x_1, 0) = g_n(x_1)$. Z cvič. 13, 17, 18 snadno plyne, že pro $x = [x_1, x_2]$, $x_2 > 0$ je $D(f_n, x) = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2 \,.\, g_n(t)}{(x_1 - t)^2 + x_2^2}\,\mathrm{d}t$, kde $\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1}$. Kdyby k funkci f existovala horní funkce Φ, bylo by $D(f_n) \leqq \Phi$ pro každé n; volíme-li však na př. $b = [0, 1]$, dostaneme $D(f_n, b) = \frac{1}{\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(t)}{t^2 + 1} \, dt \to \infty$.

17. Věta. *Buď $G \in \mathfrak{G}$; nechť existují funkce Φ, Ψ, které mají tyto vlastnosti: Jsou omezené a spojité na $\overline{G}$ a harmonické na G; shodují se na $H(G)$, nejsou si však identicky rovny na $\overline{G}$. Potom platí*

$$\inf_{x \in G} D(G, 1, x) = 0 \tag{9}$$

(je ovšem $D(G, 1) = D(G, f)$, kde $f(x) = 1$ pro každé $x \in H(G)$).

Důkaz. Položme $\Omega_0(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$ $(x \in \overline{G})$. Potom je Ω_0 omezená spojitá funkce, která není identicky rovna nule na množině G. Můžeme tudíž volit číslo c tak, že funkce $\Omega_1 = c\Omega_0$ má supremum rovné 1; položme $\Omega_2 = 1 - \Omega_1$.

Protože $\Omega_2(x) = 1$ pro každé $x \in H(G)$, je Ω_2 horní funkce k funkci $f(x) = 1$ a tedy $D(G, 1) \leqq \Omega_2$. Odtud a ze vztahu $\inf \Omega_2(x) = 0$ plyne (9).

18. Buď $\mathfrak{G}_1^m = \mathfrak{G}_1$ systém těch regulárních množin $G \subset E_m$, pro něž je $D(G, 1) = 1$ (t. j. $D(G, 1, x) = 1$ pro každé $x \in G$); buď $\mathfrak{G}_0^m = \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_1$.

Poznámka. Je-li $G \in \mathfrak{G}_1$, je řešení Dirichletovy úlohy pro každou omezenou spojitou funkci na $H(G)$ vždy jednoznačné ve třídě omezených funkcí (to plyne ihned z věty 17). Je-li však $G \in \mathfrak{G}_0$, existují k funkci $f(x) = 1$ aspoň dvě nezáporná omezená řešení (a platí tedy (9)). Potom ovšem není řešení Dirichletovy úlohy jednoznačné pro žádnou omezenou spojitou funkci na $H(G)$ ani ve třídě omezených funkcí. — Je-li $m = 2$, je systém $\mathfrak{G}_0$ prázdný, jak plyne z cvič. 12. Uvidíme (viz větu 35), že pro $m > 2$ patří do $\mathfrak{G}_0$ každá regulární množina s omezeným komplementem. Do $\mathfrak{G}_1$ patří ovšem všechny omezené regulární množiny. — Buď konečně $G \in \mathfrak{G}_0$ a buď f nezáporná funkce z $\mathfrak{D}$; položme $\delta = \inf_{x \in G} D(f, x)$. Potom je $D(f, x) - \delta(1 - D(1, x))$ horní funkce k f, takže $\delta = 0$ (zobecnění vztahu (9)).

19. Věta. *Buď Z isometrické zobrazení prostoru E_m na E_m; buď $G \in \mathfrak{G}$ (resp. $G \in \mathfrak{G}_0$). Potom $Z(G) \in \mathfrak{G}$ (resp. $Z(G) \in \mathfrak{G}_0$).*

(Plyne snadno ze cvič. 26 a z vět 11, 13 a 15.)

20. Lemma. *Buď M neprázdná kompaktní konvexní část E_m. Nechť existuje funkce Φ, která je spojitá v E_m, harmonická a kladná v $E_m - M$ a rovná nule na M. Potom $E_m - M \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Je-li $b \in E_m$, $\alpha \in E_1$, buď $Z_{b,\alpha}$ zobrazení, které bodu $x \in E_m$ přiřazuje bod $b + \alpha(x - b)$. Je-li tedy $b \in M$, $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, platí $Z_{b,\alpha}(M) \subset M$. Zvolme nyní $b \in H(M)$; buď $M_n = Z_{b,\alpha}(M)$ pro $\alpha = \frac{1}{n}$, $\Phi_n(x) = \Phi(b + n(x - b))$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Buď K otevřená koule o středu b a poloměru 1. Existují kladná čísla $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ taková, že pro $x \in K$ je $|\varepsilon_n \Phi_n(x)| < n^{-2}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \Phi_n(x)$ tedy konverguje stejnoměrně na množině K; buď Ψ její součet. Snadno se zjistí, že každá funkce Φ_n je harmonická a kladná na $E_m - M_n$ a tedy na $E_m - M$. Podle cvič. 24 je funkce Ψ harmonická na $K - M$. Je $\Psi(b) = 0$, funkce Ψ je spojitá na K a kladná na $K - \{b\}$; je to tedy bariéra.

21. Lemma. *Buď* $\varepsilon > 0$,

$$M = E[x; x = [x_1, \ldots, x_m] \in E_m, x_m = 0, |x| \leqq \varepsilon] .$$

Potom existuje funkce Φ, *která je spojitá v* E_m, *harmonická a kladná v* $E_m - M$ *a rovná nule na* M.

Důkaz. Položme $f(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\tau + \varepsilon^2)^{m-1}}}$ $(t \geqq 0)$, $\beta(x) = \frac{1}{2}(x^2 - \varepsilon^2 + \sqrt{(x^2 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2 x_m^2})$, $\Phi(x) = f(\beta(x))$ $(x \in E_m)$. Dokážeme, že funkce Φ má uvedené vlastnosti. Funkce Φ je zřejmě spojitá a nezáporná. Položme ještě

$$D = \sqrt{(x^2 - \varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2 x_m^2} .$$

Je-li $x_m \neq 0$, je $D > |x^2 - \varepsilon^2|$, tedy $\beta(x) > 0$. Je-li $|x| > \varepsilon$, $x_m = 0$, je $D = x^2 - \varepsilon^2$, tedy opět $\beta(x) = x^2 - \varepsilon^2 > 0$. Je-li však $x \in M$, je $x_m = 0$, $D = \varepsilon^2 - x^2$, $\beta(x) = 0$. Vidíme, že $M = E[x; \Phi(x) = 0]$. Máme ještě dokázat, že funkce Φ je harmonická na $E_m - M$. Všimněme si, že na $E_m - M$ je $D > 0$ a (píšeme-li $\beta(x) = \beta$)

$$\beta^2 + \beta(\varepsilon^2 - x^2) - \varepsilon^2 x_m^2 = 0 . \tag{10}$$

Odtud plyne (viz cvič. 6)

$$2\beta \operatorname{grad} \beta + (\varepsilon^2 - x^2) \operatorname{grad} \beta - 2\beta x - 2\varepsilon^2 x_m v = 0 ,$$

kde $v = \operatorname{grad} x_m = [0, \ldots, 0, 1]$. Protože $\beta = \frac{1}{2}(x^2 - \varepsilon^2 + D)$, je

$$2\beta + \varepsilon^2 - x^2 = D , \tag{11}$$

takže $D \operatorname{grad} \beta = 2(\beta x + \varepsilon^2 x_m v)$ a tedy

$$D \, . \, x \, . \operatorname{grad} \beta = 2(\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2) , \tag{12}$$

$$D^2(\operatorname{grad} \beta)^2 = 4(\beta^2 x^2 + 2\beta\varepsilon^2 x_m^2 + \varepsilon^4 x_m^2) . \tag{13}$$

Dále máme (viz (11)) $D(\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2) = (2\beta + \varepsilon^2 - x^2)(\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2) = 2\beta^2 x^2 + 2\beta\varepsilon^2 x_m^2 + (\varepsilon^2 - x^2)\, \beta x^2 + \varepsilon^4 x_m^2 - x^2 \varepsilon^2 x_m^2 = \beta^2 x^2 + 2\beta\, \varepsilon^2 x_m^2 + \varepsilon^4 x_m^2 + x^2[\beta^2 + \beta(\varepsilon^2 - x^2) - \varepsilon^2 x_m^2]$; protože však $[\ldots] = 0$ podle (10), je

$$D(\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2) = \beta^2 x^2 + 2\beta\varepsilon^2 x_m^2 + \varepsilon^4 x_m^2 .$$

Odtud a z (13), (12) plyne

$$D(\operatorname{grad} \beta)^2 = 4(\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2) , \tag{14}$$

$$(\operatorname{grad} \beta)^2 = 2x \, . \operatorname{grad} \beta . \tag{15}$$

Provedeme-li na rovnost (10) operátor Δ, dostaneme podle cvič. 6

$$2(\mathrm{grad}\,\beta)^2 + 2\beta\Delta\beta + \Delta\beta(\varepsilon^2 - x^2) - 2 \,.\, 2x \,.\, \mathrm{grad}\,\beta - 2m\beta - 2\varepsilon^2 = 0\,,$$

takže (viz (11), (15))

$$D\Delta\beta = 2(m\beta + \varepsilon^2)\,. \tag{16}$$

Z (10) a (14) plyne $\beta x^2 + \varepsilon^2 x_m^2 = \beta^2 + \beta\varepsilon^2$, $(\mathrm{grad}\beta)^2 = \frac{4}{D}\beta(\beta + \varepsilon^2)$ a tedy (viz cvič. 7 a vztah (16)) $\Delta\Phi = f'' \,.\, (\mathrm{grad}\,\beta)^2 + f' \,.\, \Delta\beta = \frac{2}{D}[f' \,.\, (m\beta + \varepsilon^2) + 2f'' \,.\, \beta(\beta + \varepsilon^2)]$. Protože však $f'(\beta) = (\beta(\beta + \varepsilon^2)^{m-1})^{-\frac{1}{2}}$, $f''(\beta) = -\frac{1}{2}(\ldots)^{-\frac{3}{2}} \,.\, ((\beta + \varepsilon^2)^{m-1} + \beta(m-1)(\beta + \varepsilon^2)^{m-2}) = -\frac{1}{2}(\ldots)^{-\frac{3}{2}} \,.\, (\beta + \varepsilon^2)^{m-2} \,.\, (m\beta + \varepsilon^2)$, dostáváme $\Delta\Phi = \frac{2}{D}[(\ldots)^{-\frac{1}{2}} \,.\, (m\beta + \varepsilon^2) - (\ldots)^{-\frac{3}{2}} \,.\, (\beta + \varepsilon^2)^{m-2} \,.\, (m\beta + \varepsilon^2) \,.\, \beta(\beta + \varepsilon^2)] = \frac{2}{D}[(\ldots)^{-\frac{1}{2}} \,.\, (m\beta + \varepsilon^2) - (\ldots)^{-\frac{3}{2}} \,.\, (\ldots) \,.\, (m\beta + \varepsilon^2)] = 0$. Tím je vše dokázáno.

22. Věta. *Buď R nadrovina, K uzavřená koule o středu v R. Potom je $E_m - (K \cap R) \in \mathfrak{G}$.*

Důkaz. Buď ε poloměr koule K; buď $M = E[x; x = [x_1, \ldots, x_m] \in E_m$, $x_m = 0$, $|x| \leqq \varepsilon]$. Podle lemmat 20 a 21 je $E_m - M \in \mathfrak{G}$; podle věty 19 je též $E_m - (K \cap R) \in \mathfrak{G}$.

23. Věta. *Buď G otevřená část E_m; nechť $H(G) \neq \emptyset$ a nechť ke každému $b \in H(G)$ existuje nadrovina R a uzavřená koule K o středu v R tak, že $K \cap R \cap G = \emptyset$, $b \in K \cap R$. Potom $G \in \mathfrak{G}$.*

(Plyne z lemmatu 9 a věty 22.)

24. Věta. *Buď $G_1 \in \mathfrak{G}_0$; buď $G_2 \in \mathfrak{G}$, $G_1 \subset G_2$. Potom $G_2 \in \mathfrak{G}_0$.*

Důkaz. Definujme na množině $\overline{G}_2$ funkci Φ předpisem $\Phi(x) = 1$ pro $x \in \overline{G}_2 - G_1$, $\Phi(x) = D(G_1, 1, x)$ pro $x \in G_1$. Protože $\Phi(x) = D(G_1, 1, x)$ dokonce pro každé $x \in \overline{G}_1$, je podle cvič. 27 funkce Φ spojitá na $\overline{G}_2$. Zvolme $b \in G_2$. Je-li $b \in G_2 - G_1$, je $\Phi(b) = 1$; protože $\Phi(x) \leqq 1$ na $\overline{G}_2$, je $\Phi_K(b) \leqq 1 = \Phi(b)$ pro každou kouli K, pro niž $\overline{K} \subset G_2$. Je-li však $b \in G_1$, pak pro každou dosti malou kouli K o středu b platí $\Phi_K(b) = \Phi(b)$. Funkce Φ je tedy horní funkcí k funkci identicky rovné jedné na $H(G_2)$; protože (podle věty 17) je $\inf\limits_{x \in G_1} D(G_1, 1, x) = 0$, je také $\inf\limits_{x \in G_2} \Phi(x) = 0$, takže $\inf\limits_{x \in G_2} D(G_2, 1, x) = 0$, $G_2 \in \mathfrak{G}_0$.

25. Věta. *Nechť $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Potom $G = G_1 \cup G_2 \in \mathfrak{G}$. Jestliže $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_1$, je též $G \in \mathfrak{G}_1$.*

Důkaz. Protože $\overline{G}_1 \cap G_2 = \emptyset$, je $H(G_1) \cap G_2 = \emptyset$ a tedy $H(G_1) \cap G = \emptyset$; protože $H(G_1) \subset \overline{G}_1 \subset \overline{G}$, je $H(G_1) \subset H(G)$. Podobně se zjistí, že $H(G_2) \subset H(G)$.

Buď nyní f nezáporná omezená spojitá funkce na $H(G)$. Definujme na množině $\overline{G}$ funkci F předpisem $F(x) = D(G_j, f, x)$, je-li $x \in G_j$, $F(x) = f(x)$, je-li $x \in H(G)$. Funkce F je spojitá na $\overline{G}_1$ i na $\overline{G}_2$; podle cvič. 27 je funkce F spojitá i na $\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2 = \overline{G}$, takže je nezáporným řešením Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f a množině G. Protože podle věty 15 má každá z množin $E_m - G_j$ více než jeden bod, má podle cvič. 28 také hranice každé z množin G_j a tedy i hranice množiny G více než jeden bod. Podle věty 11 je tudíž $G \in \mathfrak{G}$. Jestliže nyní $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_1$, je funkce $D(G, 1)$ rovna jedné na G_1 i na G_2 a tedy i na G; odtud plyne $G \in \mathfrak{G}_1$.

26. Věta. *Nechť $G \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$ (resp. $\mathfrak{G}_0^{m+1}$). Potom $G \in \mathfrak{G}^m$ (resp. $G \in \mathfrak{G}_0^m$).*

Důkaz. Buď f nezáporná omezená spojitá funkce na $H(G)$; položme $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) = f(x_1, \ldots, x_m)$. Potom je $\tilde{f}$ nezáporná omezená spojitá funkce na hranici množiny $U = G \times E_1$; buď $\tilde{F} = D(U, \tilde{f})$. Zvolme $y_1, y_2 \in E_1$ a položme $d = y_2 - y_1$. Funkce $\tilde{F}(x, y + d)$ $(x \in \overline{G},\ y \in E_1)$ je horní funkcí k funkci $\tilde{f}$; je tedy $\tilde{F}(x, y_1) \leqq \tilde{F}(x, y_1 + d) = \tilde{F}(x, y_2)$. Podobně se zjistí, že $\tilde{F}(x, y_2) \leqq \tilde{F}(x, y_1)$; vidíme, že existuje funkce F na množině $\overline{G}$ tak, že $\tilde{F}(x, y) = F(x)$. Protože $\dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2} = 0$, je funkce F harmonická na G; je to zřejmě řešení Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f. Má-li tedy komplement množiny G aspoň dva body, je podle věty 11 $G \in \mathfrak{G}^m$. Je-li kromě toho $G \times E_1 \in \mathfrak{G}_0^{m+1}$ a volíme-li $f(x) = 1$, existuje $b \in G$, $c \in E_1$ tak, že $\tilde{F}(b, c) < 1$ a tedy $F(b) < 1$; protože $D(G, 1) = D(G, f) \leqq F$, je také $D(G, 1, b) < 1$. Odtud plyne $G \in \mathfrak{G}_0^m$.

Případ, že by komplement množiny G obsahoval jen jeden bod, nemůže však (za předpokladu $G \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$) nastat; to dokážeme sporem. Nechť tedy $G = E_m - \{b\}$, $G \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$. Buď $L = E[x; x \in E_m, |x - b| < 1]$. Protože $L \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$, je též (podle věty 10) $(L \cap G) \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$. Protože komplement množiny $L \cap G$ obsahuje více než jeden bod, platí (podle toho, co jsme dokázali) $L \cap G \in \mathfrak{G}^m$. To však odporuje lemmatu 14; tím je vše dokázáno.

Poznámka. Je-li $G \times E_1 \in \mathfrak{G}_1^{m+1}$, je ovšem $G \in \mathfrak{G}_1^m$.

27. Věta. *Buď P poloprostor; buď $G \in \mathfrak{G}$, $G \subset P$. Potom $G \in \mathfrak{G}_1$.*

(Plyne snadno z cvič. 13 a z vět 19 a 24.)

28. Věta. *Nechť $G \in \mathfrak{G}_0$; buď $Z(x_1, \ldots, x_m) = [x_1, \ldots, x_{m-1}, -x_m]$. Potom $G \cap Z(G) \in \mathfrak{G}_0$.*

Důkaz. Buď A (resp. B) poloprostor $x_m > 0$ (resp. $x_m < 0$); buď R nadrovina $x_m = 0$. Položme $U = G - R$. Z věty 27 plyne, že není $G \subset A$; je tedy $G \cap B \neq \emptyset$, takže (viz věty 10 a 27) $G \cap B \in \mathfrak{G}_1$. Podobně se zjistí, že $G \cap A \in \mathfrak{G}_1$, a z věty 25 plyne $U = (G \cap A) \cup (G \cap B) \in \mathfrak{G}_1$.

Buď $F = D(G, 1)$. Kdyby bylo $F(x) \geqq \frac{1}{2}$ pro každé $x \in R \cap \overline{G}$, bylo by (viz (1), cvič. 3) $F(x) \geqq \frac{1}{2}$ pro každé $x \in H(G) \cup (R \cap \overline{G}) \supset H(U)$; odtud by však plynulo, že je funkce F horní funkcí vzhledem k funkci $f(x) = \frac{1}{2}$ $(x \in \in H(U))$ a množině U a že tedy platí $F(x) \geqq D(U, \frac{1}{2}, x) = \frac{1}{2}$ pro každé $x \in U \cup \cup (R \cap \overline{G}) \supset G$, což není možné podle (9) (věta 17). Existuje tedy $b \in R \cap \overline{G}$ tak, že $F(b) < \frac{1}{2}$; zřejmě $b \in G$, tedy $b \in G \cap Z(G) = V$. Definujme na množině $\overline{V}$ funkci Φ předpisem $\Phi(x) = F(x) + F(Z(x))$. Funkce Φ je harmonická na V a spojitá na $\overline{V}$; protože $H(V) \subset H(G) \cup H(Z(G))$, je $\Phi(x) \geqq 1$ pro každé $x \in H(V)$ a tedy $\Phi(x) \geqq D(V, 1, x)$ pro každé $x \in V$. Protože však $\Phi(b) < 1$, je $V \in \mathfrak{G}_0$.

29. Věta. *Nechť* $U \in \mathfrak{G}_1^m$, $U \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$, $G \in \mathfrak{G}^{m+1}$, $G \cap ((E_m - U) \times \times \langle 0, \infty)) = \emptyset$. *Potom* $G \in \mathfrak{G}_1^{m+1}$.

Důkaz. Buď $Z(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) = [x_1, \ldots, x_m, - x_{m+1}]$. Zřejmě $Z(G) \cap \cap ((E_m - U) \times (- \infty, 0\rangle) = \emptyset$, takže $G \cap Z(G) \cap ((E_m - U) \times E_1) = \emptyset$ neboli $G \cap Z(G) \subset U \times E_1$. Kdyby bylo $G \in \mathfrak{G}_0^{m+1}$, měli bychom podle vět 28, 24 a 26 postupně $G \cap Z(G) \in \mathfrak{G}_0^{m+1}$, $U \times E_1 \in \mathfrak{G}_0^{m+1}$ a konečně $U \in \mathfrak{G}_0^m$ proti předpokladu.

30. Věta. *Buď G otevřená část* E_m, $H = H(G) \neq \emptyset$. *Nechť ke každému* $b \in H$ *existuje nadrovina R a uzavřená koule K se středem v R tak, že* $b \in K \cap R$, $K \cap R \cap G = \emptyset$. *Potom* $G \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$.

Důkaz. Zvolme $d \in H(G \times E_1)$, $d = [b, c]$, kde $b \in H$, $c \in E_1$. Sestrojme k bodu b podle předpokladů věty nadrovinu R a kouli K; položme $S = R \times E_1$. Buď $K = E[x; x \in E_m, |x - s| \leqq \delta]$, $t = [s, c]$, $L = E[x; x \in E_{m+1}, |x - t| \leqq \delta]$. Potom je L koule se středem v nadrovině S; snadno se zjistí, že $d \in L \cap S$, $L \cap S \cap (G \times E_1) = \emptyset$. Podle věty 23 je $G \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$.

31. Věta. *Buď C úsečka v* E_2; *nechť* $G \in \mathfrak{G}^3$, $G \cap (C \times \langle 0, \infty)) = \emptyset$. *Potom* $G \in \mathfrak{G}_1^3$.

Důkaz. Úsečka v E_2 je zřejmě průnikem nadroviny (= přímky) s koulí (= kruhem) se středem v této nadrovině. Podle věty 30 je $(E_2 - C) \times E_1 \in \mathfrak{G}^3$. Protože $\mathfrak{G}_0^2 = \emptyset$ (viz cvič. 12), je podle věty 26 $(E_2 - C) \times E_1 \in \mathfrak{G}_1^3$. Podle věty 29, kde píšeme $U = E_2 - C$, je tudíž $G \in \mathfrak{G}_1^3$.

Poznámka. Ty regulární množiny s neomezeným komplementem, s nimiž se setkáváme při konkretním řešení trojrozměrné Dirichletovy úlohy, patří podle vět 31 a 19 zpravidla do $\mathfrak{G}_1^3$. To znamená zejména, jak víme, že ke každé funkci, spojité a omezené na hranici takové množiny, existuje právě jedno omezené řešení příslušné Dirichletovy úlohy.

32. Věta. *Pro každou množinu* $G \in \mathfrak{G}$ *jsou správná tato tvrzení:*

a) *Jestliže* $f, g \in \mathfrak{D}$, *je* $f + g \in \mathfrak{D}$ *a*

$$D(f + g) = D(f) + D(g) .$$

b) *Jestliže* $f \in \mathfrak{D}$, $c \in E_1$, *je* $cf \in \mathfrak{D}$ *a*

$$D(cf) = cD(f) .$$

c) *Jestliže* $f, g \in \mathfrak{D}$, $f \leqq g$, *je*

$$D(f) \leqq D(g)\,.$$

d) *Jestliže* f *je spojitá funkce na* $H(G)$, $g \in \mathfrak{D}$, $|f| \leqq g$, *je* $f \in \mathfrak{D}$ *a*

$$|D(f)| \leqq D(g)\,.$$

Důkaz. Buďte napřed f, g nezáporné funkce z $\mathfrak{D}$. Potom je $D(f) + D(g)$ horní funkce k $f + g$, takže $D(f) + D(g) \geqq D(f + g)$. Protože $D(f + g)$ je horní funkce k f, je $D(f + g) \geqq D(f)$; vidíme, že $D(f + g) - D(f)$ je horní funkcí k funkci g. Odtud plyne $D(f + g) - D(f) \geqq D(g)$, $D(f + g) \geqq D(f) + D(g)$. Tvrzení a) je tedy v našem případě správné.

Buďte nyní f, g libovolné funkce z $\mathfrak{D}$. Definujme funkce φ, ψ předpisem $(f + g)_+ + \varphi = f_+ + g_+$, $(f + g)_- + \psi = f_- + g_-$. Odečtením těchto rovností dostaneme vztah $\varphi = \psi$. Zřejmě $\varphi \geqq 0$, $\varphi \in \mathfrak{D}$. Je $D(f + g) = D((f + g)_+) - D((f + g)_-) = D((f + g)_+) + D(\varphi) - (D((f + g)_-) + D(\psi))$; podle toho, co jsme již dokázali, je tedy $D(f + g) = D((f + g)_+ + \varphi) - D((f + g)_- + \psi) = D(f_+) + D(g_+) - (D(f_-) + D(g_-)) = D(f) + D(g)$. Tím je úplně dokázáno tvrzení a). Důkaz tvrzení b) a c) lze přenechat čtenáři. Platí-li nyní předpoklady tvrzení d), je zřejmě $f \in \mathfrak{D}$, $-g \leqq f \leqq g$, tedy $D(f) \leqq D(g)$, $D(-g) \leqq D(f)$, $D(g) \geqq -D(f)$, takže opravdu $|D(f)| \leqq D(g)$.

33. Věta. *Buď* $G \in \mathfrak{G}^m$, $f \in \mathfrak{D}$, $H = H(G)$. *Potom platí*

$$\sup_{x \in G} |x|^{m-2} \,.\, |D(f, x)| = \sup_{x \in H} |x|^{m-2} \,.\, |f(x)|\,, \tag{17}$$

$$\sup_{x \in G} |D(f, x)| = \sup_{x \in H} |f(x)|\,. \tag{18}$$

Důkaz. Buď napřed funkce f nezáporná. Není-li funkce $|x|^{m-2} \,.\, f(x)$ omezená, je vztah (17) zřejmě správný; buď tedy $\sup\limits_{x \in H} |x|^{m-2} \,.\, f(x) = s < \infty$. Potom existuje číslo c tak, že $f(x) < c$ pro všechna $x \in H$. Snadno se zjistí (viz odst. 3, 4), že funkce $\Phi(x) = \min(c, s \,.\, |x|^{2-m})$ $(\Phi(0) = c)$ je horní funkcí k funkci f. Pro každé $x \in G$ je tedy $D(f, x) \leqq \Phi(x)$, takže $|x|^{m-2} \,.\, D(f, x) \leqq s$. Odtud plyne ihned, že (17) platí pro každou nezápornou funkci $f \in \mathfrak{D}$.

Buď nyní f libovolná funkce z $\mathfrak{D}$. Podle 32, d) je $|D(f)| \leqq D(|f|)$; podle toho, co jsme dokázali, je tedy $\sup\limits_{x \in G} |x|^{m-2} \,.\, |D(f, x)| \leqq \sup\limits_{x \in G} |x|^{m-2} \,.\, D(|f|, x) \leqq \sup\limits_{x \in H} |x|^{m-2} \,.\, |f(x)|$. Odtud snadno plyne (17). Důkaz vztahu (18) lze přenechat čtenáři.

34. Věta. *Buď* $m > 2$, $G \in \mathfrak{G}^m$, $H = H(G)$, $f \in \mathfrak{D}$; *nechť* $f(x) \to 0$ *pro* $x \in H$, $|x| \to \infty$. *Potom platí* $D(f, x) \to 0$ *pro* $x \in G$, $|x| \to \infty$.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že funkce f je nezáporná. Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $g(x) = \max(f(x) - \varepsilon, 0)$ $(x \in H)$. Existuje koule K tak, že $g(x) = 0$ pro každé $x \in H - K$; funkce $|x|^{m-2} \,.\, g(x)$ $(x \in H)$ je tedy omezená. Podle (17) je také funkce $|x|^{m-2} \,.\, D(g, x)$ $(x \in G)$ omezená, takže $D(g, x) \to 0$ pro $x \in G$, $|x| \to \infty$. Protože však $f(x) \leqq g(x) + \varepsilon$ $(x \in H)$, je funkce $D(g, x) + \varepsilon$ $(x \in \overline{G})$ horní funkcí k f; odtud plyne $D(f, x) \leqq D(g, x) + \varepsilon$ $(x \in G)$ a tedy také $D(f, x) \to 0$ pro $x \in G$, $|x| \to \infty$.

35. Věta. *Buď G regulární množina s omezeným komplementem; buď f spojitá funkce na hranici H množiny G. Potom existují čísla c, d tak, že pro každé $x \in G$, $x \neq 0$ je*

$$\left| \frac{c}{|x|^{m-2}} - D(f, x) \right| < \frac{d}{|x|^{m-1}} \,.$$

Důkaz. Buď K otevřená koule o středu v počátku a poloměru R; nechť $K \supset E_m - G$. Definujme na množině $H(K)$ funkci g předpisem $g(x) = D(G, f, x)$. Podle cvič. 10 je funkce

$$F(x) = \frac{R^{m-2}}{|x|^{m-2}} \,.\, D\left(K, g, x \,.\, \frac{R^2}{x^2}\right) \quad (x \in E_m - K)$$

řešením Dirichletovy úlohy pro funkci g a množinu $E_m - \overline{K}$; touž vlastnost má i funkce $D(G, f, x)$ $(x \in E_m - K)$. Funkce $|x|^{m-2} \,.\, F(x)$ je zřejmě omezená; funkce $|x|^{m-2} \,.\, D(G, f, x)$ je omezená podle (17) (věta 33). Podle cvič. 12 je tedy $F(x) = D(G, f, x)$ pro každé $x \in E_m - K$.

Buď nyní $c_0 = D(K, g, 0)$. Na množině $\overline{K}$ existuje omezená funkce φ tak, že $D(K, g, x) = c_0 + |x| \,.\, \varphi(x)$ pro každé $x \in \overline{K}$. Pro x non $\in K$ potom platí $D(G, f, x) = F(x) = \dfrac{R^{m-2}}{|x|^{m-2}} \left(c_0 + \dfrac{R^2}{|x|} \,.\, \varphi\left(x \,.\, \dfrac{R^2}{x^2}\right)\right)$; píšeme-li ještě $c = R^{m-2} \,.\, c_0$ a je-li $|\varphi(x)| < d_0$ pro $x \in \overline{K}$, platí pro x non $\in K$ vztah

$$\big| |x|^{m-1} \,.\, D(G, f, x) - c|x| \big| < R^m \,.\, d_0 \,.$$

Protože však levá strana této nerovnosti je omezená na množině $G \cap K$, existuje d tak, že je

$$\big| |x|^{m-1} \,.\, D(G, f, x) - c|x| \big| < d$$

pro všechna $x \in G$; odtud plyne ihned tvrzení věty.

Poznámka. Zřejmě $|x|^{m-2} D(f, x) \to c$ pro $|x| \to \infty$.

36. Z věty 35 snadno plyne, že pro $m > 2$ patří do $\mathfrak{G}_0$ každá množina $G \in \mathfrak{G}$ s omezeným komplementem. Nyní ukážeme, že i množina s neomezeným komplementem může patřit do $\mathfrak{G}_0$. Příklad (v E_3): Buď $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, kde B_n je uzavřená koule o středu $s_n = [0, 0, n^3]$ a poloměru n; buď $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$. Pro $x \in G_0 = E_m - S$ položme $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{|x - s_n|}$. Je-li $x \in G_0$, $|s_{n_0}| > 2|x|$, pak pro každé $n \geqq n_0$ platí $|x - s_n| > \dfrac{1}{2}|s_n|$, tedy $\dfrac{n}{|x - s_n|} < \dfrac{2n}{|s_n|} = \dfrac{2}{n^2}$. Řada, definující funkci F, konverguje tedy na množině G_0 lokálně stejnoměrně.

Je-li $x = [x_1, x_2, x_3]$, kde $x_3 \leqq 0$, je $\frac{n}{|x - s_n|} \leqq \frac{1}{n^2}$; v poloprostoru $x_3 \leqq 0$ konverguje tedy řada dokonce stejnoměrně. Odtud snadno plyne, že funkce F je harmonická na množině $G = E_3 - B$, spojitá na $\overline{G}$ a splňuje vztah $F(x) \to \to 0$ pro $|x| \to \infty$, $x_3 \leqq 0$. Na hranici množiny G je však zřejmě $F(x) > 1$, takže $F \geqq D(G, 1)$, $\inf_{x \in G} D(G, 1, x) = 0$, $G \in \mathfrak{G}_0$.

37. Věta. *Nechť $G \in \mathfrak{G}$; buďte $G_1, G_2, \ldots$ takové otevřené množiny, že $G_1 \subset \subset G_2 \subset \ldots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset \overline{G}$ a že $G \cap G_n \in \mathfrak{G}$ pro každé n. Buď $f \in \mathfrak{D}(G)$; buďte $f_1, f_2, \ldots$ spojité funkce na množině $H = H(G)$, které mají tyto vlastnosti:*

$$|f_1(x)| \leqq |f_2(x)| \leqq \ldots, \; f_n(x) \,.\, f(x) \geqq 0, \; f_n(x) \to f(x) \text{ pro každé } x \in H; \tag{19}$$

$$f_n(x) = 0 \text{ pro každé } x \in H - G_n \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{20}$$

Každému přirozenému n přiřaďme funkci g_n definovanou na množině $A_n = = H(G \cap G_n)$ předpisem

$$g_n(x) = f_n(x) \quad (x \in A_n \cap H)\,, \tag{21}$$

$$g_n(x) = 0 \quad (x \in A_n - H)\,. \tag{22}$$

Potom je $g_n \in \mathfrak{D}(G \cap G_n)$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a platí

$$D(G \cap G_n, g_n, x) \to D(G, f, x) \tag{23}$$

pro každé $x \in \overline{G}$.

Důkaz. Předpokládejme napřed, že funkce f je nezáporná (a tedy $0 \leqq f_1(x) \leqq \leqq f_2(x) \leqq \ldots$). Zvolme index n a položme $C = A_n \cap H$, $D = A_n \cap H(G_n)$. Podle (21) je funkce g_n spojitá na množině C. Buď nyní $x \in D$. Je-li $x \in H$, je podle (20), (21) $g_n(x) = 0$; jestliže však x non $\in H$, je podle (22) opět $g_n(x) = 0$. Protože množiny C, D jsou uzavřené a protože $A_n = C \cup D$ (jak plyne ze vztahu (1), cvič. 3), je podle cvič. 27 funkce g_n spojitá také na množině A_n. Z (21), (22) plyne, že $g_n(x) \leqq D(G, f, x)$ pro každé $x \in A_n$; je tedy $g_n \in \mathfrak{D}(G \cap \cap G_n)$. Položme $F_n = D(G \cap G_n, g_n)$, $F = D(G, f)$.

Zvolme bod $x \in A_n$ a index $p > n$. Jestliže $x \in G$, je $g_n(x) = 0 \leqq F_p(x)$; není-li $x \in G$, je ovšem $x \in \overline{G \cap G_n} - G \subset \overline{G \cap G_p} - G \subset A_p$ a podle (19), (21) je opět $g_n(x) \leqq g_p(x) = F_p(x)$. Odtud plyne, že na množině $\overline{G} \cap \overline{G_n}$ platí $F_n(x) \leqq F_p(x) \leqq F(x)$.

Buď x libovolný bod množiny $\overline{G}$. Protože $\overline{G} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, existuje index n tak, že $x \in \overline{G} \cap G_n$; podle (2) (cvič. 3) je

$$\overline{G} \cap G_n \subset \overline{G \cap G_n} \tag{24}$$

a tedy $x \in \overline{G \cap G_n}$. Na množině $\overline{G}$ můžeme proto definovat funkci Φ předpisem

$$\Phi(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x)$$

(při libovolném $x \in \overline{G}$ je posloupnost $\{F_n(x)\}$ definována pro všechna dosti velká n a je monotonní); zřejmě

$$\Phi \leqq F\,. \tag{25}$$

Protože je posloupnost funkcí F_n omezená v okolí každého bodu množiny G, je podle cvič. 24 funkce Φ harmonická na G.

Buď nyní $b \in H$, $\varepsilon > 0$; nechť $b \in G_n$. Je-li $p > n$, je podle (24) $b \in \overline{G \cap G_n} - G \subset A_p$, tedy $F_p(b) = f_p(b)$. Protože $f_p(b) \to f(b)$, existuje $p > n$ tak, že $F_p(b) > f(b) - \varepsilon$. Protože funkce F_p je spojitá na $\overline{G \cap G_n}$, je podle (24) spojitá i na $G_n \cap \overline{G}$; existuje tedy okolí U bodu b tak, že

$$F_p(x) > f(b) - \varepsilon$$

pro všechna $x \in U \cap (G_n \cap \overline{G}) = V \cap \overline{G}$, kde $V = U \cap G_n$. Protože $F(b) = f(b)$, existuje takové okolí W bodu b, že pro každé $x \in W \cap \overline{G}$ je

$$F(x) < f(b) + \varepsilon\,.$$

Pro všechna $x \in (V \cap W) \cap \overline{G}$ je potom

$$f(b) - \varepsilon < F_p(x) \leqq \Phi(x) \leqq F(x) < f(b) + \varepsilon\,.$$

Vidíme, že $\Phi(b) = f(b)$ a že funkce Φ je spojitá v bodě b vzhledem k množině $\overline{G}$.

Tím jsme dokázali, že Φ je horní funkcí k funkci f a že tedy $\Phi \geqq F$. Odtud a z (25) plyne (23). Pro libovolnou funkci $f \in \mathfrak{D}(G)$ dokážeme větu rozkladem funkce f na rozdíl $f_+ - f_-$.

Poznámka. V této větě můžeme množiny G_n a funkce f_n volit na př. takto: Buď $b \in G$; buď G_n koule o středu b a poloměru n. Dále buď $\psi_n(t) = 1$ pro $0 \leqq t \leqq n - 1$, $\psi_n(t) = 0$ pro $t \geqq n$ a funkce ψ_n buď lineární v intervalu $\langle n - 1, n\rangle$; položme $f_n(x) = f(x) \,.\, \psi_n(|x - b|)$. Věta potom říká, že řešení Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f a množině G, lze přibližně vyjádřit řešením Dirichletovy úlohy, příslušným k funkci g_n a množině $G \cap G_n$. Důležité je přitom, že množina $G \cap G_n$ je (v tomto případě) omezená; pro omezené množiny platí totiž věta o unicitě řešení a jsou též známy různé přibližné metody k jeho nalezení.

38. Lemma. *Buď $G \in \mathfrak{G}$, $f, f_1, f_2, \ldots \in \mathfrak{D}$; nechť $f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \ldots$, $f_n(x) \to f(x)$ pro každé $x \in H(G)$. Potom platí $D(f_n, x) \to D(f, x)$ pro každé $x \in \overline{G}$.*

Důkaz. Předpokládejme napřed, že funkce f_1 je nezáporná. Položíme-li v předešlé větě $G_n = E_m$ $(n = 1, 2, \ldots)$, bude $g_n = f_n$ a podle (23) dostaneme $D(f_n, x) \to D(f, x)$ $(x \in \overline{G})$. Vynechme nyní předpoklad, že funkce f_1 je nezáporná, a pišme $\varphi_n = f_n - f_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\varphi = f - f_1$. Podle toho, co jsme dokázali (a podle věty 32), je $D(\varphi_n, x) \to D(\varphi, x)$ a tedy $D(f_n, x) = D(\varphi_n, x) + D(f_1, x) \to D(\varphi, x) + D(f_1, x) = D(f, x)$ pro každé $x \in \overline{G}$.

39. Věta. *Buď $G \in \mathfrak{G}$; buďte $f, f_1, f_2, \ldots$ spojité funkce na hranici H množiny G. Nechť $f_n(x) \to f(x)$ pro každé $x \in H$ a nechť všechny funkce $|f_1|, |f_2|, \ldots$ mají společnou horní funkci. Potom platí $D(f_n, x) \to D(f, x)$ pro každé $x \in \overline{G}$.*

Důkaz. Buď Φ společná horní funkce k funkcím $|f_n|$. Položíme-li $\varphi(x) = \Phi(x)$ pro $x \in H$, je zřejmě $\varphi \in \mathfrak{D}$. Zvolme bod $b \in \overline{G}$ a definujme na systému $\mathfrak{D}$ funkcionál J předpisem $J(g) = D(g, b)$. Funkcionál J je podle předešlého lemmatu spojitý vzhledem k monotonní konvergenci v prostoru $\mathfrak{D}$. Protože $|f_n(x)| \leqq \varphi(x)$, $f_n(x) \to f(x)$ pro každé $x \in H$, platí také (viz na př. [4], str. 183) $J(f_n) \to J(f)$ neboli $D(f_n, b) \to D(f, b)$.

Poznámka. Je-li konvergence $f_n(x) \to f(x)$ stejnoměrná na množině H, je konvergence $D(f_n, x) \to D(f, x)$ stejnoměrná na množině $\overline{G}$ (to plyne ihned z (18), věta 33).

40. Buď $G \in \mathfrak{G}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $F_1, F_2, \ldots$ je *přípustná* (vzhledem k množině G), jestliže platí:

1. Funkce F_n jsou spojité na $\overline{G}$ a harmonické na G;
2. funkce $|x|^{m-2} . F_n(x)$ jsou omezené;
3. existuje funkce Φ, která je spojitá na $\overline{G}$, superharmonická na G a která pro každé $x \in \overline{G}$ a každé n splňuje vztah $\Phi(x) \geqq |F_n(x)|$;
4. pro každé $x \in \overline{G}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$.

Dále buď $\mathfrak{M}$ systém všech funkcí F tvaru $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$ $(x \in \overline{G})$, kde F_n je přípustná posloupnost.

41. Věta. *Buď $G \in \mathfrak{G}$, $H = H(G)$; buď $f \in \mathfrak{D}$. Potom existuje právě jedna funkce $F \in \mathfrak{M}$, která se na množině H shoduje s funkcí f; je to funkce $F = D(f)$.*

Důkaz. Buďte $\psi_1, \psi_2, \ldots$ funkce z poznámky k větě 37; položme $g_n(x) = \psi_n(|x|) . f(x)$ $(x \in H,\ n = 1, 2, \ldots)$. Podle (17) (věta 33) jsou funkce $|x|^{m-2} . D(g_n, x)$ omezené. Protože $f \in \mathfrak{D}$, existuje k funkci $|f|$ horní funkce Φ; je pak zřejmě $|g_n(x)| \leqq \Phi(x)$ $(x \in H)$, tedy $|D(g_n, x)| \leqq \Phi(x)$ pro každé $x \in \overline{G}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Protože $g_n(x) \to f(x)$ $(x \in H)$, je podle věty 39 $D(g_n, x) \to D(f, x)$ $(x \in \overline{G})$. Funkce $D(g_n)$ tvoří tedy přípustnou posloupnost s limitou $D(f)$.

Nechť naopak $F \in \mathfrak{M}$, $F(x) = f(x)$ pro každé $x \in H$; nechť $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$ $(x \in \overline{G})$, kde F_n je přípustná posloupnost. Definujme na množině H funkce f_n předpisem $f_n(x) = F_n(x)$. Protože funkce $|x|^{m-2} . F_n(x)$ jsou omezené, jsou podle (17) (věta 33) také funkce $|x|^{m-2} . D(f_n, x)$ omezené; podle cvič. 12 je tedy $F_n = D(f_n)$. Protože $f_n(x) \to f(x)$ $(x \in H)$ a protože funkce f_n mají společnou horní funkci, je podle věty 39 $F_n(x) = D(f_n, x) \to D(f, x)$ $(x \in \overline{G})$, tedy $F = D(f)$.

LITERATURA

[1] *V. Jarník:* Diferenciální počet, Praha 1953.

[2] *V. Jarník:* Integrální počet II, Praha 1955.

[3] *I. G. Petrovskij:* Parciální diferenciální rovnice, Praha 1952.

[4] *J. Mařík:* Lebesgueův integrál v abstraktních prostorech, Časopis pro pěst. mat., *76* (1951), 175—194.

Резюме

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага.

(Поступило в редакцию 23/V 1956 г.)

Пусть G — открытая часть m-мерного евклидова пространства E_m, $\emptyset \neq G \neq E_m$; пусть f — (конечная вещественная) непрерывная функция на множестве $H(G)$. ($H(G)$ — граница, $\overline{G}$ — замыкание множества G.) Если функция F непрерывна в $\overline{G}$, гармонична в G и равна f на $H(G)$, то скажем, что F — решение задачи Дирихле, соответствующей функции f и множеству G. Если множество G ограничено, существует не более чем одна такая функция F. Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — система всех непустых открытых ограниченных множеств $G \subset E_m$ таких, что для каждой непрерывной функции на $H(G)$ существует решение задачи Дирихле; пусть, далее, $\mathfrak{G}^m = \mathfrak{G}$ — система всех $G \subset E_m$ $(G \neq E_m)$, обладающих тем свойством, что $G \cap K \in \mathfrak{g}$ для всякой достаточно большой открытой сферы K с центром в начале координат. Если $G \in \mathfrak{G}$, пусть $\mathfrak{D}(G)$ — множество тех функций f, непрерывных на $H(G)$, которые обладают следующим свойством: Существует неотрицательная непрерывная в $\overline{G}$ функция F, гармоническая в G и удовлетворяющая соотношению $F(x) \geqq |f(x)|$ для всякого $x \in H(G)$.

Нетрудным следствием теоремы 13 является следующее предложение: *Для каждой неотрицательной функции $f \in \mathfrak{D}(G)$ $(G \in \mathfrak{G})$ существует наименьшее неотрицательное решение соответствующей задачи Дирихле.*

Это решение обозначим символом $D(G, f)$ и для произвольной функции $f \in \mathfrak{D}(G)$ положим $D(G, f) = D(f) = D(G, f_+) - D(G, f_-)$, где $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$. Функция $D(f)$ является, очевидно, решением соответствующей задачи Дирихле. Вместо $(D(f))(x)$ пишем $D(f, x)$ $(x \in \overline{G})$. — Теорема 23 утверждает:

Пусть $G \subset E_m$ открыто, $0 \neq G \neq E_m$. Предположим, что для всякого $b \in H(G)$ существует гиперплоскость R и замкнутая сфера K с центром в R так, что $b \in R \cap K$ и что $R \cap K \cap G = \emptyset$. Тогда $G \in \mathfrak{G}$.

Пусть теперь $\mathfrak{G}_1^m = \mathfrak{G}_1$ — система тех $G \in \mathfrak{G}$, для которых $D(G, 1, x) = 1$ $(x \in G)$; далее положим $\mathfrak{G}_0^m = \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_1$. Из упражнения 12 следует, что $\mathfrak{G}_1^2 = \mathfrak{G}^2$; всякое ограниченное множество $G \in \mathfrak{G}^m$ является, очевидно, элементом $\mathfrak{G}_1^m$ (m произвольно). Если $m > 2$, тогда каждое множество $G \in \mathfrak{G}$ с ограниченным дополнением принадлежит $\mathfrak{G}_0^m$ (см. теорему 35). — Из отделов 17—19, 24—31 следует:

Если $G \in \mathfrak{G}_0$, то $\inf\limits_{x \in G} D(f, x) = 0$ *для всякой неотрицательной функции $f \in \mathfrak{D}(G)$.*

Если $G \in \mathfrak{G}_1$, *то для каждой ограниченной непрерывной на* $H(G)$ *функции* f *существует точно одно ограниченное решение* F *задачи Дирихле; имеем* $F = D(f)$.

Пусть φ — *изометрическое отображение пространства* E_m *в* E_m. *Если* $G \in \mathfrak{G}$ (*соотв.* $G \in \mathfrak{G}_0$), *то и* $\varphi(G) \in \mathfrak{G}$ (*соотв.* $\varphi(G) \in \mathfrak{G}_0$).

Если $G_1 \in \mathfrak{G}_0$, $G_2 \in \mathfrak{G}$, $G_1 \subset G_2$, *то* $G_2 \in \mathfrak{G}_0$.

Предположим, что $U \in \mathfrak{G}^m$ *и что для всякого* $b \in H(U)$ *существует гиперплоскость* R *и замкнутая сфера* K *с центром в* R *так, что* $b \in R \cap K$ *и что* $R \cap K \cap G = \emptyset$. *Тогда* $U \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$. *Если, далее,* $U \in \mathfrak{G}_1^m$, $A = E_m - U$,*) $G \in \mathfrak{G}^{m+1}$, $G \cap (A \times \langle 0, \infty)) = \emptyset$, *то* $G \in \mathfrak{G}_1^{m+1}$.

Теорема 37 имеет следующий наглядный смысл:

Предположим, что $G \in \mathfrak{G}$ *и что* $f \in \mathfrak{D}(G)$. *Пусть* K — *большая открытая сфера; пусть* g — *непрерывная функция на* $H(K \cap G)$, *которая равна нулю на* $H(K)$ *и приблизительно равна* f *на* $H(G)$. *Тогда функция* $D(K \cap G, g)$ *приблизительно равна* $D(G, f)$ *на множестве* $\overline{K \cap G}$.

Теорема 39 утверждает, что зависимость $D(f)$ от f непрерывна:

Если $G \in \mathfrak{G}$, $f, f_0, f_1, \ldots \in \mathfrak{D}(G)$ *и если* $f_n(x) \to f_0(x)$, $|f_n(x)| \leqq f(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *для всякого* $x \in H(G)$, *то* $D(f_n, x) \to D(f_0, x)$ *для всякого* $x \in \overline{G}$.

Отдел 40 содержит определение системы $\mathfrak{M}$, элементы которой — функции на множестве $\overline{G}$ ($G \in \mathfrak{G}$), обладающей следующим свойством: *Для каждого* $f \in \mathfrak{D}(G)$ *существует точно одно решение задачи Дирихле* F *такое, что* $F \in \mathfrak{M}$; *имеем* $F = D(f)$.

Summary

THE DIRICHLET PROBLEM

JAN MAŘÍK, Praha.

(Received May 23, 1956.)

Let G be an open subset of the m-dimensional Euclidean space E_m, $\emptyset \neq G \neq E_m$; let f be a (finite real) continuous function on $H(G)$. ($H(G)$ is the boundary, $\overline{G}$ is the closure of G.) If a function F is continuous on $\overline{G}$, harmonic on G and equal to f on $H(G)$, we say that F is a solution of the Dirichlet problem corresponding to the function f and the set G. If G is bounded, then there

*) Если, напр., $m = 2$ и если A — сегмент, то множество $U = E_2 - A$ удовлетворяет всем предположениям.

exists at most one such function F. Let $\mathfrak{g}$ be the system of all non-empty bounded open sets $G \subset E_m$ such that for each continuous function on $H(G)$ there exists a solution of the Dirichlet problem; further, let $\mathfrak{G}^m = \mathfrak{G}$ be the system of all $G \subset E_m$ $(G \neq E_m)$ such that $G \cap K \in \mathfrak{g}$ for each sufficiently large open sphere K with center 0. If $G \in \mathfrak{G}$, let $\mathfrak{D}(G)$ be the family of all functions f which are continuous on $H(G)$ and which have the following property: There exists a non-negative function F, which is continuous on $\overline{G}$, harmonic on G and which fulfils the relation $F(x) \geqq |f(x)|$ for each $x \in H(G)$. The following assertion is an easy consequence of Theorem 13:

For each non-negative function $f \in \mathfrak{D}(G)$ $(G \in \mathfrak{G})$ there exists a smallest non-negative solution of the Dirichlet problem.

We denote this solution by $D(G, f)$ and for an arbitrary $f \in \mathfrak{D}(G)$ put $D(G, f) = D(f) = D(f_+) - D(f_-)$, where $f_+(x) = \max(f(x), 0)$, $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$. The function $D(f)$ is evidently a solution of the corresponding Dirichlet problem; the values of $D(f)$ will be denoted by $D(f, x)$. — Theorem 23 asserts:

Let G be open in E_m, $\emptyset \neq G \neq E_m$. Suppose that there exists, for each $b \in H(G)$, a hyperplane R and a closed sphere K with center in R such that $b \in R \cap K$, $R \cap K \cap G = \emptyset$. Then $G \in \mathfrak{G}$.

Now let $\mathfrak{G}_1^m = \mathfrak{G}_1$ be the system of all $G \in \mathfrak{G}$ such that $D(G, 1, x) = 1$ $(x \in G)$; further put $\mathfrak{G}_0^m = \mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_1$. In accordance with Exercise 12 we have $\mathfrak{G}_1^2 = \mathfrak{G}^2$; each bounded set $G \in \mathfrak{G}^m$ (m arbitrary) evidently belongs to $\mathfrak{G}_1^m$. If $m > 2$, then, according to Theorem 35, each set $G \in \mathfrak{G}^m$ with bounded complement belongs to $\mathfrak{G}_0^m$. — According to Sections 17—19 and 24—31, the following theorems hold:

If $G \in \mathfrak{G}_0$, then $\inf\limits_{x \in G} D(f, x) = 0$ for each non-negative function $f \in \mathfrak{D}(G)$.

If $G \in \mathfrak{G}_1$, then there exists, for each bounded continuous function f on $H(G)$, a unique bounded solution F of the corresponding Dirichlet problem, namely $F = D(f)$.

Let φ be an isometrical mapping of E_m into E_m. If $G \in \mathfrak{G}$ (resp. $G \in \mathfrak{G}_0$), then $\varphi(G) \in \mathfrak{G}$ (resp. $\varphi(G) \in \mathfrak{G}_0$).

If $G_1 \in \mathfrak{G}_0$, $G_2 \in \mathfrak{G}$, $G_1 \subset G_2$, then $G_2 \in \mathfrak{G}_0$.

Suppose that $U \in \mathfrak{G}^m$ and that there exists, for each $b \in H(U)$, a hyperplane R and a closed sphere K with center in R such that $b \in R \cap K$, $R \cap K \cap U = \emptyset$. Then $U \times E_1 \in \mathfrak{G}^{m+1}$. If, moreover, $U \in \mathfrak{G}_1^m$, $A = E_m - U$,) $G \in \mathfrak{G}^{m+1}$, $G \cap (A \times \langle 0, \infty)) = \emptyset$, then $G \in \mathfrak{G}_1^{m+1}$.*

Theorem 37 has the following intuitive sense:

Suppose that $G \in \mathfrak{G}$ and that $f \in \mathfrak{D}(G)$. Let K be a large open sphere; let g be a continuous function on $H(K \cap G)$, which vanishes on $H(K)$ and approximately

*) If, for example, $m = 2$ and if A is a segment, then the set $U = E_2 - A$ fulfils all the conditions.

equals f on $H(G)$. Then the function $D(K \cap G, g)$ is approximately equal to $D(G, f)$ on the set $\overline{K \cap G}$.

Theorem 39 asserts that $D(f)$ depends continuously on f:

If $G \in \mathfrak{G}$, $f, f_0, f_1, \ldots \in \mathfrak{D}(G)$ and if $f_n(x) \to f_0(x)$, $|f_n(x)| \leqq f(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ for each $x \in H(G)$, then $D(f_n, x) \to D(f_0, x)$ for each $x \in \overline{G}$.

Section 40 contains the definition of a system $\mathfrak{M}$, the elements of which are functions on $\overline{G}$ $(G \in \mathfrak{G})$ and which has the following property: *For each $f \in \mathfrak{D}(G)$ there exists a unique solution F of the corresponding Dirichlet problem such that $F \in \mathfrak{M}$, namely $F = D(f)$.*

KŘIVKY V PROSTORECH MINKOWSKÉHO

VÁCLAV VILHELM, Praha.

(Došlo dne 30. května 1956.)

DT: 513.732
513.82

Práce se zabývá theorií křivek v prostorech Minkowského. Základní roli tu hraje skalární součin (a, b) vektorů a, b v prostoru Minkowského. Tento součin není obecně komutativní a je distributivní jen zprava, t. j. platí jen $(a, \alpha b + \beta c) = \alpha(a, b) + \beta(a, c)$. Práce je zaměřena k tomu, aby dosažené výsledky měly jednoduchou a názornou geometrickou interpretaci.

1. n-rozměrný prostor Minkowského

Úkolem tohoto odstavce je zavedení pojmů, jichž budeme v dalším užívat.

Definice 1.1. *Buď E_n n-rozměrný aritmetický eukleidovský prostor, ϱ jeho obvyklá metrika, $o = (0, 0, \dots, 0)$ počátek. Buď K ryze konvexní*) omezená uzavřená množina v E_n obsahující počátek o jakožto svůj vnitřní bod. Buď H hranice K. Nechť $x \in E_n$, $x \neq o$. Označme $\xi(x)$ průsečík polopřímky ox (vycházející z o a jdoucí bodem x) s H. Položme*

$$F(x) = \frac{\varrho(o, x)}{\varrho(o, \xi(x))}, \quad F(o) = 0 .$$

V E_n definujme novou metriku σ předpisem $x, y \in E_n \Rightarrow \sigma(x, y) = F(y - x)$. Pak prostor E_n s (obecně nesymetrickou) metrikou σ nazveme aritmetickým n-rozměrným prostorem Minkowského $E_n(\sigma)$. Prostor M s metrikou $\bar{\sigma}$ splňující axiomy 1° $\bar{\sigma}(x, y) > 0$ pro $x \neq y$, 2° $\bar{\sigma}(x, x) = 0$, 3° $\bar{\sigma}(x, z) \leqq \bar{\sigma}(x, y) + \bar{\sigma}(y, z)$ nazveme pak n-rozměrným prostorem Minkowského, existuje-li zobrazení f prostoru M na nějaký n-rozměrný aritmetický prostor Minkowského $E_n(\sigma)$ tak, že

$$x, y \in M \Rightarrow \bar{\sigma}(x, y) = \sigma[f(x), f(y)] . \tag{1}$$

Dvojici $(E_n(\sigma); f)$ budeme nazývat representací prostoru $M(\bar{\sigma})$.

V následujících třech větách ukážeme oprávněnost definice 1.1.

Lemma 1.1. a) *Funkce F z definice* 1.1 *má tyto vlastnosti:*

1. $F(x) > 0$ *pro* $x \in E_n$, $x \neq 0$;

*) T. zn.: je-li $a, b \in K$, $a \neq b$, pak každý vnitřní bod úsečky $\overline{ab}$ je vnitřním bodem K.

2. $F(k \,.\, x) = k \,.\, F(x)$ *pro* $k > 0$, $x \in E_n$;

3. $F(x + y) \leqq F(x) + F(y)$, *při čemž znamení rovnosti platí, právě když body* x, y *leží na téže polopřímce v* E_n *vycházející z počátku* o.

b) *Funkce* σ *z definice* 1.1 *má tyto vlastnosti:*

1. $\sigma(x, y) > 0$ *pro* $x, y \in E_n$, $x \neq y$; $\sigma(x, x) = 0$;

2. $\sigma(x, z) \leqq \sigma(x, y) + \sigma(y, z)$ *pro* $x, y, z \in E_n$, *při čemž rovnost platí, právě když bod* y *leží na úsečce s krajními body* x, z. *(V případě* $x = z$ *to znamená, že* $y = x$.*)*

Důkaz. Nejprve dokážeme část a). Vlastnosti 1., 2. plynou ihned z definice funkce F. Nechť $x, y \in E_n$. Leží-li x, y na téže polopřímce vycházející z o, pak je na příklad $y = k \,.\, x$, $k > 0$ a podle 2. jest $F(x + y) = F((k + 1) \,.\, x) = (k + 1) \,.\, F(x) = F(x) + k \,.\, F(x) = F(x) + F(y)$. Nechť konečně x, y neleží na téže polopřímce z bodu o, takže zejména $o \neq x \neq y \neq o$. Položme $\bar{x} = [F(x)]^{-1} \,.\, x$, $\bar{y} = [F(y)]^{-1} \,.\, y$. Platí tedy $F(\bar{x}) = F(\bar{y}) = 1$, čili $\bar{x}, \bar{y} \in H$ (viz definici 1.1). Protože M je uzavřená a ryze konvexní, leží bod

$$z = \frac{F(x)}{F(x) + F(y)} \,.\, \bar{x} + \frac{F(y)}{F(x) + F(y)} \,.\, \bar{y}$$

(který je vnitřním bodem úsečky $(\bar{x}\bar{y})$) uvnitř M a tudíž $F(z) < 1$. Tedy podle 2. platí

$$\frac{1}{F(x) + F(y)} \,.\, F[F(x) \,.\, \bar{x} + F(y) \,.\, \bar{y}] < 1 \,,$$

neboli $F(x + y) < F(x) + F(y)$; tím je část a) dokázána.

Důkaz části b). Vlastnost 1. je zřejmá, takže zbývá dokázat vlastnost 2. Nechť $x, y, z \in E_n$. Pak podle části a) je $F(y - x) + F(z - y) \geqq F(z - x)$, při čemž rovnost nastane právě tehdy, když body $y - x$, $z - y$ leží na téže polopřímce vycházející z počátku o. V tomto případě pak buď některý z bodů $y - x$, $z - y$ je počátek o a pak 2. zřejmě platí, nebo existuje $k > 0$ tak, že $y - x = k(z - y)$, takže $y = \dfrac{1}{k + 1}\, x + \dfrac{k}{k + 1}\, z$.. Tudíž (protože $y \neq x$) jest $x \neq z$ a y leží na úsečce s krajními body x, z.

Z lemmatu 1.1 ihned plyne

Lemma 1.2. *Buď* $a, b \in E_n$, $a \neq b$. *Pak přímka jdoucí body* a, b *v* E_n *je množina bodů* $x \in E_n$ *takových, že* $\sigma(a, x) + \sigma(x, b) = \sigma(a, b)$ *nebo* $\sigma(x, a) + \sigma(a, b) = \sigma(x, b)$ *nebo* $\sigma(a, b) + \sigma(b, x) = \sigma(a, x)$.

Věta 1.3. *Buď* $M(\sigma)$ *Minkowského prostor,* $(E_n(\sigma'); f)$, $(E_m(\sigma''); g)$ *jeho dvě representace. Potom* $m = n$ *a existuje regulární lineární zobrazení* L $E_n(\sigma')$ *na* $E_m(\sigma'')$ *takové, že*

$$x, y \in E_n(\sigma') \Rightarrow \sigma'(x, y) = \sigma''[L(x), L(y)] \,. \tag{2}$$

Důkaz. Pro $n = m = 1$ je vše zřejmé. Nechť tedy $n \cdot m \geqq 2$. Zobrazení fg^{-1} je prosté zobrazení $E_m(\sigma'')$ na $E_n(\sigma')$ takové, že $x, y \in E_m(\sigma'') \Rightarrow \sigma''(x, y) = \sigma'[fg^{-1}(x), fg^{-1}(y)]$. Z lemmatu 1.2 odtud plyne, že fg^{-1} zobrazuje přímky z E_m zase na přímky z E_n. Tudíž, jak známo (viz na př. [4]), je $n = m$ a fg^{-1} je lineární; položíme-li $fg^{-1} = L^{-1}$, platí (2), c. b. d.

Z věty 1.3 rovněž plyne, že v Minkowského prostoru $M_n(\sigma)$ můžeme definovat přímky a úsečky jako vzory přímek a úseček v libovolné representaci $(E_n(\sigma'); f)$ prostoru $M_n(\sigma)$, dále vektory v $M_n(\sigma)$ jako třídy orientovaných úseček, jejichž obrazy v $(E_n(\sigma'); f)$ tvoří třídu úseček definujících vektor v E_n a ukázat, že vektory v $M_n(\sigma)$ tvoří (funkcí F normovaný) n-rozměrný vektorový prostor V_n nad tělesem reálných čísel.

Zavedeme nyní tuto terminologii. Buď $M_n(\sigma)$ n-rozměrný prostor Minkowského, $(E_n(\sigma'); f)$ daná jeho representace. Pak řekneme, že v $M_n(\sigma)$ je dán *lineární souřadný systém* (x) (určený representací $(E_n(\sigma'); f)$); je-li $f(x) = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ obraz bodu $x \in M_n(\sigma)$, nazveme čísla $x^1, x^2, \ldots, x^n$ souřadnicemi bodu x v našem souřadném systému (x).

Máme-li dva lineární souřadné systémy určené representacemi $(E_n(\sigma'); f)$, $(E_n(\sigma''); g)$ a má-li bod $x \in M_n(\sigma)$ v nich souřadnice $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ resp. $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$, pak platí

$$\bar{x}^i = a^i_j x^j + b^i \,,{}^{*)} \tag{3}$$

kde a^i_j, b^i jsou reálná čísla nezávislá na x, při čemž

$$\det \|a^i_j\| \neq 0 \,. \tag{4}$$

To plyne z věty 1.3.

Funkci F resp. $\bar{F}$ definovanou na E_n, která vedla k definici metriky v $E_n(\sigma')$ resp. $E_n(\sigma'')$ nazveme *normou* aritmetického prostoru Minkowského $E_n(\sigma')$ resp. $E_n(\sigma'')$. Podle (3) pak platí

$$F(x'^1, \ldots, x'^n) = \bar{F}(a^1_j x'^j, \ldots, a^n_j x'^j) \,. \tag{5}$$

Zobrazení f prostoru $M_n(\sigma)$ do sebe nazveme *isometrickým*, platí-li

$$x, y \in M_n(\sigma) \Rightarrow \sigma(x, y) = \sigma[f(x), f(y)] \,. \tag{6}$$

Věta 1.4. *Buď f isometrické zobrazení v $M_n(\sigma)$. Pak f je regulární lineární zobrazení prostoru $M_n(\sigma)$ na sebe.*

Důkaz plyne ihned z věty 1.3.

Buď (x) lineární souřadný systém v $M_n(\sigma)$ určený representací $(E_n(\sigma'); g)$ a F norma v $E_n(\sigma')$. Buď opět f isometrické zobrazení $M_n(\sigma)$ na sebe. Označíme-li $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ souřadnice bodu $f(x)$, kde $x \in M_n(\sigma)$ má souřadnice $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, pak z věty 1.4 plyne

$$\bar{x}^i = a^i_j x^j + b^i \,, \quad \det \|a^i_j\| \neq 0 \,. \tag{7}$$

---

*) Přes indexy vyskytující se dvakrát se sčítá od jedné do n.

Protože f je isometrické zobrazení, platí pro každý vektor $a \in V_n$ o souřadnicích $(a^1, a^2, \dots, a^n)$

$$F(a^1, \dots, a^n) = F(a^1_j a^j, \dots, a^n_j a^j) . \tag{8}$$

Této identitě bude vždy vyhověno volbou

$$a^i_j = \delta^i_j , \tag{9}$$

která říká, že f je translace. Naopak existují normy F takové, že (8) platí pouze pro $a^i_j = \delta^i_j$. Takový prostor $M_n(\sigma)$, v němž (8) implikuje (9), nazveme obecným prostorem Minkowského (viz [1]). Zřejmé je pak, že jediná isometrická zobrazení v obecném prostoru Minkowského jsou translace.

Přejdeme nyní k diferenciálním vlastnostem prostorů Minkowského.

Definice 1.2. *Buď $M_n(\sigma)$ n-rozměrný prostor Minkowského, (x) lineární souřadný systém určený representací $(E_n(\sigma'); f)$. Pravíme, že prostor $M_n(\sigma)$ je třídy r (r-celé nezáporné číslo), jestliže norma F prostoru $E_n(\sigma')$ je r-krát spojitě diferencovatelná funkce v oblasti $E_n - \{o\}$ a* $\det \left\| \dfrac{\partial^2 F^2}{\partial x^i \partial x^j} \right\| \neq 0$.

Z (5) plyne, že definice 1.2 je oprávněná, t. j. že tu nezáleží na tom, kterou representaci prostoru $M_n(\sigma)$ vybereme.

V dalším budeme vždy předpokládat, že prostor $M_n(\sigma)$ má třídu $r \geqq 3$. Buď (x) lineární souřadný systém v $M_n(\sigma)$ určený representací $(E_n(\sigma'); f)$, F příslušná norma. Z lemmatu 1.1 plyne, že F je kladně homogenní dimense 1. Podle Eulerovy věty tedy jest

$$2F^2(x'^1, \dots, x'^n) = \frac{\partial^2 F^2(x'^1, \dots, x'^n)}{\partial x'^i \, \partial x'^k} x'^i x'^k , \quad x' \in E_n - \{o\} . \tag{10}$$

Položme

$$g_{ij}(x'^1, \dots, x'^n) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x'^1, \dots, x'^n)}{\partial x'^i \, \partial x'^j} . \tag{11}$$

Snadno zjistíme, že $g_{ij}(x'^1, \dots, x'^n)$ jsou komponenty kvadratického tensoru, jemuž budeme říkat metrický tensor.

Snadno se nahlédne, že kvadratická forma $g_{ij}(x'^k)\ x^i x^j$ je positivně definitní pro každé $x' = (x'^1, \dots, x'^n) \in E_n - \{o\}$. Rovněž je patrné, že funkce $g_{ij}(x'^k)$ jsou kladně homogenní dimense 0. Odtud plyne, že

$$\frac{\partial g_{ij}(x')}{\partial x'^k} x'^k = \frac{\partial g_{ij}(x')}{\partial x'^k} x'^i = 0 . \tag{12}$$

2. Skalární součin a orthonormální base ve vektorovém prostoru V_n

Buď (x) lineární souřadný systém v $M_n(\sigma)$, $g_{ij}(x'^1, \dots, x'^n)$ komponenty metrického tensoru v tomto souřadném systému. Buďte $a \neq 0$, b vektory ve V_n o souřadnicích (a^i), (b^i) určených systémem (x). Snadno se přesvědčíme, že číslo

$$g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)\, a^i b^j \tag{13}$$

nezávisí na volbě souřadného systému (x) a můžeme proto definovat:

skalárním součinem (a, b) vektorů $a, b \in V_n$ nazveme číslo (13), *pokud $a \neq 0$. Pro $a = 0$ klademe $(0, b) = 0$.*

Zřejmé jsou tyto základní vlastnosti skalárního součinu

1. $(a, a) \geqq 0$, *rovnost nastane právě pro $a = 0$; (a, a) je čtverec normy $\|a\|$ vektoru $a \in V_n$: $\|a\| = \sqrt{(a, a)} \geqq 0$.*
2. $(\lambda \,.\, a, b) = \lambda \,.\, (a, b)$ *pro* $a, b \in V_n$, $\lambda \geqq 0$;
3. $(a, \alpha b + \beta c) = \alpha(a, b) + \beta(a, c)$ *pro* $a, b, c \in V_n$; α, β *reálná čísla.*

Pravíme, že vektor $a \in V_n$ je kolmý k vektoru $b \in V_n$, když $(a, b) = 0$.

Věta 2.1. *Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \leqq n$, jsou nenulové vektory ve vektorovém prostoru V_n příslušném prostoru $M_n(\sigma)$. Nechť platí $(a_i, a_j) = 0$ pro $i < j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Potom vektory $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Nechť $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$, α_i reálná čísla. Označme $b_j = \sum_{i=j}^{n} \alpha_i a_i$; tedy $b_1 = 0$. Odtud $0 = (a_1, b_1) = \alpha_1(a_1, a_1)$, takže $\alpha_1 = 0$ a proto $b_2 = 0$. Odtud opět plyne $0 = (a_2, b_2) = \alpha_2(a_2, a_2)$, takže $\alpha_2 = 0$ a $b_3 = 0$. Tak pokračujeme dál; dostaneme nakonec, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, c. b. d.

Definice 2.1. *Buď A_k k-rozměrný podprostor ve V_n. Řekněme, že vektory $a_1, \ldots \ldots, a_k \in A_k$ (v tomto pořadí) tvoří orthonormální basi prostoru A_k, platí-li*

$$(a_i, a_j) = \delta^i_j \quad \textit{pro} \quad i \leqq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, k\,. \tag{14}$$

Věta 2.2. *Buď A_k k-rozměrný podprostor ve V_n. Pak existují v A_k vektory $e_1, e_2, \ldots, e_k$ tak, že tvoří orthonormální basi prostoru A_k.*

Důkaz se nijak neliší od důkazu příslušné věty v eukleidovském vektorovém prostoru (viz na př. [2]).

V dalším se ukáže výhodným toto rozšíření pojmu skalárního součinu. Buďte a, b, c tři vektory ve V_n, $a \neq 0$. Skalár $g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)\, b^i c^j$, kde (a^i), (b^i), (c^i) jsou souřadnice vektorů a, b, c, označíme symbolem $(b, c)_a$ a budeme mu říkat *skalární součin vektorů b, c ve směru a* (neboť $(b, c)_a = (b, c)_{\lambda a}$ pro $\lambda > 0$).

Zřejmé jsou tyto vlastnosti skalárního součinu $(b, c)_a$:

$$(b, c)_a = (c, b)_a\,, \quad (a, b)_a = (a, b)\,, \quad (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2, c)_a = \alpha_1(b_1, c)_a + \alpha_2(b_2, c)_a$$

pro $b_1, b_2 \in V_n$ a reálná čísla α_1, α_2.

3. Křivky v prostoru $M_n(\sigma)$. Frenetovy formule

Buď $M_n(\sigma)$ n-rozměrný prostor Minkowského třídy $r \geqq 3$, (x) lineární souřadný systém v $M_n(\sigma)$. Buď J interval v E_1. Zobrazení f intervalu J do $M_n(\sigma)$ nazveme *regulární r'-krát diferencovatelnou parametrickou křivkou* v $M_n(\sigma)$, jestliže funkce $x^i(t)$, $t \in J$, $i = 1, 2, \ldots, n$, kde $(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$ jsou souřadnice bodu $f(t) \in M_n(\sigma)$ v souřadném systému (x), jsou r'-krát spojitě didiferencovatelné a vektor $\left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right)$ je nenulový pro každé $t \in J$.

Buď $t_0, t_1 \in J$, $t_0 < t_1$. Definujeme-li obvyklým způsobem délku oblouku $L(t_0, t_1)$ křivky f z bodu t_0 do bodu t_1, snadno spočteme, že

$$L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(x'^1, \ldots, x'^n)\, x'^i x'^j}\, dt\,, \quad \text{kde} \quad x'^l = \frac{dx^l(t)}{dt}\,. \tag{15}$$

Definujeme-li nyní známým způsobem orientovanou r'-krát diferencovatelnou regulární křivku k v $M_n(\sigma)$ jako jistou třídu parametrických r'-krát diferencovatelných regulárních křivek obsahující f, snadno zjistíme, že v této třídě existuje právě jedna parametrická křivka $\tilde{f}(s) = (\tilde{x}^i(s))$ taková, že $\tilde{x}^i(0) = x^i(t_0)$, s je délka oblouku orientované křivky k z $(\tilde{x}^i(0))$ do $(\tilde{x}^i(s))$. Pro parametr s zřejmě platí

$$F^2\left(\frac{d\tilde{x}^k}{ds}\right) = g_{ij}\left(\frac{d\tilde{x}^k}{ds}\right) \frac{d\tilde{x}^i}{ds} \frac{d\tilde{x}^j}{ds} = 1\,. \tag{16}$$

Nazveme-li každou parametrickou křivku ležící v třídě parametrických křivek, která definuje orientovanou křivku k, *representací orientované křivky* k, pak parametrickou křivku $\tilde{f}$ nazveme *význačnou representací* orientované křivky k.

Buď k orientovaná regulární $r' \geqq n$-krát diferencovatelná křivka v $M_n(\sigma)$; její význačná representace nechť je v lineárním souřadném systému v $M_n(\sigma)$ dána funkcemi $(x^1(s), x^2(s), \ldots, x^n(s))$, $0 \leqq s \leqq s_1$. Vektor $t(s) \in V_n$, jehož souřadnice jsou ve zvoleném souřadném systému $\left(\frac{dx^1(s)}{ds}, \ldots, \frac{dx^n(s)}{ds}\right)$, nazveme *tečným vektorem* křivky k v bodě s. Místo $\frac{dx^k}{ds}$ pišme x'^k. Z (16) plyne, že

$$g_{ij}(x'^1, \ldots, x'^n)\, x'^i x'^j = 1 \tag{17}$$

pro každé $s \in \langle 0, s_1 \rangle$. To však znamená, že

$$(t, t) = 1\,; \tag{18}$$

tedy vektor t má délku (t. j. 2. odmocninu z normy) rovnou jedné pro každé $s \in \langle 0, s_1 \rangle$.

Utvořme nyní vektory $t', t'', \ldots, t^{(n-1)}$, kde čárkou značíme derivaci podle s. V dalším budeme vždy předpokládat, že dimense vektorových prostorů $A_i(s) = \{t(s), t'(s), \ldots, t^{(i-1)}(s)\}$ je táž pro každé $s \in \langle 0, s_1 \rangle$.

Definice 3.1. *Nechť prostor* $\{t, t', \ldots, t^{(n-1)}\}$ *má dimensi* h. *Pak* h *nazveme hodností křivky* k. *Lineární prostor* $R_i(s)$ *v* $M_n(\sigma)$ *určený bodem* $(x^1(s), \ldots, x^n(s))$ *a vektory* $t(s), t'(s), \ldots, t^{(i-1)}(s)$, *kde* $1 \leqq i < h$, *nazveme i-tým oskulačním prostorem křivky* k *v bodě* s.

Jak známo platí pak tato věta:

Věta 3.1. *Nechť křivka* k *má hodnost* h. *Pak* k *leží v* h*-rozměrném lineárním podprostoru v* $M_n(\sigma)$, *který je zároveň jejím* h*-tým oskulačním prostorem v každém jejím bodě.*

Z věty 3.1 plyne, že při dalším vyšetřování křivek se můžeme omezit na křivky hodnosti n v $M_n(\sigma)$.

Obrátíme se nyní k odvození Frenetových vzorců pro křivky. Nejprve však dokážeme jednoduchou pomocnou větu.

Lemma 3.2. *Buďte* $a(s), b(s)$ *diferencovatelné vektorové funkce ve* V_n. *Nechť* $(a(s), b(s)) = \text{konst.}, a(s) \neq 0$.

Potom jest $(a(s), b'(s)) + (a'(s), b(s))_a = 0$.

Důkaz je zřejmý, přejdeme-li k lineárnímu souřadnému systému (x) v $M_n(\sigma)$. Nechť vektory a, b v něm mají souřadnice (a^i), (b^i). Pak z rovnosti $g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)\, a^i b^j = \text{konst.}$ plyne derivací

$$\frac{\partial g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)}{\partial a^k} a'^k a^i b^j + g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)\, a'^i b^j + g_{ij}(a^1, \ldots, a^n)\, a^i b'^j = 0\,;$$

první člen vlevo v této rovnosti je však podle (12) roven nule. Tím je lemma dokázáno.

Buď k regulární orientovaná křivka v $M_n(\sigma)$ hodnosti n, aspoň $(n+1)$-krát spojitě diferencovatelná. Buď (x) lineární souřadný systém v $M_n(\sigma)$; v něm nechť význačná representace křivky k je dána funkcemi $(x^1(s), \ldots, x^n(s))$, $s \in \langle 0, s_1 \rangle$, $s_1 > 0$. Označme jako obvykle $t(s)$ tečný vektor křivky k v bodě s. Podle předpokladu vektory $t, t', \ldots, t^{(n-1)}$ tvoří basi prostoru V_n. Pomocí base $t, t', \ldots, t^{(n-1)}$ sestrojíme nyní ve V_n pro každé $s \in \langle 0, s_1 \rangle$ jistou orthonormální basi $e_1(s), \ldots, e_n(s)$. Udáme nyní konstrukci této base.

Předně položme

$$e_1(s) = t(s)\,, \tag{19}$$

takže

$$(e_1, e_1) = 1\,. \tag{20}$$

Nechť dále $\bar{e}_2 = e_1' + \alpha_{11} e_1$, kde $\alpha_{11} = -(e_1, e_1')$, takže $(e_1, \bar{e}_2) = 0$. Avšak z $(t, t) = 1$ a lemmatu 3.2 plyne $(t, t') = 0$, takže $\alpha_{11} = 0$. Skalární funkci $\sqrt{(\bar{e}_2, \bar{e}_2)} > 0$ označme $\varkappa_1(s)$ a nazveme ji *první křivostí křivky* k v bodě s.*)

*) Stejným způsobem definoval 1. křivost křivky ve Finslerově prostoru H. RUND v práci [3].

Vektor $e_2(s) = \varkappa_1^{-1}(s)\,\bar{e}_2(s)$ nazveme *první normálou křivky k* v bodě s. Platí pak zřejmě

$$(e_1, e_2) = 0\,, \quad (e_2, e_2) = 1\,, \quad e_2 \in \{t, t'\}\,, \tag{21}$$

$$e_1' = \varkappa_1 e_2\,. \tag{22}$$

Dál postupujme indukcí. Předpokládejme, že už máme sestrojeny vektory $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_m(s)$, $m < n$ (vektor $e_i(s)$, $2 \leqq i \leqq m$, nazveme *$(i-1)$-vou normálou křivky k* v bodě s) a skalární kladné funkce $\varkappa_1(s), \varkappa_2(s), \ldots, \varkappa_{m-1}(s)$ (číslo $\varkappa_j(s)$, $1 \leqq j \leqq m-1$, nazveme *j-tou křivostí křivky k* v bodě s), pro něž platí

$$(e_i, e_j) = \delta_j^i \quad \text{pro} \quad i \leqq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, m \tag{23}$$

$$e_i' = -\alpha_{i1}e_1 - \alpha_{i2}e_2 - \ldots - \alpha_{ii}e_i + \varkappa_i e_{i+1}\,, \quad 1 \leqq i \leqq m-1\,, \tag{24}$$

kde α_{ij} jsou rekurentně stanovena rovnicemi

$$\begin{gathered}
\alpha_{i1} = \varkappa_1(e_2, e_i)\,e_1\,, \\
\alpha_{i1}(e_2, e_1) + \alpha_{i2} = -\alpha_{21}(e_1, e_i)_{e_2} - \alpha_{22}(e_2, e_i)_{e_2} + \varkappa_2(e_3, e_i)_{e_2}\,, \\
\alpha_{i1}(e_3, e_1) + \alpha_{i2}(e_3, e_2) + \alpha_{i3} = -\alpha_{31}(e_1, e_i)_{e_3} - \ldots - \alpha_{33}(e_3, e_i)_{e_3} + \\
+ \varkappa_3(e_4, e_i)_{e_3}\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{i1}(e_i, e_1) + \ldots + \alpha_{i,i-1}(e_i, e_{i-1}) + \alpha_{ii} = 0\,, \quad (1 \leqq i \leqq m-1)\,.
\end{gathered} \tag{25}$$

Pak položíme

$$\bar{e}_{m+1} = e_m' + \alpha_{m1}e_1 + \ldots + \alpha_{mm}e_m\,, \tag{26}$$

kde zase

$$\begin{gathered}
\alpha_{m1} = \varkappa_1(e_2, e_m)_{e_1}\,, \\
\alpha_{m1}(e_2, e_1) + \alpha_{m2} = -\alpha_{21}(e_1, e_m)_{e_2} - \alpha_{22}(e_2, e_m)_{e_2} + \varkappa_2(e_3, e_m)_{e_2}\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{m1}(e_m, e_1) + \ldots + \alpha_{mm} = 0\,;
\end{gathered} \tag{27}$$

skalár $\varkappa_m(s) = \sqrt{(\bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+1})} > 0$ nazveme *m-tou křivostí křivky k*, vektor $e_{m+1}(s) = \varkappa_m^{-1}(s)\,\bar{e}_{m+1}(s)$ *m-tou normálou křivky k* v bodě s. Potom pro $i < m + 1$ dostaneme z (26)

$$(e_i, e_{m+1}) = \varkappa_m^{-1}(e_i, \bar{e}_{m+1}) = \varkappa_m^{-1}[(e_i, e_m') + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj}(e_i, e_j)]\,.$$

Podle (23) jest $(e_i, e_m) = \delta_m^i$. Odtud derivováním a užitím (24) máme $(e_i, e_m') = -(e_i', e_m) = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik}\,.\,(e_k, e_m)_{e_i} - \varkappa_i(e_{i+1}, e_m)_{e_i}$. Tedy $(e_i, e_{m+1}) = \varkappa_m^{-1}\,.\,[\sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik}(e_k, e_m)_{e_i} - \varkappa_i(e_{i+1}, e_m)_{e_i} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj}(e_i, e_j)] = \varkappa_m^{-1}[\sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik}(e_k, e_m)_{e_i} - \varkappa_i (e_{i+1}, e_m)_{e_i} + \sum_{j=1}^{i} \alpha_{mj}(e_i, e_j)]$, neboť $(e_i, e_j) = 0$ pro $i < j \leqq m$. Součet v hranaté závorce se však podle i-té rovnice v (27) rovná nule. Tedy vskutku $(e_i, e_{m+1}) =$

$= 0$ pro $i < m + 1$. S druhé strany jest zřejmě $(e_{m+1}, e_{m+1}) = 1$. Platí tudíž rovnice (23) pro $i, j = 1, 2, \ldots, m + 1$ a rovnice (24), (25) pro $i = 1, 2, \ldots, m$.

Tím jsme rekurentně sestrojili ke křivce k v každém jejím bodě o parametru s vektory $e_1(s), \ldots, e_n(s)$, pro něž platí (23) pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$ a (24) a (25) pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Vektory $e_1(s), \ldots, e_n(s)$ tvoří basi prostoru V_n; proto

$$- e_n' = \alpha_{n1}e_1 + \ldots + \alpha_{nn}e_n \,. \tag{28}$$

Určíme nyní koeficienty $\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}$. Z (28) plyne

$$\begin{gathered}(e_1, e_n') = \alpha_{n1}\,,\\ (e_2, e_n') = - \alpha_{n1}(e_2, e_1) - \alpha_{n2}\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 0 = (e_n, e_n') = - \alpha_{n1}(e_n, e_1) - \ldots - \alpha_{nn-1}(e_n, e_{n-1}) - \alpha_{nn}\,.\end{gathered} \tag{29}$$

Avšak $(e_i, e_n) = 0$ pro $i < n$. Odtud derivováním a užitím lemmatu 3.2 dostáváme

$$(e_i, e_n') = - (e_i', e_n)_{e_i} = \alpha_{i1}(e_1, e_n)_{e_i} + \ldots + \alpha_{ii}(e_i, e_n)_{e_i} - \varkappa_i(e_{i+1}, e_n)_{e_i}\,. \tag{30}$$

Z (29) a (30) plyne, všimneme-li si, že $\alpha_{ii}(e_i, e_n)_{e_i} = \alpha_{ii}(e_i, e_n) = 0$,

$$\begin{gathered}\alpha_{n1} = \varkappa_1(e_2, e_n)_{e_1}\,,\\ \alpha_{n1}(e_2, e_1) + \alpha_{n2} = - \alpha_{21}(e_1, e_n)_{e_2} + \varkappa_2(e_3, e_n)_{e_2}\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{n1}(e_n, e_1) + \ldots + \alpha_{nn} = 0\,.\end{gathered}$$

Poznamenejme ještě, že v rovnicích (25) je $\alpha_{ii}(e_i, e_j)_{e_i} = 0$ pro $i < j$. Dosažený výsledek shrneme v této větě:

Věta 3.3. *Buď k regulární, aspoň $(n + 1)$-krát diferencovatelná orientovaná křivka hodnosti n v $M_n(\sigma)$, s její oblouk, $0 \leqq s \leqq s_1$. Buď $t(s) = e_1(s)$ její tečna, $e_{i+1}(s)$ její i-tá normála $(1 \leqq i \leqq n - 1)$, $\varkappa_j(s)$ její j-tá křivost $(1 \leqq j \leqq n - 1)$ v bodě o parametru s. Potom platí vzorce*

$$e_i' = - \alpha_{i1}e_1 - \ldots - \alpha_{ii}e_i + \varkappa_i e_{i+1}\,, \quad 1 \leqq i \leqq n\,, \tag{31}$$

kde klademe $\varkappa_{n+1} = 0$, $e_{n+1} = 0$ a skaláry α_{ij} jsou rekurentně stanoveny rovnicemi

$$\begin{gathered}\alpha_{i1} = \varkappa_1(e_2, e_i)_{e_1}\,,\\ \alpha_{i1}(e_2, e_1) + \alpha_{i2} = - \alpha_{21}(e_1, e_i)_{e_2} + \varkappa_2(e_3, e_i)_{e_2}\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{i1}(e_{i-1}, e_1) + \ldots + \alpha_{i,i-1} = - \alpha_{i-1,1}(e_1, e_i)_{e_{i-1}} - \ldots - \alpha_{i-1,i-2}\,.\\ .\,(e_{i-2}, e_i)_{e_{i-1}} + \varkappa_{i-1}(e_i, e_i)_{e_{i-1}}\,,\\ \alpha_{i1}(e_i, e_1) + \ldots + \alpha_{ii} = 0\,.\end{gathered} \tag{32}$$

Vzorce (31) a (32) můžeme nazvat *Frenetovými vzorci pro křivky v prostoru* $M_n(\sigma)$ (okamžitě se přesvědčíme, že v případě, kdy $M_n(\sigma)$ je eukleidovský prostor, dostáváme známé Frenetovy formule). Vektory $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_n(s)$ nazveme *základním n-hranem křivky k v bodě s.*

Ukážeme nyní, že křivosti křivky spolu s jejím základním n-hranem v libovolně zvoleném jejím bodě určují tuto křivku jednoznačně a že pro každou volbu spojitých kladných funkcí $\varkappa_j(s)$ $(1 \leqq j \leqq n - 1)$, $s \in \langle 0, s_1 \rangle$ existuje v $M_n(\sigma)$ orientovaná křivka, pro niž s je oblouk a $\varkappa_j(s)$ j-tá křivost. Nejprve však dokážeme dvě pomocné věty.

Lemma 3.4. *Buďte $\varkappa_j(s)$, $0 \leqq s \leqq s_1$ kladné spojité funkce, $1 \leqq j \leqq n - 1$. Nechť vektorové funkce $e_i(s)$ ve V_n, $1 \leqq i \leqq n$ jsou řešením systému diferenciálních rovnic*

$$e_i'(s) = -\alpha_{i1}e_1(s) - \ldots - \alpha_{ii}e_i(s) + \varkappa_i(s)\, e_{i+1}(s),\ 1 \leqq i \leqq n,$$
$$\varkappa_n(s) = 0\,, \quad e_{n+1}(s) = 0\,, \tag{33}$$

kde funkce a_{ik} jsou určeny rekurentně rovnicemi (32). *Nechť $e_i(s)$ vyhovují počátečním podmínkám $e_i(0) = e_i^0$, kde*

$$(e_i^0, e_j^0) = \delta_j^i \quad \text{pro} \quad i \leqq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{34}$$

Potom pro všechna s, pro něž jsou $e_i(s)$ definovány, platí

$$(e_i(s), e_j(s)) = \delta_j^i \quad \text{pro} \quad i \leqq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{35}$$

Důkaz. Nechť funkce $e_i(s)$ jsou řešením systému (33) s počátečními podmínkami (34). Označme $f_{ij}(s) = (e_i(s), e_j(s))$ pro $i \leqq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pak tedy platí

$$f_{ij}(0) = \delta_j^i\,. \tag{36}$$

Spočtěme nyní derivaci funkce $f_{ik}(s)$.

a) Nechť předně je $i < k$. Potom podle (33) platí

$$\begin{aligned} f_{ik}'(s) &= (e_i, e_k') + (e_i', e_k)_{e_i} = \\ &= -\alpha_{k1}(e_i, e_1) - \ldots - \alpha_{k,i-1}(e_i, e_{i-1}) - \alpha_{ki}\, f_{ii}(s) - \alpha_{k,i+1}\, f_{i,i+1}(s) - \\ &\quad - \ldots - \alpha_{kk}\, f_{ik}(s) + \varkappa_k\, f_{i,k+1}(s) - \alpha_{i1}(e_k, e_1)_{e_i} - \ldots - \\ &\quad - \alpha_{i,i-1}(e_k, e_{i-1})_{e_i} - \alpha_{ii}\, f_{ik}(s) + \varkappa_i(e_k, e_{i+1})_{e_i}\,. \end{aligned}$$

Podle (32) však jest

$$\alpha_{k1}(e_i, e_1) + \ldots + \alpha_{ki} = -\alpha_{i1}(e_1, e_k)_{e_i} - \ldots - \alpha_{i,i-1}(e_{i-1}, e_k)_{e_i} + \varkappa_i(e_{i+1}, e_k)_{e_i}\,. \tag{37}$$

Užitím (37) dostaneme, že

$$\begin{aligned} f_{ik}'(s) &= \alpha_{ki}[1 - f_{ii}(s)] - \alpha_{k,i+1}\, f_{i,i+1}(s) - \ldots - \alpha_{kk}\,.\, f_{ik}(s) + \\ &\quad + \varkappa_k\, f_{i,k+1}(s) - \alpha_{ii}\, f_{ik}(s)\,. \quad (\text{Zde klademe } f_{i,n+1}(s) = 0.) \end{aligned} \tag{38}$$

b) Nechť $i = k$. Pak zcela obdobně jako v a) odvodíme užitím (32) a (33) rovnost

$$f_{ii}'(s) = \alpha_{ii}[1 - f_{ii}(s)] + \varkappa_i\, f_{i,i+1}(s)\,. \tag{39}$$

(Pro $i = n$ odpadne poslední člen.)

Rovnice (38) a (39) představují systém lineárních diferenciálních rovnic pro $f_{ik}(s)$. Tyto rovnice mají řešení $\tilde{f}_{ij}(s) = \delta^i_j$; to vyhovuje počátečním podmínkám (36). Tedy platí pro všecka uvažovaná s $f_{ij}(s) = \delta^i_j$ pro $i \leqq j$; tím je věta dokázána.

Lemma 3.5. *Nechť funkce $\varkappa_j(s)$, $1 \leqq j \leqq n - 1$ jsou spojité a kladné v intervalu $\langle 0, s_1 \rangle$, $s_1 > 0$. Pak systém diferenciálních rovnic*

$$\begin{gathered} e'_i(s) = -\alpha_{i1} e_1(s) - \ldots - \alpha_{ii} e_i(s) + \varkappa_i(s)\, e_{i+1}(s)\,, \\ (1 \leqq i \leqq n\,, \quad \varkappa_n(s) = 0\,, \quad e_{n+1}(s) = 0\,, \quad e_i(s) \in V_n)\,, \end{gathered} \tag{40}$$

kde α_{ik} jsou určeny rovnicemi (32), má při počátečních podmínkách $e_i(0) = \overset{0}{e}_i$, kde

$$(\overset{0}{e}_i, \overset{0}{e}_j) = \delta^i_j \quad \text{pro} \quad i \leqq j;\ i, j = 1, \ldots, n \tag{41}$$

právě jedno řešení $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_n(s)$; to je definováno v celém intervalu $\langle 0, s_1 \rangle$ a $(e_i(s), e_j(s)) = \delta^i_j$ pro $i \leqq j$, $s \in \langle 0, s_1 \rangle$.

Důkaz. Zvolme v prostoru $M_n(\sigma)$ lineární souřadný systém (x). Z definice prostoru $M_n(\sigma)$ plyne, že existují kladná čísla A, B taková, že pro souřadnice $(e^1, \ldots, e^n)$ každého vektoru $e \in V_n$, pro nějž $(e, e) = 1$, platí $0 < 2A < \max(|e^1|, |e^2|, \ldots, |e^n|) < \frac{1}{2}B$. Nechť nyní vektor $e_i(s)$ má souřadnice $(e^1_i(s), \ldots, e^n_i(s))$, které krátce označíme $(e^\alpha_i(s))$. Systém (40) v souřadnicovém tvaru představuje soustavu n^2 diferenciálních rovnic pro $e^\alpha_i(s)$:

$$e'^\alpha_i(s) = f^\alpha_i(e^\beta_j(s), s)\,. \tag{42}$$

Protože $g_{\alpha\beta}(x')$ mají spojité derivace pro každé $x' \in V_n$, $x' \neq 0$, snadno nahlédneme, že funkce $f^\alpha_i(e^\beta_j, s)$ $n^2 + 1$ proměnných e^β_j, s jsou spojité a mají spojité parciální derivace podle e^β_j v každém bodě (e^β_j, s), kde $s \in \langle 0, s_1 \rangle$, $(e^1_j, \ldots, e^n_j) \neq (0, \ldots, 0)$. Označme Ω oblast těch bodů (e^β_j, s), pro něž

$$A \leqq \max_{1 \leqq j \leqq n} (|e^1_j|, \ldots, |e^n_j|) \leqq B\,, \quad 0 \leqq s \leqq s_1\,.$$

V Ω jsou tedy funkce $f^\alpha_i(e^\beta_j, s)$ spojité a mají tam spojité parciální derivace podle e^β_j.

Pro počáteční podmínky (41) platí $(\overset{0}{e}{}^\alpha_j, 0) \in \Omega$ a proto existuje právě jedno řešení $e^\alpha_j(s)$ systému (42), splňující tyto počáteční podmínky. Podle lemmatu 3.4 platí pro každé j, $1 \leqq j \leqq n$, $(e_j(s), e_j(s)) = 1$, takže integrální čára $(e^\alpha_j(s), s)$ může pro $s > 0$ protnout hranici oblasti Ω jen v bodě, pro nějž $s = s_1$. Z theorie diferenciálních rovnic však víme, že integrální čáru $(e^\alpha_j(s), s)$ lze prodloužit až k hranici oblasti Ω. To znamená, že integrační čáru lze prodloužit až do bodu s_1; tedy systém (42) má při počátečních podmínkách (41) řešení $e^\alpha_j(s)$ v intervalu $\langle 0, s_1 \rangle$.

Věta 3.6. *Buď $M_n(\sigma)$ n-rozměrný prostor Minkowského. Buďte $\varkappa_j(s)$, $1 \leqq j \leqq n - 1$ spojité kladné funkce v $\langle 0, s_1 \rangle$. Nechť ${}^0x \in M_n(\sigma)$ a nechť vektory ${}^0e_1, \ldots, {}^0e_n$ z V_n tvoří orthonormální basi ve V_n. Potom existuje v $M_n(\sigma)$ právě jedna regulární orientovaná křivka $k(s)$ s těmito vlastnostmi:*

1° *parametr s je jejím obloukem, $0 \leqq s \leqq s_1$;*

2° *$\varkappa_i(s)$ je i-tá křivost křivky k v bodě o parametru s;*

3° *$k(0) = {}^0x$, ${}^0e_1$ je tečný vektor, ${}^0e_{j+1}$ $(1 \leqq j < n)$ j-tá normála křivky k v bodě o parametru $s = 0$.*

Důkaz. Zvolme v $M_n(\sigma)$ lineární souřadný systém (x); nechť v něm má bod ${}^0x$ souřadnice $({}^0x^\alpha)$, vektor ${}^0e_i$ souřadnice $({}^0e_i^\alpha)$. Buď nyní $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_n(s)$ řešení systému (40) s počátečními podmínkami $e_i(0) = {}^0e_i$ splňujícími (41). Podle lemmatu 3.5 toto řešení existuje v celém intervalu $\langle 0, s_1 \rangle$, tvoří pro každé $s \in \langle 0, s_1 \rangle$ orthonormální basi ve V_n a je jednoznačně stanoveno. Položme nyní

$$x^\alpha(s) = \int_0^s e_1^\alpha(s)\,\mathrm{d}s + {}^0x^\alpha\,. \tag{43}$$

Snadno nahlédneme, že parametrická křivka určená v souřadném systému (x) funkcemi $(x^1(s), x^2(s), \ldots, x^n(s))$ je právě hledaná křivka a je jediná.

Poznámka. Zatím co v eukleidovském prostoru tvoří křivosti křivky úplný systém jejích invariantů (t. j. určují křivku jednoznačně až na křivky s ní shodné), v prostoru Minkowského tomu tak obecně není. Můžeme totiž tvrdit jen toto:

Věta 3.7. *Buďte $\varkappa_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, spojité kladné funkce v intervalu $\langle 0, s_1 \rangle$. Buďte ${}^0e_1, \ldots, {}^0e_n$ resp. ${}^0\bar{e}_1, \ldots, {}^0\bar{e}_n$ dvě shodné orthonormální base ve V_n, t. j. takové, že existuje automorfismus ve V_n převádějící jednu basi v druhou. Nechť ${}^0x$, ${}^0\bar{x}$ jsou body v $M_n(\sigma)$.*

Potom orientované křivky k resp. $\bar{k}$, o křivostech $\varkappa_i(s)$, oblouku s, vycházející z ${}^0x$ resp. ${}^0\bar{x}$ a mající ${}^0e_1, \ldots, {}^0e_n$ resp. ${}^0\bar{e}_1, \ldots, {}^0\bar{e}_n$ za svůj základní n-hran v bodě ${}^0x$ resp. ${}^0\bar{x}$ jsou shodné, t. j. existuje isometrické zobrazení v $M_n(\sigma)$, které převádí křivku k v křivku $\bar{k}$.

Důkaz je zřejmý z věty 3.6.

Tedy otázku po shodnosti dvou křivek jsme redukovali pomocí jejich křivostí na otázku, kdy dvě orthonormální base v příslušném V_n jsou shodné. V případě, že $M_n(\sigma)$ je obecný prostor Minkowského, je odpověď na tuto otázku prostá: žádné dvě různé orthonormální base v příslušném vektorovém prostoru V_n nejsou shodné. Tedy platí tato

Věta 3.8. *V obecném prostoru Minkowského $M_n(\sigma)$ tvoří úplný systém invariantů orientované křivky její křivosti $\varkappa_1(s), \varkappa_2(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$ a orthonormální base ${}^0e_1, {}^0e_2, \ldots, {}^0e_n$ v příslušném V_n jako základní n-hran křivky v jejím počátku (t. j. tyto údaje určují křivku jednoznačně až na křivky s ní shodné).*

4. Geometrická interpretace křivostí křivky v $M_n(\sigma)$

Zvolme v n-rozměrném prostoru Minkowského $M_n(\sigma)$ bod p, který nazveme počátkem. Buď k orientovaná regulární křivka v $M_n(\sigma)$, s buď její oblouk,

$s \in \langle 0, s_1\rangle$. Označme $k(s)$ bod na k o parametru s, a buď $r(s)$ vektor ve V_n, určený úsečkou $\overline{p\, k(s)}$ s počátečním (koncovým) bodem p $(k(s))$. Takto je křivka k dána vektorovou funkcí (průvodičem) $r(s)$. Budeme v dalším předpokládat, že k je alespoň $(n + 1)$-krát spojitě diferencovatelná, takže $r(s)$ má spojitou derivaci řádu $n + 1$.

Lemma 4.1. *Buď $e_1(s)$ tečný vektor, $e_{i+1}(s)$ i-tá normála, $\varkappa_i(s)$ $(1 \leqq i \leqq n - 1)$ i-tá křivost křivky k v bodě $k(s)$. Buď j přirozené číslo, $1 \leqq j \leqq n - 1$. Pak existují skalární funkce $\beta_{j1}(s), \beta_{j2}(s), \ldots, \beta_{jj}(s)$ tak, že*

$$e_1^{(j)} = \beta_{j1}e_1 + \beta_{j2}e_2 + \ldots + \beta_{jj}e_j + \varkappa_1\varkappa_2 \ldots \varkappa_j e_{j+1}\,, \tag{44}$$

kde $e_1^{(j)} = \dfrac{\mathrm{d}^j e_1}{\mathrm{d}s^j}$ *a* $\beta_{11}(s) = 0$.

Důkaz provedeme snadno indukcí podle j užitím věty 3.3.

Věta 4.2. *V bodě $k(0)$ křivky k platí rozvoj*

$$r(s) - {}^0r = {}^0e_1\left[s + {}^0\beta_{21}\frac{s^3}{3!} + \ldots + {}^0\beta_{n-1,1}\frac{s^n}{n!} + o(s^n)\right] +$$
$$+ \sum_{i=2}^{n} {}^0e_i\left[{}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_{i-1}\frac{s^i}{i!} + {}^0\beta_{ii}\frac{s^{i+1}}{(i+1)!} + \ldots + {}^0\beta_{n-1,i}\frac{s^n}{n!} + o(s^n)\right], \tag{45}$$

kde ${}^0r = r(0)$, ${}^0\varkappa_i = \varkappa_i(0)$, ${}^0\beta_{ji} = \beta_{ji}(0)$, ${}^0e_i = e_i(0)$.

Důkaz. Pro funkci $r(s)$ platí Taylorův rozvoj

$$r(s) - {}^0r = {}^0r' \,.\, s + {}^0r'' \,.\, \frac{s^2}{2!} + \ldots + {}^0r^{(n)} \,.\, \frac{s^n}{n!} + o(s^n)\,.$$

Dosazením ${}^0r^{(k)} = {}^0e_1^{(k-1)}$ a užitím lemmatu 4.1 dostáváme odtud (45).

Poznámka. Pro $n = 3$ rozvoj (45) vypadá explicitně takto:

$$r(s) - {}^0r = {}^0e_1\left[s - \frac{s^3}{3!} \,.\, {}^0\varkappa_1^2 \,.\, ({}^0e_2, {}^0e_2)_{{}^0e_1} + o(s^3)\right] +$$
$$+ {}^0e_2\left[\frac{s^2}{2} \,.\, {}^0\varkappa_1 + \frac{s^3}{3!}\left({}^0\varkappa_1' + {}^0\varkappa_1^2 \,.\, ({}^0e_2, {}^0e_2)_{{}^0e_1} \,.\, ({}^0e_2', {}^0e_1)\right) + o(s^3)\right] +$$
$$+ {}^0e_3\left[\frac{s^3}{3!} \,.\, {}^0\varkappa_1 \,.\, {}^0\varkappa_2 + o(s^3)\right].$$

Definujeme-li obvyklým způsobem styk křivek v $M_n(\sigma)$, dostaneme odtud snadno odpověď na otázku po souvislosti řádu styku obou křivek s jejich základními n-hrany a křivostmi v příslušném bodě. Vše je zcela obdobné eukleidovskému případu.

Ukážeme nyní geometrický význam křivostí orientované křivky k v jejím bodě, který není jejím koncovým bodem. Zřejmě při tom můžeme předpokládat, že tento bod je počátečním bodem křivky k.

Věta 4.3. *Označme $R_i(0)$ i-tý oskulační prostor křivky k v bodě $k(0)$, $S_i(s)$ lineární prostor v $M_n(\sigma)$ určený bodem $k(s)$, $s > 0$ a vektory ${}^0e_{i+1}, \ldots, {}^0e_n$ $(1 \leqq \leqq i \leqq n - 1)$.*

Prostory $R_i(0)$ a $S_i(s)$ mají zřejmě právě jeden společný bod $c_i(s) \in M_n(\sigma)$. Pak platí

$$\text{a)} \lim_{s\to 0+} \frac{\sigma[c_i(s), k(s)]}{s^{i+1}} = \frac{1}{(i+1)!} \cdot {}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_i ; \tag{46}$$

pokud ${}^0\varkappa_{j-1} > 0$, pak

$$\text{b)} \lim_{s\to 0+} \frac{\sigma[c_j(s), k(s)]}{s \cdot \sigma[c_{j-1}(s), k(s)]} = \frac{1}{j+1} \cdot {}^0\varkappa_j \quad (2 \leqq j \leqq n-1), \tag{47}$$

kde ${}^0\varkappa_i$ je i-tá křivost křivky k v jejím počátku $k(0)$.

Důkaz. Pro průvodič $r(s)$ bodu $k(s)$ křivky k platí rozvoj (45). Snadno zjistíme, že pro průvodič $r_i(s)$ bodu $c_i(s)$ platí

$$r_i(s) = {}^0r_i + {}^0e_1 \left[s + \frac{s^3}{3!} \cdot {}^0\beta_{2,1} + \ldots + \frac{s^n}{n!} \cdot {}^0\beta_{n-1,1} + o(s^n) \right] +$$
$$+ \sum_{j=2}^{i} {}^0e_j \left[{}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_{j-1} \frac{s^j}{j!} + {}^0\beta_{j,j} \frac{s^{j+1}}{(j+1)!} + \ldots + {}^0\beta_{n-1,j} \frac{s^n}{n!} + o(s^n) \right]. \tag{48}$$

Vzdálenost $\sigma[c_i(s), k(s)]$ bodů $c_i(s)$, $k(s)$ v $M_n(\sigma)$ je rovna normě vektoru $r(s) - r_i(s)$. Podle (45) a (48) jest

$$r(s) - r_i(s) = {}^0e_{i+1} \cdot {}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_i \frac{s^{i+1}}{(i+1)!} + o(s^{i+1}).$$

Odtud plyne, že

$$\|r(s) - r_i(s)\| = {}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_i \frac{s^{i+1}}{(i+1)!} \|{}^0e_{i+1} + o(1)\| . \tag{49}$$

Protože norma je spojitá funkce ve V_n a $\|{}^0e_{i+1}\| = 1$, dostáváme z (49) přímo (46). Limita (47) je pak přímým důsledkem (46).

Poznámka. Z (45) plyne, že $\|r(s) - {}^0r\|^2 = s^2\|{}^0e_1\| + o(s^2)$, takže platí $\lim_{s\to 0+} \frac{\sigma[k(0), k(s)]}{s} = 1$. Odtud snadno nahlédneme, že platí toto tvrzení: Nechť f je libovolná representace orientované křivky k, $f(0)$ její počátek. Pak místo (46) lze psát

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\sigma[c_i(t), f(t)]}{\sigma^{i+1}(f(0), f(t))} = \frac{1}{(i+1)!} {}^0\varkappa_1 \ldots {}^0\varkappa_i .$$

Nakonec uvedeme jednu větu týkající se křivek v dvojrozměrném prostoru Minkowského. Zachovávajíce předchozí označení a předpoklady, mějme v $M_2(\sigma)$ orientovanou křivku k o oblouku s, $s \in \langle 0, s_1 \rangle$. Buď $s > 0$. Předpokládejme, že křivost $\varkappa_1(s)$ křivky k je kladná. Označme $a(s)$ průsečík přímek $k(s) + \lambda_1 e_2(s)$, $k(0) + \lambda_2 e_2(0)$. Pak platí

Věta 4.4. *Pro vzdálenost $\sigma[k(0), a(s)]$ bodů $k(0)$ a $a(s)$ platí*

$$\lim_{s\to 0+} \sigma[k(0), a(s)] = \frac{1}{{}^0\varkappa_1 \,.\, ({}^0e_2, {}^0e_2)_{{}^0e_1}} \,. \tag{50}$$

Důkaz. Existuje λ_1 a λ_2 tak, že

$$a(s) = k(s) + \lambda_1(s)\, e_2(s)\,, \tag{51}$$

$$a(s) = k(0) + \lambda_2(s)\, {}^0e_2\,. \tag{52}$$

Odtud $\sigma(k(0), a(s)) = \sigma(k(0), k(0) + \lambda_2 e_2) = \|\lambda_2 e_2\| = \lambda_2(s)$, jestliže $\lambda_2(s) \geqq 0$. Spočteme nyní $\lambda_2(s)$. Z (51) a (52) plyne $k(s) - k(0) = -\lambda_1(s)\, e_2(s) + \lambda_2(s) \,.\, {}^0e_2$. Odtud

$$(e_1(s), k(s) - k(0)) = \lambda_2(s) \,.\, (e_1(s), {}^0e_2)\,. \tag{53}$$

Podle poznámky za větou 4.2 jest

$$k(s) - k(0) = s \,.\, {}^0e_1 + \frac{s^2}{2}\, {}^0\varkappa_1 \,.\, {}^0e_2 + o(s^2)\,. \tag{54}$$

Dosadíme-li (54) do (53), dostaneme, že

$$\lambda_2(s) = s \,.\, \frac{(e_1(s), {}^0e_1 + o(s))}{(e_1(s), {}^0e_2)} + \frac{s^2}{2}\, {}^0\varkappa_1\,. \tag{55}$$

Nyní $e_1(s) = {}^0e_1 + s \,.\, {}^0e_1' + o(s)$, avšak ${}^0e_1' = {}^0\varkappa_1 \,.\, {}^0e_2$; tedy $e_1(s) = {}^0e_1 + s\varkappa_1 {}^0e_2 + o(s)$. Odtud plyne, že v příslušném lineárním souřadném systému (x) v $M_2(\sigma)$ jest

$$\begin{aligned}(e_1(s), {}^0e_2) &= g_{ij}({}^0e_1 + s \,.\, {}^0\varkappa_1 \,.\, {}^0e_2 + o(s)) \,.\, [{}^0e_1^i + s\,{}^0\varkappa_1 {}^0e_2^i + o^i(s)] \,.\, {}^0e_2^j = \\ &= \left\{ g_{ij}({}^0e_1) + \frac{\partial g_{ij}({}^0e_1)}{\partial x'^k} [s \,.\, {}^0\varkappa_1 {}^0e_2^k + o^k(s)] + o_{ij}(s) \right\} . \\ &\quad .\, [{}^0e_1^i + s \,.\, {}^0\varkappa_1 {}^0e_2^i + o^i(s)] \,.\, {}^0e_2^j\,.\end{aligned}$$

Odtud již snadno zjistíme, že

$$\lim_{s\to 0+} \frac{(e_1(s), {}^0e_2)}{s} = {}^0\varkappa_1 \,.\, ({}^0e_2, {}^0e_2)_{{}^0e_1}\,. \tag{56}$$

Protože zřejmě $\lim_{s\to 0+} (e_1(s), {}^0e_1 + o(s)) = ({}^0e_1, {}^0e_1) = 1$ a $\lim_{s\to 0+} \frac{1}{2} s^2\, {}^0\varkappa_1 = 0$, dostáváme z (55) a (56) rovnost (50).

LITERATURA

[1] *H. Busemann:* Metric methods in Finsler spaces and in the foundations of geometry, Annals of Mathematics Studies, *8*, Princeton 1942.

[2] *А. И. Мальцев:* Основы линейной алгебры, Moskva-Leningrad 1948.

[3] *H. Rund:* Über Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen, Math. Zeitschrift, *56* (1951), 115—128.

[4] *Veblen-Whitehead:* The foundations of differential geometry, Cambridge 1932.

Резюме

КРИВЫЕ В ПРОСТРАНСТВАХ МИНКОВСКОГО

ВАЦЛАВ ВИЛЬГЕЛЬМ, Прага.

(Поступило в редакцию 30/V 1956 г.)

В n-мерном пространстве Минковского M_n изберем декартову систему координат (x). Пусть метрический тензор пространства M_n имеет в этой системе составляющие $g_{ij}(\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$. Предположим, что $g_{ij}(\dot{x})$ имеет непрерывные частные производные для каждого ненулевого вектора $\dot{x}$ и что $\det \|g_{ij}(\dot{x})\| \neq 0$. Определим, далее, для каждой тройки векторов $a, b, c \neq 0$ из M_n *скалярное произведение* $(a, b)_c$ *векторов* a, b *в направлении вектора* c: $(a, b)_c = g_{ij}(c^1, \dots, c^n)\, a^i b^j$. *Скалярным произведением векторов* a, b, где $a \neq 0$ разумеется число $(a, b) = (a, b)_a$. При помощи этого скалярного произведения можно определить *ортонормированный базис* в M_n, как упорядоченную n-членную совокупность векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ такую, что $(e_i, e_j) = \delta^i_j$ для $i \leqq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть k—ориентированная достаточно гладкая кривая в M_n, с дугой s, нележащая ни в каком собственном линейном подпространстве данного пространства M_n. В данной статье показано построение, которое каждой точке упомянутой кривой с параметром s ставит в соответствие $n - 1$ кривизн $\varkappa_1(s), \varkappa_2(s), \dots, \varkappa_{n-1}(s)$ и ортонормированную систему $e_1(s), e_2(s), \dots$ $\dots, e_n(s)$, где $e_1(s)$ — касательная, а $e_{i+1}(s)$ $(1 \leqq i < n)$ i-тая нормаль к данной кривой k. Для производной вектора $e_i(s)$ тогда справедливо

$$e_i' = -\alpha_{i1}e_1 - \dots - \alpha_{ii}e_i + \varkappa_i e_{i+1} \quad (1 \leqq i \leqq n)\,, \tag{1}$$

где положено $\varkappa_{n+1} = 0$, $e_{n+1} = 0$, скаляры α_{ij} определенны рекурентно уравнениями

$$\begin{gathered}
\alpha_{i1} = \varkappa_1(e_2, e_i)_{e_1}\,,\\
\alpha_{i1}(e_2, e_1) + \alpha_{i2} = -\alpha_{21}(e_1, e_i)_{e_2} + \varkappa_2(e_3, e_i)_{e_2}\,,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}(e_{i-1}, e_j) = -\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i-1,j}(e_j, e_i)_{e_{i-1}} + \varkappa_{i-1}(e_i, e_i)_{e_{i-1}}\,,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\alpha_{i1}(e_i, e_1) + \dots + \alpha_{ii} = 0\,.
\end{gathered} \tag{2}$$

Векторы $e_1(s), e_2(s), \dots, e_n(s)$ будем называть основным n-гранником ориентированной кривой k в точке с параметром s.

Пользуясь формулами Френе (1), (2), доказывает автор следующую теорему:

Две ориентированные кривые k_1, k_2 совпадают тогда и только тогда, если длины их дуг одинаковы и если они имеют всюду одинаковые кривизны и в начальных точках равные основные n-гранники. Для каждой совокупности положительных непрерывных функций $\varkappa_1(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$, $0 \leqq s \leqq s_1$ и для данного ортонормированного базиса существует ориентированная кривая, дуга которой есть s, i-тая кривизна $\varkappa_i(s)$, а основной n-гранник в точке с параметром $s = 0$ — данный базис.

В следующей теореме описано геометрическое значение кривизны:

Символом $R_i(0)$ обозначим i-тое соприкасающееся пространство ориентированной кривой k в точке $k(0)$, символом $S_i(s)$—линейное пространство в M_n, определенное точкой $k(s)$, $s > 0$, и векторами $e_{i+1}(0), \ldots, e_n(0)$, $1 \leqq i \leqq n - 1$. Пусть $a(s)$ означает общую точку пространств $R_i(0)$ и $S_i(s)$. Тогда

$$\lim_{s \to 0+} \frac{\sigma[a(s), k(s)]}{s^{j+1}} = \frac{1}{(j+1)!} \cdot {}^0\varkappa_1 \cdot {}^0\varkappa_2 \ldots {}^0\varkappa_j \,,$$

где $\sigma[a(s), k(s)]$ — расстояние между точками $a(s)$, $k(s)$ в M_n[1]*, а ${}^0\varkappa_j = \varkappa_j(0)$ — j-тая кривизна кривой в точке $k(0)$.*

Zusammenfassung

KURVEN IN MINKOWSKISCHEN RÄUMEN

VÁCLAV VILHELM, Praha.

(Eingelangt 30. V. 1956.)

In einem n-dimensionalen Minkowskischen Raum M_n sei ein kartesisches Koordinatensystem (x) gewählt; der metrische Tensor des Raumes M_n habe im Koordinatensystem (x) die Komponenten $g_{ij}(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n)$. Von diesen Komponenten soll vorausgesetzt werden, dass sie stetig differenzierbar in jedem nicht verschwindenden Vektor $\dot{x}$ sind und dass für den Vektor $\dot{x}$ die Determinante $|g_{ij}(\dot{x})|$ nicht verschwindet. Für drei Vektoren $a, b, c \neq 0$ aus M_n definieren wir *das skalare Produkt* $(a, b)_c$ *der Vektoren* a, b *in der Richtung des Vektors* c: $(a, b)_c = g_{ij}(c^1, \ldots, c^n) \cdot a^i b^j$. Unter dem *skalaren Produkt zweier Vektoren* d, e, $d \neq 0$, verstehen wir die Zahl $(d, e) = (d, e)_d$. Mit Hilfe dieses skalaren Produktes definieren wir weiter *die orthonormale Basis* in M_n als ein geordnetes System von Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$, welche die folgende Bedingung erfüllen: $(e_i, e_j) = \delta^i_j$ für $i \leqq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

[1]) Т. е. $\sigma^2[a(s), k(s)] = g_{ij}[k(s) - a(s)] \cdot [k^i(s) - a^i(s)] \cdot [k^j(s) - a^j(s)]$, где $a^j(s)$ и $k^j(s)$ являются j-тыми координатами, соответственно, точек $a(s)$, $k(s)$ в системе координат (x).

Jetzt sei eine, in keinem eigenen linearen Unterraum des M_n liegende und genügend glatte orientierte Kurve k mit dem Bogenparameter s gegeben. In der vorliegenden Arbeit sind dieser Kurve k in jedem ihren Punkte mit dem Parameter s $n-1$ Krümmungen $\varkappa_1(s), \varkappa_2(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$ und eine bestimmte orthonormale Basis $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_n(s)$ zugeordnet, wo $e_1(s)$ die Tangente, $e_{i+1}(s)$ $(1 \leqq i < n)$ die i-te Normale der Kurve vorstellt.

Für die Ableitung $e_i'(s)$ des Vektors $e_i(s)$ gilt dabei

$$e_i' = -\alpha_{i1}e_1 - \ldots - \alpha_{ii}e_i + \varkappa_i e_{i+1} \quad (1 \leqq i \leqq n)\,; \tag{1}$$

hier setzt man $\varkappa_{n+1} = 0$, $e_{n+1} = 0$ und die Skalare α_{ij} sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_{i1} &= \varkappa_1 \,.\, (e_2, e_1)_{e_1}\,, \\ \alpha_{i1}(e_2, e_1) + \alpha_{i2} &= -\alpha_{21}(e_1, e_i)_{e_2} + \varkappa_2(e_3, e_i)_{e_2}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}(e_{i-1}, e_j) &= -\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i-1,j}(e_j, e_i)_{e_{i-1}} + \varkappa_{i-1}(e_i, e_i)_{e_{i-1}}\,, \\ \alpha_{i1}(e_i, e_1) + \ldots + \alpha_{ii} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

bestimmt. Die Vektoren $e_1(s), e_2(s), \ldots, e_n(s)$ bilden das sogenannte fundamentale n-Bein der Kurve k im Punkte mit dem Parameter s.

Aus den Frenetschen Formeln (1), (2) folgt der folgende Satz:

Zwei orientierte Kurven k_1, k_2 in M_n sind isometrisch (d. h. es gibt eine isometrische Transformation in M_n, welche k_1 in k_2 überführt) dann und nur dann, wenn sie gleiche Bogenlänge, überall gleiche Krümmungen und im Anfangspunkt isometrische fundamentale n-Beine besitzen. Zu jeden positiven stetigen Funktionen $\varkappa_1(s), \varkappa_2(s), \ldots, \varkappa_{n-1}(s)$, $0 \leqq s \leqq s_1$, und zu jeder orthonormalen Basis gibt es eine orientierte Kurve, deren Bogen s, i-te Krümmung $\varkappa_i(s)$ und die gegebene Basis ihr fundamentales n-Bein im Punkte mit dem Parameter $s = 0$ ist.

Die geometrische Bedeutung der Krümmungen ist durch den folgenden Satz beschrieben:

Bezeichnen wir mit $R_i(0)$ den i-ten oskulierenden Raum der orientierten Kurve k im Punkte $k(0)$; $S_i(s)$ sei der durch den Punkt $k(s)$, $s > 0$, und durch die Vektoren $e_{i+1}(0), \ldots, e_n(0)$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ bestimmte lineare Unterraum in M_n. Ist $a(s)$ der gemeinsame Punkt der Räume $R_i(0)$ und $S_i(s)$, so gilt

$$\lim_{s \to 0+} \frac{\sigma[a(s), k(s)]}{s^{j+1}} = \frac{1}{(j+1)!} \,.\, {}^0\varkappa_1 \,.\, {}^0\varkappa_2 \ldots {}^0\varkappa_j\,,$$

wo $\sigma[a(s), k(s)]$ der Abstand der Punkte $a(s)$, $k(s)$ in M_n[1]*) und ${}^0\varkappa_j = \varkappa_j(0)$ die j-te Krümmung der Kurve k im Punkte $k(0)$ ist.*

[1]) D. h. $\sigma^2[a(s), k(s)] = g_{ij}(k(s) - a(s))\,.\,[k^i(s) - a^i(s)]\,.\,[k^j(s) - a^j(s)]$ im Koordinatensystem (x).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

PŘÍSPĚVEK K THEORII NORMÁLNÍ KŘIVKY ČTYRROZMĚRNÉHO PROSTORU

KAREL SVOBODA, Brno.

(Došlo dne 20. června 1956.) DT: 513.616

V této práci je uvažována jednoduchá příbuznost, v níž si odpovídají přímky kubické nadplochy s dvojnou racionální normální křivkou čtvrtého stupně ve čtyrrozměrném prostoru. Tato příbuznost je určena tečnými prostory nadplochy.

1. Buď C racionální normální křivka čtvrtého stupně v projektivním čtyrrozměrném prostoru a J kubická nadplocha s dvojnou křivkou C. Připomeňme nejprve některé vlastnosti křivky C a nadplochy J, které uvádí na př. H. G. TELLING v knize *The Rational quartic Curve in Space of three and four Dimensions* (Cambridge University Press, London, 1936).

Nadplocha J obsahuje dvě soustavy přímek, a to soustavu bisekant křivky C, jimiž je vytvořena, a soustavu řídicích přímek kvadratických involucí na křivce C. Přímky první soustavy nazveme *binárními* a přímky druhé soustavy *unárními přímkami nadplochy* J. Obecným bodem této nadplochy, který neleží na křivce C, jdou celkem tři přímky nadplochy, a to jedna binární a dvě unární přímky; jedna z obou unárních přímek splyne s příslušnou binární přímkou právě tehdy, když uvažovaný bod je na tečně křivky C.

Zvolme na nadploše J libovolnou unární přímku u, která není tečnou křivky C. Binární přímky, které protínají tuto unární přímku, určují na křivce C kvadratickou involuci a tvoří kubickou plochu $[u]$, jejíž řídicí přímkou je unární přímka u. Plocha $[u]$ obsahuje dvě tečny křivky C v samodružných bodech M, N uvedené involuce. Je-li přímka u tečnou křivky C v bodě P, je plocha $[u]$ kubickým kuželem, který má vrchol v bodě P a prochází křivkou C. Prostory, které se dotýkají nadplochy J podél binárních přímek plochy $[u]$, vytvoří kvadratickou kuželovou nadplochu druhého druhu, jejíž vrcholovou hranou je přímka u. Kubické plochy $[u_1]$ a $[u_2]$, určené dvěma různými unárními přímkami u_1 a u_2, mají společnou právě jednu binární přímku, jejíž průsečíky s křivkou C tvoří společný pár obou involucí, určených na křivce C unárními přímkami u_1 a u_2.

Unární přímky, které protínají danou binární přímku b, určenou body M, N křivky C, tvoří kubickou zborcenou plochu (b), v níž je nadplocha J proťata prostorem, který se jí dotýká podél přímky b. Plocha (b) má v přímce b dvojnou přímku a v tečnách křivky C v bodech M, N torsální přímky. Jednoduchou přímkou plochy (b) je unární přímka u, ležící v rovině společné oskulačním prostorům křivky C v bodech M, N. Je-li přímka b tečnou křivky C v bodě P, splyne jednoduchá přímka u plochy (b) s přímkou b. Dvě zborcené kubické plochy (b_1) a (b_2), určené na nadploše J jejími binárními přímkami b_1 a b_2, mají společnou unární přímku, ležící v rovině, v níž se protínají prostory dotýkající se nadplochy J podél binárních přímek b_1 a b_2.

Přiřaďme každé binární přímce b nadplochy J tu unární přímku u, která je jednoduchou přímkou zborcené plochy (b), v níž je nadplocha J proťata prostorem dotýkajícím se jí podél binární přímky b. Je-li binární přímce b přiřazena tímto způsobem unární přímka u, je zřejmé, že obráceně unární přímce u přísluší jednoznačně binární přímka b, neboť unární přímkou prochází právě jeden tečný prostor nadplochy J, který se jí dotýká podél binární přímky b, jíž jsme přiřadili unární přímku u. Odtud je patrno, že *tečné prostory nadplochy J určují jednojednoznačnou příbuznost mezi binárními a unárními přímkami.* Unární (binární) přímku, která je v této příbuznosti přiřazena dané binární (unární) přímce, nazveme *unární (binární) přímkou sdruženou k dané binární (unární) přímce vzhledem ke křivce C.* Nebude-li obav z nedorozumění, budeme mluviti jednodušeji o dvojici sdružených přímek na nadploše J vzhledem ke křivce C.

Z předcházejících poznámek je patrno, že *binární přímka splývá se sdruženou unární přímkou právě tehdy, když je tečnou křivky C.* Plocha tečen křivky C je tedy množinou přímek nadplochy J, které splývají se svými sdruženými přímkami. Není-li binární přímka tečnou křivky C, určuje dvě různé její tečny, které protínají sdruženou unární přímku. Odtud plyne, že výše uvedená příbuznost je dokonale určena dvojicemi tečen křivky C.

2. Odvodíme některé jednoduché vlastnosti sdružených binárních a unárních přímek na nadploše J. Použijeme k tomu jistého zobrazení nadplochy J na rovinu, přestože by nebylo obtížné postupovati přímými úvahami ve čtyrrozměrném prostoru. Za tím účelem objasníme nejprve podstatu tohoto zobrazení, jímž se zabýval R. K. WAKERLING v pojednání *The Chordal Hypersurfaces of a rational Curve* (Duke Mathematical Journal, Vol. 14, 1947).

Zvolme pevnou oskulační rovinu π křivky C. Oskulační prostory křivky C protínají rovinu π v přímkách, jejichž obálkou je regulární kuželosečka K. Tímto způsobem je určeno jednojednoznačné zobrazení bodů křivky C na tečny kuželosečky K. Binární přímka b nadplochy J protíná křivku C v bodech M, N, jimž jsou v tomto zobrazení přiřazeny tečny m, n kuželosečky K. Přiřadíme-li nyní binární přímce b průsečík tečen m, n, dostaneme jednojednoznačné zobrazení binárních přímek nadplochy J na body roviny π, v němž tečnám křivky C přísluší body kuželosečky K. Tato kuželosečka je tedy obrazem plochy tečen křivky C.

Každé ploše, která je na nadploše J vytvořena jejími binárními přímkami, odpovídá v uvažovaném zobrazení v rovině π množina bodů na křivce. Pro naše účely je třeba zjistiti obraz binárních přímek, které tvoří kubickou plochu $[u]$. Dvojice oskulačních prostorů křivky C, určených v průsečících křivky C s binárními přímkami plochy $[u]$, jsou páry kvadratické involuce a protínají tedy rovinu π v dvojicích tečen kuželosečky K, tvořících na ní kvadratickou involuci. Obrazy jednotlivých binárních přímek plochy $[u]$ jsou proto průsečíky odpovídajících si tečen uvedené involuce na kuželosečce K a vyplňují osu této involuce. V uvažovaném zobrazení odpovídá tedy ploše $[u]$ přímka v rovině π a její průsečíky s kuželosečkou K jsou obrazy tečen křivky C ležících na ploše $[u]$. Právě uvedenou přímku v rovině π přiřadíme unární přímce u, čímž dostaneme jednojednoznačné zobrazení unárních přímek nadplochy J na množinu přímek v rovině π.

Z předcházejících poznámek je patrno, že binární přímka protíná unární přímku tehdy a jen tehdy, když bod zobrazující v rovině π binární přímku leží na přímce, která je obrazem unární přímky. Odtud plyne, že obrazem zborcené kubické plochy, vytvořené unárními přímkami protínajícími danou binární přímku, je svazek přímek, jehož vrcholem je obraz dvojné binární přímky této plochy.

V dalším budeme značiti stejným písmenem binární (unární) přímku nadplochy J i její obraz v rovině π.

3. Mějme nyní na nadploše J dvojici přímek sdružených vzhledem ke křivce C, a to binární přímku b a unární přímku u. Je-li binární přímka tečnou křivky C, splývá v této tečně také sdružená unární přímka. Obrazem této dvojice přímek na rovině π je pak bod b na kuželosečce K a její tečna u v bodě b. V opačném případě binární přímka b nesplývá se sdruženou unární přímkou u a protíná křivku C ve dvou různých bodech M, N, jejichž tečny označíme m, n. Obrazem zborcené plochy (b) je svazek přímek s vrcholem v bodě b, do něhož patří také obě tečny m, n, vedené bodem b ke kuželosečce K a zobrazující torsální přímky m, n plochy (b). Unární přímka u sdružená s binární přímkou b vzhledem ke křivce C je jednoduchou přímkou plochy (b) a určuje kubickou plochu $[u]$, na niž leží také tečny m, n křivky C. Obrazem této plochy na rovině π je přímka u, která prochází body dotyku tečen m, n kuželosečky K. Odtud je patrno, že *binární přímka b a s ní sdružená unární přímka u se zobrazují do roviny π jako bod b a přímka u, odpovídající si v polaritě určené v rovině π kuželosečkou K.* Obráceně lze snadno nahlédnouti, že bodu a jeho poláře vzhledem ke kuželosečce K odpovídají v uvažovaném zobrazení binární a unární přímka, které jsou k sobě přiřazeny ve výše uvedené příbuznosti přímek na nadploše J.

Užitím tohoto výsledku lze nyní snadno odvoditi vlastnosti sdružených přímek na nadploše J ze známých polárních vlastností kuželosečky. Provedeme to jen v několika příkladech, které mají jednoduchý geometrický význam pro soustavy kubických ploch na nadploše J.

Je-li b, u dvojice přímek sdružených vzhledem ke křivce C, leží binární přímka b' na ploše $[u]$ tehdy a jen tehdy, když sdružená unární přímka u' leží na ploše (b).

Tato vlastnost se získá z věty o záměnnosti pólu a poláry vzhledem ke kuželosečce. Uvedenou vlastnost lze vysloviti tak, aby lépe vynikl její geometrický význam pro řídicí přímky zborcených kubických ploch na nadploše J.

Dvojná přímka zborcené plochy (b') protíná jednoduchou přímku zborcené plochy (b) tehdy a jen tehdy, když dvojná přímka plochy (b) protíná jednoduchou přímku plochy (b').

Z předcházejícího výsledku plyne okamžitě tato vlastnost:

Jsou-li b_1, u_1 a b_2, u_2 dvě dvojice přímek sdružených vzhledem ke křivce C, je binární přímka b, určená unárními přímkami u_1, u_2, sdružena s unární přímkou, určenou binárními přímkami b_1, b_2.

Pro řídicí přímky uvažovaných ploch na nadploše J tedy dostáváme tento výsledek, vyjadřující v jiném tvaru právě uvedenou vlastnost.

Jsou-li (b_1) a (b_2) dvě zborcené kubické plochy na nadploše J, je binární přímka b, určená jednoduchými přímkami těchto ploch, dvojnou přímkou a unární přímka u, určená jejich dvojnými přímkami, jednoduchou přímkou téže zborcené kubické plochy na nadploše J.

Uveďme ještě následující vlastnost sdružených přímek na nadploše J, jejíž správnost je bezprostředně patrna z předcházejících výsledků.

Nechť b, u je dvojice přímek sdružených vzhledem ke křivce C. Probíhá-li binární přímka b' tvořicí přímky plochy $[u]$, probíhá sdružená unární přímka u' tvořicí přímky plochy (b). Probíhá-li unární přímka u' tvořicí přímky plochy (b), probíhá sdružená binární přímka b' tvořicí přímky plochy $[u]$.

Pro zborcené kubické plochy na nadploše J odtud dostáváme tento výsledek:

Dvojné přímky zborcených kubických ploch, jejichž jednoduché přímky vyplňují plochu (b), tvoří kubickou plochu $[u]$ s řídicí přímkou v jednoduché přímce u plochy (b). Jednoduché přímky zborcených kubických ploch, jejichž dvojné přímky vyplňují plochu $[u]$ s řídicí přímkou v jednoduché přímce u plochy (b), tvoří zborcenou kubickou plochu (b).

Podobným způsobem by bylo možné odvoditi ještě další vlastnosti sdružených přímek na nadploše J.

4. Ve shodě s pojmy zaváděnými v polární theorii kuželoseček nazveme *dvě binární (unární) přímky nadplochy J sdruženými vzhledem ke křivce C, když každá z nich protíná unární (binární) přímku sdruženou s druhou.* Odtud je patrno, že binární přímky sdružené s danou binární přímkou b tvoří kubickou plochu $[u]$, jejíž řídicí přímkou je unární přímka u sdružená s binární přímkou b. Podobně, unární přímky sdružené s danou unární přímkou u tvoří zborcenou kubickou plochu (b), jejíž dvojnou přímkou je binární přímka b sdružená s unární přímkou u.

Uvedeme nyní — na základě známých vlastností dvou polárně sdružených bodů nebo přímek vzhledem ke kuželosečce — nutné a postačující podmínky pro to, aby dvě binární nebo unární přímky byly sdruženy vzhledem ke křivce C. Za tím účelem přiřadíme každé binární nebo unární přímce dva (různé nebo splývající) body křivky C a dvě (různé nebo splývající) její tečny, a to tak, že binární přímce budou přiřazeny její průsečíky s křivkou C a tečny v těchto bodech a unární přímce tečny křivky C na ploše, jejíž řídicí přímkou je tato unární přímka, a jejich body dotyku s křivkou C. Je zřejmé, že dané binární a unární přímce jsou tímto způsobem přiřazeny tytéž body a přímky právě tehdy, když dané přímky jsou sdruženy vzhledem ke křivce C.

Užitím této úmluvy a známých polárních vlastností kuželosečky dostaneme pro sdružené binární nebo unární přímky tento výsledek.

Dvě binární (unární) přímky nadplochy J jsou sdruženy vzhledem ke křivce C tehdy a jen tehdy, když dvojice bodů nebo přímek jim přiřazených tvoří na křivce C harmonickou čtveřinu.

Vzhledem k jednojednoznačnému zobrazení binárních a unárních přímek nadplochy J na body a přímky roviny π a vzhledem k tomu, že kuželosečka indukuje na přímce involuci sdružených pólů a v bodě involuci sdružených polár, můžeme na nadploše J mluviti také o involuci sdružených binárních nebo unárních přímek. Připomenuté polární vlastnosti kuželosečky nás vedou tedy k poznatku, že sdružené binární přímky na ploše $[u]$ tvoří involuci binárních přímek, jejíž samodružné přímky jsou tečny křivky C, přiřazené unární přímce u. Podobně, sdružené unární přímky na ploše (b) tvoří involuci unárních přímek, jejíž samodružné přímky jsou tečny křivky C, přiřazené binární přímce b.

Všimneme si nejprve případu sdružených binárních přímek na ploše $[u]$. Přiřadíme-li každé binární přímce plochy $[u]$ její průsečík s unární přímkou u, dostaneme jednojednoznačnou příbuznost mezi binárními přímkami uvažované plochy a řadou bodů na přímce u. Odtud ihned plyne, že involuce binárních přímek na ploše $[u]$ určuje na unární přímce bodovou involuci se samodružnými body v průsečících unární přímky u s přiřazenými tečnami křivky C. Vzhledem k tomu můžeme předcházející nutnou a postačující podmínku pro sdružené binární přímky vysloviti v tomto tvaru.

Dvě binární přímky nadplochy J jsou sdruženy vzhledem ke křivce C tehdy a jen tehdy, když jejich průsečíky s unární přímkou u, která je jimi určena, oddělují harmonicky průsečíky přímky u s přiřazenými tečnami křivky C.

Obrátíme se ještě k případu sdružených unárních přímek na ploše (b). V tomto případě neexistuje jednojednoznačné přiřazení unárních přímek plochy (b) a jejich průsečíků s přímkou b. Lze však takové přiřazení získati mezi body unární přímky u sdružené s binární přímkou b a unárními přímkami plochy (b). Úvahou podobnou předcházejícímu postupu pak dostaneme výsledek, který lze ostatně jednoduše odvoditi z užívaného zobrazení na rovinu π.

Dvě unární přímky nadplochy J jsou sdruženy vzhledem ke křivce C tehdy a jen tehdy, když jejich průsečíky s unární přímkou u, která je vzhledem ke křivce C sdružena s binární přímkou určenou danými unárními přímkami, oddělují harmonicky průsečíky přímky u s přiřazenými tečnami křivky C.

Involuce na uvedené unární přímce je však vyťata dvojicemi tvořících přímek plochy (b), které jdou týmž bodem přímky b. Předcházející výsledek lze tedy vyjádřiti v tomto jednoduchém tvaru.

Dvě unární přímky nadplochy J jsou sdruženy vzhledem ke křivce C tehdy a jen tehdy, když se protínají.

Резюме

К ТЕОРИИ НОРМАЛЬНОЙ КРИВОЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

КАРЕЛ СВОБОДА (Karel Svoboda), Брно.

(Поступило в редакцию 20/VI 1956 г.)

Касательные пространства кубической гиперповерхности J четырехмерного проективного пространства, имеющей двойную рациональную нормальную кривую C четвертого порядка, пересекают гиперповерхность J в косых линейчатых кубических поверхностях, директрисы которых соответствуют друг другу, находясь во взаимно-однозначном соответствии. При помощи отображения прямых гиперповерхности J на плоскость показано, что образом этого соответствия является полярное соответствие по отношению к регулярной кривой второго порядка, отображающей поверхность касательных к кривой C, и выведено несколько свойств указанного соответствия.

Résumé

CONTRIBUTION À LA THÉORIE D'UNE COURBE NORMALE D'UN ESPACE À QUATRE DIMENSIONS

KAREL SVOBODA, Brno.

(Reçu le 20 juin 1956.)

Les espaces tangents de l'hypersurface cubique J d'un espace projectif à quatre dimensions, qui a une courbe rationnelle normale C du quatrième

degré pour courbe double, coupent l'hypersurface J en surfaces réglées gauches du troisième degré, dont les directrices rectilignes se correspondent dans une correspondance biunivoque. Faisant usage d'une représentation des droites de l'hypersurface J sur un plan, on démontre que cette correspondance a pour son image la correspondance polaire par rapport à la conique regulière, qui représente la surface des tangentes de la courbe C, et on déduit quelques propriétés de la correspondance en question.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

РАСШИРЕНИЕ МЕРЫ НА σ-КОЛЬЦО, СОДЕРЖАЩЕЕ ВСЕ ОДНОТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

ВАЦЛАВ ФАБИАН (Václav Fabian), Прага.

(Поступило в редакцию 11/XI 1955 г.) DT: 519.48

В настоящей работе показано, что для каждой меры существует такое ее расширение ν, что каждый атом является ν-измеримым. Отсюда следует, что всякая мера допускает расширение на σ-кольцо, содержащее все одноточечные множества.

Пусть μ — мера, то есть σ-аддитивная неотрицательная множественная функция, определенная на σ-кольце подмножеств множества X. Область определения меры ν обозначим символом $\mathbf{S}_\nu$. Мы говорим, что ν является расширением μ и пишем $\nu \succ \mu$, если ν есть мера, $\bigcup \mathbf{S}_\nu = X$, $\mathbf{S}_\nu \supset \mathbf{S}_\mu$ и $\nu(A) = \mu(A)$ для всякого $A \in \mathbf{S}_\mu$. Если ν — мера, то ν^* соотв. ν_* означает внешнюю, соотв. внутреннюю меру, индуцированную мерой ν. Если $\mathbf{M}$ — система множеств, то символ $\sigma(\mathbf{M})$ означает наименьшее σ-кольцо, содержащее систему $\mathbf{M}$. В частности, $\sigma(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Для любой меры ν и любого $x \in X$ обозначим

$$A_\nu(x) = \bigcap \{A;\ x \in A \in \mathbf{S}_\nu\};$$

множества $A_\nu(x)$ мы называем ν-атомами и их систему обозначаем через $\mathbf{A}_\nu$. В частности, если $\nu \doteq \mu$, то мы пишем вместо $\mathbf{S}_\mu$, $A_\nu(x)$, $\mathbf{A}_\nu$ только $\mathbf{S}$, $A(x)$, $\mathbf{A}$ и говорим просто об атомах. Ясно, что $\mathbf{A}$ есть разбиение множества X на классы.

Лемма 1. *Для каждой последовательности атомов A_i существует последовательность $\mathbf{S}$-измеримых множеств B_i так, что для любого i имеем $B_i \supset A_i$ и неравенство $A_i \neq A_j$ влечет за собой $B_i \cap B_j = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть $A_i = A(x_i) \neq A_j = A(x_j)$. Тогда существует такое $A \in \mathbf{S}$, что $x_i \in A$, $x_j \operatorname{non} \in A$ и такое $B \in \mathbf{S}$, что $x_i \operatorname{non} \in B$, $x_j \in B$. Если положить $C_{ij} = A - B$ и $C_{ji} = B - A$, то получаем $x_i \in C_{ij}$, $x_j \in C_{ji}$, $C_{ij} \cap C_{ji} = \emptyset$.

Предположим, что мы уже выделили таким образом множества C_{ij} для всех индексов i, j, для которых $A_i \neq A_j$. Для остальных положим $C_{ij} = C$, где C есть элемент $\mathbf{S}$ и $C \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Покажем теперь, что множества $B_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_{ij}$ обладают требуемым свойством. Имеем $B_i \in \mathbf{S}$, $A_i \subset C_{ij}$ для всех j, откуда $A_i \subset B_i$. Если для индексов i и j имеет место $A_i \neq A_j$, то $B_i \cap B_j \subset C_{ij} \cap C_{ji} = \emptyset$.

Обозначим теперь символом $\mathbf{N}$ систему всех *неизмеримых атомов*, т. е. $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{S}$. Далее *обозначим*

$$\mathbf{M} = \sigma(\mathbf{N}) = \{\bigcup \mathbf{B};\ \mathbf{B} \subset \mathbf{N},\ \mathbf{B} \text{ — не более, чем счетная система}\}.$$

Лемма 2. *Имеет место*

$$\mathbf{M} \cap \mathbf{S} = \{\emptyset\}\,, \tag{1}$$

$$A \in \mathbf{M}\,,\quad B \in \mathbf{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathbf{M} \tag{2}$$

и

$$A \in \mathbf{M}\,,\quad B \in \mathbf{S}\,,\quad B \subset A \Rightarrow B = \emptyset\,. \tag{3}$$

Доказательство. Докажем соотношение (1). Пусть $\emptyset \neq A \in \mathbf{M} \cap \mathbf{S}$. Можно написать $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, где k — натуральное число или символ ∞, а A_i — дизъюнктные атомы из $\mathbf{N}$. По лемме 1 существует последовательность дизъюнктных $B_i \in \mathbf{S}$ так, что $B_i \supset A_i$. Итак, $A_i = A \cap B_i \in \mathbf{S}$, что противоречит предположению $A_i \in \mathbf{N}$, и соотношение (1) доказано.

Докажем (2) и (3). Из соотношения $A \cap B \in \mathbf{N} \cup \{\emptyset\}$ для любых $A \in \mathbf{N}$, $B \in \mathbf{S}$ следует (2). Итак, если $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{S}$, $B \subset A$, то согласно (2) и (1) будет $B = A \cap B \in \mathbf{M} \cap \mathbf{S} = \{\emptyset\}$, что доказывает и соотношение (3).

Обозначим

$$\mathscr{H} = \{[A, M, N];\ A \in \mathbf{S},\ M \in \mathbf{M},\ N \in \mathbf{M},\ M \subset A,\ N \cap A = \emptyset\}\,.$$

Лемма 3.

$$\sigma(\mathbf{S} \cup \mathbf{N}) = \{B;\ B = (A - M) \cup N,\ [A, M, N] \in \mathscr{H}\} \tag{4}$$

$$\{[A_i, M_i, N_i] \in \mathscr{H} (i = 1, 2)\,,\ (A_1 - M_1) \cup N_1 = (A_2 - M_2) \cup N_2\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [A_1, M_1, N_1] = [A_2, M_2, N_2]. \tag{5}$$

Доказательство. Соотношение (4) очевидно. Пусть выполнены условия импликации (5). Тогда $A_2 - A_1 \subset N_1 \cup M_2$ и в силу (3) получаем $A_2 - A_1 = \emptyset$. Из симметрии следует $A_1 = A_2$. Отсюда и из соотношений $M_i \subset A_i$, $N_i \cap A_i = \emptyset$ следует $N_1 = N_2$ и $M_1 = M_2$. Этим и завершается доказательство.

Мы показали, что каждому множеству $B \in \sigma(\mathbf{S} \cup \mathbf{N})$ поставлен в однозначное соответствие элемент $[B^1, B^2, B^3] \in \mathscr{H}$ так, что $B = (B^1 - B^2) \cup B^3$.

Лемма 4. *Если* $B_1, B_2 \in \sigma(\mathbf{S} \cup \mathbf{N})$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, *то* $B_1^s \cap B_2^s = \emptyset$ *для* $s = 1, 2, 3$.

Доказательство. Очевидно, $B_1^3 \cap B_2^3 = \emptyset$. Далее имеем

$$B_1^1 \cap B_2^1 \subset (B_1 \cup B_1^2) \cap (B_2 \cup B_2^2) = (B_1 \cap B_2^2) \cup (B_2 \cap B_1^2) \cup (B_1^2 \cap B_2^2)\,.$$

Согласно (2), множество в правой части является, однако, элементом системы $\boldsymbol{M}$, следовательно, согласно (3), будет $B_1^1 \cap B_2^1 = \emptyset$ и тем более $B_1^2 \cap B_2^2 = \emptyset$.

Теорема 1. *Существует такое расширение ν меры μ, что*

$$\boldsymbol{A}_\nu = \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{S}_\nu . \tag{6}$$

Если f — множественная функция, определенная на $\boldsymbol{N}$, и если имеет место $\sum_{A \in N} f(A) < +\infty$,

$$A \in \boldsymbol{N} \Rightarrow 0 \leqq f(A) \leqq \mu^*(A) ,$$

то существует ν так, что справедливо (6) *и*

$$A \in \boldsymbol{N} , \quad \mu_*(A) < +\infty \Rightarrow \nu(A) = f(A) . \tag{7}$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы содержится во втором (достаточно, напр., выбрать $f = 0$), которое мы и докажем:

1. Если $\mu(\emptyset) = +\infty$, то положим $\nu(A) = +\infty$ для любого $A \in \sigma(\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{N})$. Очевидно, ν выполняет все требования теоремы 1.

2. Если же $\mu(\emptyset) < +\infty$, то $\mu(\emptyset) = 0$ и $\mu_*(A) = 0$ для любого $A \in \boldsymbol{M}$. Определим ν на $\sigma(\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{S}_\nu$ при помощи соотношений

$$A \in \boldsymbol{M} \Rightarrow \nu(A) = \sum_{A \supset A_i \in N} f(A_i) ,$$

$$A \in \boldsymbol{S}_\nu \Rightarrow \nu(A) = \mu(A^1) - \nu(A^2) + \nu(A^3) .$$

Это определение возможно, ибо по условиям теоремы $\nu(A) < +\infty$ для любого $A \in \boldsymbol{M}$. Заметим, что $\nu \succ \mu$ и, если определим $\nu_{\boldsymbol{M}}(A) = \nu(A)$ для $A \in \boldsymbol{M}$, то $\nu_{\boldsymbol{M}}$ — конечная мера на $\boldsymbol{M}$.

Докажем прежде всего, что ν неотрицательна; для этого достаточно доказать, что для любого $A \in \boldsymbol{S}_\nu$ будет $\nu(A^1) \geqq \nu(A^2)$. По определению A^i имеем $A^2 \subset A^1$. Из того, что $A^2 \in \boldsymbol{M}$, следует существование дизъюнктных последовательностей N_i, B_i таких, что $N_i \in \boldsymbol{N}$, $B_i \in \boldsymbol{S}$, $N_i \subset B_i$, $A^2 = \bigcup_{i=1}^k N_i \subset \bigcup_{i=1}^k B_i \subset A^1$. Итак, $\nu(A^2) = \sum_{i=1}^k f(N_i) \leqq \sum_{i=1}^k \mu^*(N_i) \leqq \sum_{i=1}^k \mu(B_i) \leqq \mu(A^1) = \nu(A^1)$ и неотрицательность ν доказана.

Докажем σ-аддитивность. Если $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность дизъюнктных множеств из $\boldsymbol{S}_\nu$, то по лемме 4 и последовательность $\{A_i^s\}_{i=1}^\infty$ будет последовательностью дизъюнктных множеств для любого $s = 1, 2, 3$.

Обозначим $H = (\bigcup_{i=1}^\infty A_i^2) \cap (\bigcup_{i=1}^\infty A_i^3)$ и обратим внимание, что $H \in \boldsymbol{M}$. Положим

$$A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i , \quad B_1 = \bigcup_{i=1}^\infty A_i^1 , \quad B_2 = \bigcup_{i=1}^\infty A_i^2 - H , \quad B_3 = \bigcup_{i=1}^\infty A_i^3 - H .$$

Имеем $B_1 \in \mathbf{S}$, $B_2 \in \mathbf{M}$, $B_3 \in \mathbf{M}$, $B_2 \subset B_1$. Кроме того $B_1 \cap B_3 = \emptyset$, так как если $x \in B_1 \cap B_3$, то существуют индексы i, j так, что $x \in A_i^1 \cap A_j^3$, то-есть, $x \in A_i^2$, ибо в противном случае было бы $i \neq j$, $x \in A_i \cap A_j = \emptyset$. Итак, $x \in A_i^2 \cap \cap A_j^3 \subset H$. Это, однако, невозможно, так как $B_1 \cap B_3 \cap H = \emptyset$. Итак, действительно, $B_1 \cap B_3 = \emptyset$.

Далее,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} [(A_i^1 - A_i^2) \cup A_i^3] = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^1 - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^2) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^3 = (B_1 - B_2) \cup B_3 .$$

Этим мы показали, что $A^s = B_s$ $(s = 1, 2, 3)$. Воспользуемся тем, что $\nu_{\mathbf{M}}$ есть конечная мера на $\mathbf{M}$:

$$\nu(A) = \mu(A^1) - \nu_{\mathbf{M}}(A^2) + \nu_{\mathbf{M}}(A^3) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^1) - \nu_{\mathbf{M}}(A^2 \cup H) + \nu_{\mathbf{M}}(A^3 \cup H) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^1) - \sum_{i=1}^{\infty} \nu_{\mathbf{M}}(A^2) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_{\mathbf{M}}(A_i^3) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} [\mu(A_i^1) - \nu(A_i^2) + \nu(A_i^3)] = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) .$$

Итак, ν — мера; из ее построения ясно, что она удовлетворяет (6) и (7) и является расширением меры μ.

Теорема 2. *Существует такое расширение ν_0 меры μ, что $\{x\} \in \mathbf{S}_{\nu_0}$ для любого $x \in X$.*

Доказательство. Пусть $\nu \succ \mu$ и пусть справедливо (6). Из каждого $A \in \mathbf{A}$ выделим один элемент и обозначим через $T(A)$ множество, состоящее из этого элемента. Обозначим $M = \bigcup\{B; B = A - T(A), A \in \mathbf{A}\}$. Множества вида $(B - M) \cup N$, где $B \in \mathbf{S}_\nu$, $N \subset M$, образуют σ-кольцо, содержащее $\mathbf{S}_\nu$, равно как и все одноточечные множества. Определим на нем функцию ν_0 при помощи соотношения $\nu_0((B - M) \cup N) = \nu(B)$. Это определение вполне законно, так как если $(B_1 - M) \cup N_1 = (B_2 - M) \cup N_2$, то $D = (B_1 - B_2) \cup (B_2 - B_1) \subset M$, $D \in \mathbf{S}_\nu$. Имеем $D = \bigcup \mathbf{D}$, где

$$\mathbf{D} = \{A_\nu(x);\ x \in D\} \subset \mathbf{A}_\nu = \mathbf{A}.$$

Ни один из атомов не является частью M и, следовательно,

$$\mathbf{D} = \emptyset,\ D = \emptyset \text{ и } B_1 = B_2.$$

Мера ν_0 является расширением меры μ и теорема доказана.

Замечание. Покажем на примере, что пополнение меры μ не обязательно выполняет условие $A_{\bar{\mu}} \subset \mathbf{S}_{\bar{\mu}}$.

Пусть $X = C \cup (0, +\infty)$, где C — непустое множество, дизъюнктное с интервалом $(0, +\infty)$. Пусть $\mathbf{P}$ — система всех конечных или счетных последовательностей положительных чисел, $\mathbf{Q}$ — система всех множеств вида

$X - P$, $P \in \mathbf{P}$. Очевидно, $\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$ является σ-алгеброй с наибольшим элементом X. Определим меру μ на $\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$ так, чтобы для любого натурального числа i было $\mu(\{i\}) = \frac{1}{2^{i+1}}$ и $\mu(X) = 1$. Тогда $\mu^*(C) = \frac{1}{2}$, $\mu_*(C) = 0$ и, если $x \in C$, то $A_{\bar{\mu}}(x) = C$ non $\in \mathbf{S}_{\bar{\mu}}$.

Výtah

ROZŠÍŘENÍ MÍRY NA σ-OKRUH OBSAHUJÍCÍ KAŽDOU JEDNOBODOVOU PODMNOŽINU

VÁCLAV FABIAN, Praha.

(Došlo dne 11. listopadu 1955.)

Budiž μ míra (σ-aditivní ne nutně konečná) na σ-okruhu $\mathbf{S}$. Budiž $A(x) = \bigcap\{A;\ x \in A \in \mathbf{S}\}$ pro každé $x \in \bigcup \mathbf{S}$, budiž $\mathbf{A} = \{A(x);\ x \in \bigcup \mathbf{S}\}$, $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{S}$. Budiž f funkce definovaná na $\mathbf{N}$, $0 \leqq f(A) \leqq \mu(B)$ pro každé $A \in \mathbf{N}$, $A \subset B \in \mathbf{S}$; konečně nechť $\sum_{A \in \mathbf{N}} f(A) < +\infty$.

Pak existují míry ν a ν_0, dvě rozšíření míry μ definované na σ-okruzích $\mathbf{S}_\nu$ resp. $\mathbf{S}_{\nu_0}$, splňující tyto podmínky:

1. Pro každé $x \in \bigcup \mathbf{S}$ je $\bigcap\{A;\ x \in A \in \mathbf{S}_\nu\} = A(x) \in \mathbf{S}_\nu$.
2. Je-li $\mu(\emptyset) = 0$, je $\nu(A) = f(A)$ pro každé $A \in \mathbf{N}$.
3. Pro každé $x \in \bigcup \mathbf{S}$, množina $\{x\}$ obsahující jediný prvek x náleží do $\mathbf{S}_{\nu_0}$.

Résumé

L'EXTENSION D'UNE MESURE AU σ-CORPS CONTENANT CHAQUE SOUSENSEMBLE COMPOSÉ D'UN SEUL POINT

VÁCLAV FABIAN, Praha.

(Reçu le 11 novembre 1955.)

Soit μ une mesure (σ-additive mais pas nécessairement finie) dans un σ-corps $\mathbf{S}$. Soit $A(x) = \bigcap\{A;\ x \in A \in \mathbf{S}\}$ pour chaque $x \in \bigcup \mathbf{S}$, soit $\mathbf{A} = \{A(x);\ x \in \bigcup \mathbf{S}\}$, $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{S}$. Soit f une fonction définie dans $\mathbf{N}$, $0 \leqq f(A) \leqq \mu(B)$ pour chaque $A \in \mathbf{N}$, $A \subset B \in \mathbf{S}$; soit finalement $\sum_{A \in \mathbf{N}} f(A) < +\infty$.

Il existe des mesures ν et ν_0, extensions de μ, définies dans les σ-corps $\mathbf{S}_\nu$ et $\mathbf{S}_{\nu_0}$ respectivement, et satisfaisant à ces conditions-ci:

1. Pour chaque $x \in \bigcup \mathbf{S}$ nous avons $\bigcap\{A;\, x \in A \in \mathbf{S}_\nu\} = A(x) \in \mathbf{S}_\nu$.

2. Si $\mu(\emptyset) = 0$, $\nu(A) = f(A)$ pour chaque $A \in \mathbf{N}$.

3. Pour chaque $x \in \bigcup \mathbf{S}$, l'ensemble $\{x\}$, contenant un seul point x, appartient à $\mathbf{S}_{\nu_0}$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

D-HODNOST ABELOVY GRUPY

VLASTIMIL DLAB, Praha.

(Došlo dne 9. dubna 1956.) DT: 519.443

Z pojmu lineární nezávislosti prvků Abelovy grupy je známým způsobem odvozen pojem hodnosti Abelovy grupy.[1]) V současné literatuře je používáno více pojmu lineární nezávislosti v obecnějším smyslu; lineární nezávislost v tomto obecnějším smyslu nazývá autor v práci D-nezávislost a odvozuje pomocí ní pojem D-hodnosti (direktní hodnosti)[2]) Abelovy grupy. Nakonec autor ukazuje některé vlastnosti D-hodnosti; její přednost tkví hlavně v tom, že na rozdíl od obyčejné hodnosti je D-hodnost každé nenulové grupy nenulová.

1. Úvodní poznámky

V celé práci budeme grupou rozuměti aditivně psanou Abelovu grupu. Grupy budeme značit velkými latinskými písmeny, jejich prvky $g, h, x, \ldots$; ostatní malá písmena budou znamenat celá čísla, specielně p prvočíslo. Symbol $O(g)$ značí řád prvku g, symbol $\{g, h, \ldots\}$ grupu vytvořenou generátory $g, h, \ldots$ Nekonečnou cyklickou grupu označme $G(\infty)$, cyklickou grupu řádu p^k pro přirozené k $G(p^k)$ a Prüferovu grupu typu p^∞ (t. j. aditivní grupu racionálních čísel, jejichž jmenovatel je mocninou prvočísla p, modulo 1) označme $G(p^\infty)$. $G + H$ resp. $\sum'_{\iota \in I} G_\iota$ značí direktní součet příslušných grup, G/H faktorovou grupu G modulo H.

Grupa $G_{(p)}$, jejíž každý prvek má řád mocniny téhož prvočísla p, nazývá se p-primární; prvky řádu p tvoří v této grupě $G_{(p)}$ podgrupu $G^0_{(p)}$, kterou nazýváme dolní vrstvou. Všechny prvky konečného řádu tvoří v dané Abelově grupě G maximální periodickou podgrupu $P \subseteq G$, jednoznačně určenou periodickou část grupy G; faktorová grupa G/P, až na isomorfismus jednoznačně určená, je aperiodická.[3]) Smíšenou grupu G nazveme štěpitelnou, je-li periodická část P jejím direktním sčítancem. Každou periodickou grupu P možno jednoznačně rozložit na direktní součet p-primárních komponent

[1]) Viz na př. [1].

[2]) Německy „*direkter Rang*"; odtud označení D-hodnost.

[3]) T. j. každý její nenulový prvek má nekonečný řád.

$P_{(p)} : P = \sum_p{}' P_{(p)}$; $P_{(p)}$ je při tom tvořena právě těmi prvky z G, jejichž řád je mocninou prvočísla p. Jedinými direktně nerozložitelnými p-primárními grupami jsou grupy $G(p^k)$ $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$; z každé nenulové p-primární grupy $G_{(p)}$ lze takovou grupu $G(p^k)$ pro vhodné k direktně oddělit.[4])

Množina prvků $(g_\iota)_{\iota \in I}$, $g_\iota \in G$ nazývá se lineárně nezávislou, jestliže neexistuje relace

$$k_1 \cdot g_{\iota_1} + k_2 \cdot g_{\iota_2} + \ldots + k_n \cdot g_{\iota_n} = 0\,,$$
$$k_i \ (i = 1, 2, \ldots n) \ \text{celá čísla, } n \text{ libovolné přirozené,}$$

v níž je $k_i \neq 0$ pro vhodný index i. V opačném případě mluvíme o lineárně závislých prvcích. Jde zřejmě o definici finitního charakteru, takže možno mluvit o maximální lineárně nezávislé soustavě grupy G. Všechny tyto maximální lineárně nezávislé soustavy mají tutéž mohutnost, kterou nazýváme pak hodností grupy G; označme ji $\mathrm{r}(G)$. Je-li $\mathrm{r}(G) \geqq \aleph_0$, potom se $\mathrm{r}(G)$ rovná mohutnosti faktorové grupy G modulo periodická část $P : \mathrm{r}(G) = \mathrm{m}(G/P)$.[5])

Podgrupa H se nazývá servantní v G, jestliže každá rovnice

$$n \cdot x = h, h \in H\,,\ n \text{ přirozené číslo}\,,$$

řešitelná v G, má alespoň jedno řešení v H. Podgrupa H je servantní v G právě tehdy, jestliže v každé zbytkové třídě $\bar{g} \in G/H$ existuje prvek $g \in \bar{g}$, pro nějž $O(g) = O(\bar{g})$. Z teorie servantních grup pak snadno vyplývá postačující podmínka pro to, aby smíšená Abelova grupa byla štěpitelná:

Jestliže periodická část P smíšené grupy G je direktním součtem úplné grupy a grupy, jejíž prvky mají ohraničené řády, je grupa G štěpitelná.[6])

2. Definice *D*-hodnosti

Definice 1. *Říkáme, že množina $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ nenulových prvků Abelovy grupy G je D-nezávislá,*[7]) *jestliže z každé relace*

$f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = k_1 \cdot g_1 + k_2 \cdot g_2 + \ldots + k_n \cdot g_n = 0$,[8]) *$k_i$ celá čísla $(i = 1, 2, \ldots, n)$, plyne $k_i \cdot g_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Nekonečnou množinu nenulových prvků $(g_\iota)_{\iota \in I}$, $g_\iota \in G$ nazýváme D-nezávislou, jestliže má tuto vlastnost každá její konečná podmnožina. Množinu nenulových prvků nazýváme D-závislou, není-li D-nezávislá.*[9])

---

[4]) Viz na př. [1].

[5]) Symbolem $\mathrm{m}(\mathfrak{M})$ budeme v celé práci značit mohutnost množiny $\mathfrak{M}$.

[6]) Dá se ovšem dokázat, že tato podmínka je i nutná pro to, aby každá smíšená grupa G, mající periodickou část isomorfní grupě P, byla štěpitelná. Viz [1].

[7]) Resp. prvky $g_1, g_2, \ldots, g_n$, $g_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou navzájem D-nezávislé.

[8]) Symbolem $f(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ budeme nadále označovat lineární kombinaci prvků grupy G s celými koeficienty. Budeme říkat, že $f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = k_1 \cdot g_1 + k_2 \cdot g_2 + \ldots + k_n \cdot g_n$ je triviální, jestliže $k_i \cdot g_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

[9]) V zřejmém smyslu mluvíme o prvku D-závislém na dané množině prvků a pod.

Je zřejmé, že pro aperiodické grupy pojem lineární nezávislosti a D-nezávislosti splývá. Finitní charakter definice 1 dává ihned možnost užíti Zornova lemmatu, takže stejným způsobem, jakým postupujeme v případě studia obyčejné lineární nezávislosti, zjistíme existenci maximální D-nezávislé soustavy nenulových prvků grupy G [10]).

Poznámka 1. Mohutnost této maximální D-nezávislé soustavy (krátce D-soustavy) grupy G není však, jako tomu je v případě maximální lineárně nezávislé soustavy, obecně invariantem grupy G. Uvažujme na př. cyklickou grupu $E = \{g\}$, při čemž $O(g) = p_1p_2 \dots p_n$, $n \geqq 2$ libovolné přirozené, p_1, $p_2, \dots, p_n$ navzájem různá prvočísla. Uvědomíme-li si, že grupa E je direktním součtem primárních cyklických grup, vytvořených generátory $p_1p_2 \dots p_{i-1} \cdot \cdot p_{i+1} \dots p_n \cdot g$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, t. j.

$$E = \sum_{i=1}^{n}{}' \{p_1p_2 \dots p_{i-1}p_{i+1} \dots p_n \cdot g\},$$

přesvědčíme se snadno, že množiny

$$\mathfrak{E}_k = (p_2p_3 \dots p_n \cdot g, p_1p_3 \dots p_n \cdot g, \dots, p_1p_2 \dots p_{k-2}p_k \dots p_n \cdot g,$$
$$p_1p_2 \dots p_{k-1} \cdot p_{k+1} \dots p_n \cdot g + p_1p_2 \dots p_kp_{k+2} \dots p_n \cdot g + \dots + p_1p_2 \dots p_{n-1} \cdot g),$$
$$k = 1, 2, \dots, n,$$

jsou D-soustavy grupy E, při čemž $\mathrm{m}(\mathfrak{E}_k) = k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Z poznámky 1 vidíme nutnost omezení svých dalších úvah na p-primární grupy. Budiž $G_{(p)}$ p-primární Abelova grupa, $\mathfrak{G}_{(p)}$ její D-soustava.

Definice 2. *Mohutnost D-soustavy $\mathfrak{G}_{(p)}$ nenulové p-primární grupy $G_{(p)}$ nazveme D-hodností $\mathrm{r}_D(G_{(p)})$ této grupy: $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) = \mathrm{m}(\mathfrak{G}_{(p)})$. Je-li $G_{(p)}$ nulová, položme $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) = 0$.*

Dříve než dokážeme oprávněnost této definice, t. j. nezávislost D-hodnosti na volbě D-soustavy grupy $G_{(p)}$, uveďme následující lemmata.

Lemma 1. *Budiž $\mathfrak{G} = (g_\iota)_{\iota \in I}$ D-soustava grupy $G_{(p)}$ a nechť $O(g_\iota) = p^{k_\iota}$ pro $\iota \in I$. Budiž $\mathfrak{G}' = (g'_\iota)_{\iota \in I}$, kde $g'_\iota = n_\iota\, p^{k_\iota - l_\iota} \cdot g_\iota$, $1 \leqq l_\iota \leqq k_\iota$, $(n_\iota, p) = 1$. Potom je $\mathfrak{G}'$ D-soustava grupy $G_{(p)}$.*

Důkaz. Především ukažme, že množina prvků $\mathfrak{G}'$ je D-maximální v $G_{(p)}$.[11]) Budiž $g \in G_{(p)}$; jelikož $\mathfrak{G}$ je D-soustava grupy $G_{(p)}$, máme

$$0 \neq k \cdot g = k_1 \cdot g_{\iota_1} + k_2 \cdot g_{\iota_2} + \dots + k_n \cdot g_{\iota_n}.$$

---

[10]) Připustíme v definici 1 též množiny, které mohou obsahovat nulový prvek, přesvědčíme se snadno o tom, že přidáním nulového prvku k množině nemění se její vlastnost býti D-závislou či D-nezávislou; to nás opravňuje k tomuto omezení na nenulové prvky.

[11]) T. j. každý nenulový prvek z $G_{(p)}$ je D-závislý na množině $\mathfrak{G}'$. Na rozdíl od D-maximální množiny grupy G rozumíme maximální množinou grupy G množinu nenulových prvků, na níž je lineárně závislý každý prvek této grupy. Při tom, jak si snadno rozmyslíme, množina $\mathfrak{M}$ může být v G maximální, ale nemusí být D-maximální.

Označíme-li

$$O(k_i \cdot g_{\iota_i}) = p^{e_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad p^{e_0} = \max_{i=1,2,\ldots,n} p^{e_i},$$

máme

$$p^{e_0-1}k \cdot g = p^{e_0-1}k_1 \cdot g_{\iota_1} + p^{e_0-1}k_2 \cdot g_{\iota_2} + \ldots + p^{e_0-1}k_n \cdot g_{\iota_n},$$

při čemž v důsledku D-nezávislosti $\mathfrak{G}$ je $p^{e_0-1}k \cdot g \neq 0$. Je jasné, že pro vhodné r_i je $p^{e_0-1}k_i \cdot g_{\iota_i} = r_i p^{k_{\iota_i}-1} \cdot g_{\iota_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, takže máme

$$0 \neq n_{\iota_1} n_{\iota_2} \ldots n_{\iota_n} p^{e_0-1}k \cdot g = k_1' \cdot g_{\iota_1}' + k_2' \cdot g_{\iota_2}' + \ldots + k_n' \cdot g_{\iota_n}'.$$

Zbývá dokázat D-nezávislost $\mathfrak{G}'$; za tím účelem vyšetřujme vztah

$$m_1' \cdot g_{\iota_1}' + m_2' \cdot g_{\iota_2}' + \ldots + m_n' \cdot g_{\iota_n}' = 0, \; m_\iota' \cdot g_{\iota_i}' \neq 0 \text{ pro vhodný index } i.$$

To znamená však, že

$$m_1 \cdot g_{\iota_1} + m_2 \cdot g_{\iota_2} + \ldots + m_n \cdot g_{\iota_n} = 0,$$

kde

$$m_i = m_i' n_{\iota_i} p^{k_{\iota_i} - l_{\iota_i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

a $m_i \cdot g_{\iota_i} \neq 0$ pro vhodný index i, což je ve sporu s D-nezávislostí soustavy $\mathfrak{G}$ a celý důkaz je hotov.

Poznámka 2. Tvrzení lemmatu 1 nelze ovšem obecně přenést na libovolnou grupu G a její D-soustavu $\mathfrak{G}$. Stačí uvážit příklad cyklické grupy E z poznámky 1: (g) je D-soustava, avšak $(p_1 p_2 \ldots p_{n-1} \cdot g)$ D-soustava není. Přesto však lze stejným postupem jako v důkaze lemmatu 1 snadno dokázat následující zobecnění tohoto lemmatu pro libovolnou grupu G a speciální D-soustavy, jejichž význam uvidíme v 3:

Budiž $\mathfrak{G} = (g_\iota)_{\iota \in I}$ D-soustava grupy G taková, že pro každý prvek g_ι je buď $O(g_\iota) = \infty$ nebo $O(g_\iota) = p_\iota^{k_\iota}$, p_ι vhodné prvočíslo, $k_\iota \geqq 1$ přirozené $(\iota \in I)$. Označme $\mathfrak{G}'$ množinu přirozených násobků $n_\iota \cdot g_\iota = g_\iota' \neq 0$ $(\iota \in I)$. Potom $\mathfrak{G}'$ je D-soustava grupy G.

Na druhé straně pro libovolnou D-soustavu $\mathfrak{G}$ této grupy G platí, že příslušná množina $\mathfrak{G}'$, i v případě, že nepožadujeme $g_\iota' \neq 0$ $(\iota \in I)$ a rozumíme $\mathfrak{G}'$ množinu všech nenulových prvků g_ι', je buď prázdná nebo D-nezávislá.

Obdobným způsobem jako lemma 1 lze dokázat též obrácené tvrzení:

Nechť $\mathfrak{G}' = (g_\iota')_{\iota \in I}$ je D-soustava grupy $G_{(p)}$ a nechť prvky $g_\iota \in G_{(p)}$ splňují rovnici $n_\iota \cdot g_\iota = g_\iota'$ pro $\iota \in I$. Potom $\mathfrak{G} = (g_\iota)_{\iota \in I}$ je D-soustava grupy $G_{(p)}$.

Poznámka 3. Při vyšetřování mohutností D-soustav grupy $G_{(p)}$ stačí se tedy omezit na takové soustavy, které se skládají z prvků, jejichž řád je p. To je patrné ihned z lemmatu 1, neboť položíme-li $n_\iota = l_\iota = 1$ pro všechna

$\iota \in I$, vidíme, že od libovolné D-soustavy $\mathfrak{G} = (g_\iota)_{\iota \in I}$ grupy $G_{(p)}$ přejdeme k D-soustavě $\mathfrak{G}^\circ = (g_\iota^\circ)_{\iota \in I}$, při čemž $O(g_\iota^\circ) = p$ pro $\iota \in I$ a $\mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \mathrm{m}(\mathfrak{G}^\circ)$. Mimo to je bezprostředně vidět, že $\mathfrak{G}^\circ$ je D-soustava dolní vrstvy $G^\circ_{(p)}$ grupy $G_{(p)}$.[12])

Lemma 2. *Nechť $g \in G_{(p)}$, $O(g) = p$. Potom g je lineární kombinací prvků $g_1, g_2, \ldots, g_n$, $g_i \in G_{(p)}$, $O(g_i) = p$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ právě tehdy, je-li g na těchto prvcích D-závislý.*

Důkaz. Je-li předně prvek $g \in G$ lineární kombinací prvků $g_1, g_2, \ldots, g_n$, je též triviálně na těchto prvcích D-závislý. Budiž naopak $0 \neq k \,.\, g = f(g_1, g_2, \ldots$ $\ldots, g_n)$. Jelikož $O(g) = p$, je $(k, p) = 1$, a tedy existují celá čísla r, s, že $rk +$ $+ sp = 1$, odkud máme

$$g = r \,.\, f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = f'(g_1, g_2, \ldots, g_n)\,,$$

což jsme měli dokázat.

V důsledku lemmatu 2 má smysl následující definice ekvivalence dvou množin prvků z $G_{(p)}$ (neboť je zaručena kromě symetričnosti a reflexivity též transitivita tohoto pojmu):

Definice 3. *Dvě množiny $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{B}$ prvků grupy $G_{(p)}$ nazveme D-ekvivalentní, jestliže každý prvek z $\mathfrak{U}$ je D-závislý na množině $\mathfrak{B}$ a naopak.*

Lemma 3. *Nechť $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$, $O(a_i) = p$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ je D-nezávislá množina prvků grupy $G_{(p)}$ a $\mathfrak{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_s)$, $O(b_j) = p$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ množina prvků grupy $G_{(p)}$ taková, že a_i je D-závislý na $\mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Potom $r \leqq s$ a množina $\mathfrak{B}$ je D-ekvivalentní s množinou $(a_1, a_2, \ldots, a_r, b'_{r+1}, b'_{r+2} \ldots b'_s)$, kde $b'_{r+1}, b'_{r+2}, \ldots, b'_s$ je $s - r$ vhodných prvků z $\mathfrak{B}$.*

Důkaz. Jelikož podle lemmatu 2 $a_1 = f(b_1, b_2, \ldots, b_s)$, je nutně podle téhož lemmatu pro vhodný index i $b_i = f'(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_s)$, a tedy $\mathfrak{B}$ je D-ekvivalentní s $(a_1, b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_s)$. Celé tvrzení potom dokážeme snadno úplnou indukcí podle počtu prvků soustavy $\mathfrak{A}$, využívajíce při tom stále lemmatu 2.

Pomocí lemmatu 2 dokážeme ještě následující

Lemma 4. *Buďtež $\mathfrak{G}^\circ = (g_\alpha)_{\alpha \in A}$, $O(g_\alpha) = p$ $(\alpha \in A)$ a $\mathfrak{H}^\circ = (h_\beta)_{\beta \in B}$, $O(h_\beta) =$ $= p$ $(\beta \in B)$ dvě D-soustavy grupy $G_{(p)}$, jejichž mohutnosti $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^\circ) = \mu$, $\mathrm{m}(\mathfrak{H}^\circ) =$ $= \nu$ jsou nekonečné. Potom $\mu = \nu$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\mu < \nu$. Jelikož $\mathfrak{H}^\circ$ je D-soustava grupy $G_{(p)}$, máme podle lemmatu 2

$$g_\alpha = f_\alpha(h^{(\alpha)}_{\beta_1}, h^{(\alpha)}_{\beta_2}, \ldots, h^{(\alpha)}_{\beta_{n_\alpha}})\,,\ \alpha \in A\,. \tag{1}$$

V těchto relacích vystupuje ovšem nejvýše $\aleph_0 \,.\, \mu = \mu$ různých prvků soustavy

[12]) Snadno se dá ukázat též naopak, že každá D-soustava $\mathfrak{G}^\circ$ dolní vrstvy $G^\circ_{(p)}$ grupy $G_{(p)}$ je D-soustavou grupy $G_{(p)}$.

$\mathfrak{H}^\circ$. Jelikož $\nu > \mu$, existuje prvek $h_{\beta_0} \in \mathfrak{H}^\circ$, který nevystupuje v žádné z relací (1). Jelikož ale

$$h_{\beta_0} = f_{\beta_0}(g_{\alpha_1}, g_{\alpha_2}, \ldots, g_{\alpha_k}) = f_0(h_{\beta_1}^{(\alpha_1)}, h_{\beta_2}^{(\alpha_1)}, \ldots, h_{\beta_{n_{\alpha_1}}}^{(\alpha_1)}, h_{\beta_1}^{(\alpha_2)}, \ldots, h_{\beta_{n_{\alpha_k}}}^{(\alpha_k)}),$$

dostáváme spor s D-nezávislostí soustavy $\mathfrak{H}^\circ$.

Nyní už můžeme ukázat oprávněnost definice 2, a to následující větou.

Věta 1. *D-hodnost p-primární grupy $G_{(p)}$, definovaná pomocí definice 2, je invariantem grupy $G_{(p)}$.*

První důkaz. Budiž $G_{(p)} \neq 0$. Buďtež $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{H}$ dvě D-soustavy grupy $G_{(p)}$; při tom nechť $\mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \varrho$, $\mathrm{m}(\mathfrak{H}) = \sigma$. Podle lemmatu 1 a poznámky 2 možno přejít k D-soustavám $\mathfrak{G}^\circ$, $\mathfrak{H}^\circ$, jejichž každý prvek je řádu p a $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^\circ) = \varrho$, $\mathrm{m}(\mathfrak{H}^\circ) = \sigma$. Jsou-li ϱ i σ nekonečná kardinální čísla, dostáváme invarianci D-hodnosti, t. j. rovnost $\varrho = \sigma$, z lemmatu 4, je-li alespoň jedno z čísel ϱ, σ konečné, dostáváme tuto rovnost z lemmatu 3. Tím je důkaz věty 1 hotov.

Druhý důkaz. Nechť $G_{(p)} \neq 0$. Od libovolných D-soustav $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{H}$ přejdeme pomocí lemmatu 1 a poznámky 2 k D-soustavám $\mathfrak{G}^\circ$ a $\mathfrak{H}^\circ$, jejichž prvky mají řád p a je $\mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \mathrm{m}(\mathfrak{G}^\circ)$, $\mathrm{m}(\mathfrak{H}) = \mathrm{m}(\mathfrak{H}^\circ)$. $\mathfrak{G}^\circ$ a $\mathfrak{H}^\circ$ jsou ovšem D-soustavy dolní vrstvy $\overset{\circ}{G}_{(p)}$ grupy $G_{(p)}$. Uvědomíme-li si, že $\overset{\circ}{G}_{(p)}$ je vlastně vektorovým prostorem nad prvotělesem charakteristiky p, při čemž, jak se snadno přesvědčíme, pojmy D-nezávislosti a D-hodnosti grupy splývají s pojmy lineární nezávislosti a dimense vektorového prostoru, ihned z teorie vektorových prostorů obdržíme $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^\circ) = \mathrm{m}(\mathfrak{H}^\circ)$. Tím je invariance D-hodnosti $\mathrm{r}_D(G_{(p)})$ p-primární grupy $G_{(p)}$ dokázána.

Budiž nyní G libovolná Abelova grupa, P její periodická část, $P = \sum_p' P_{(p)}$ direktní rozklad této periodické části P na p-primární komponenty.

Definice 4. *D-hodností $\mathrm{r}_D(G)$ grupy G nazveme součet hodnosti $\mathrm{r}(G)$ této grupy a D-hodností p-komponent její periodické části (ve smyslu sečítání mohutností):*

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G) + \sum_p \mathrm{r}_D(P_{(p)}).$$

Z úvodních poznámek ihned vyplývá, že D-hodnost $\mathrm{r}_D(G)$ je invariantem grupy G. Je-li grupa G aperiodická, je zřejmě $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G)$; je-li G periodická, nenulová, potom, zatím co $\mathrm{r}(G) = 0$, je vždy $r_D(G) > 0$ a jestliže G je navíc direktním součtem nerozložitelných Abelových grup, udává $\mathrm{r}_D(G)$ mohutnost množiny direktních sčítanců. Poněkud obecněji:

Je-li smíšená grupa G štěpitelná, $G = P + A$, při čemž její periodická část P je direktním součtem nerozložitelných grup a aperiodický sčítanec A je direktně úplně rozložitelný (t. j. je direktním součtem grup D-hodnosti 1), rovná se její D-hodnost mohutnosti množiny všech direktních sčítanců v direktním rozkladu grupy P a A na zmíněné nerozložitelné podgrupy.[13])

[13]) Pro tuto vlastnost nazýváme právě definovanou hodnost Abelovy grupy direktní hodnost.

3. Některé vlastnosti D-hodnosti

Uvědoměme si nejprve tvrzení obsažené v tomto lemmatu:

Lemma 5. *Nechť G je Abelova grupa, P její periodická část s rozkladem $P = \sum_p{}' P_{(p)}$ na p-primární komponenty $P_{(p)}$. Nechť dále $\mathfrak{S}_{(0)} = (g_{\iota_{(0)}})_{\iota_{(0)} \in I_{(0)}}$ je maximální nezávislá soustava grupy G a $\mathfrak{S}_{(p)} = (g_{\iota_{(p)}})_{\iota_{(p)} \in I_{(p)}}$ D-soustava grupy $P_{(p)}$ pro všechna prvočísla p.[14] Potom množinové sjednocení $\overline{\mathfrak{S}}$ soustav $\mathfrak{S}_{(0)}$ a $\mathfrak{S}_{(p)}$ (pro všechna prvočísla p) je D-soustava grupy G.*

Důkaz. Je především jasné, že $\overline{\mathfrak{S}}$ je D-maximální v grupě G; neboť, je-li $g \in G$ libovolný prvek nekonečného řádu, potom je D-závislý na $\mathfrak{S}_{(0)}$, je-li g konečného řádu, je možné jednoznačné vyjádření

$$g = g_{p_1} + g_{p_2} + \ldots + g_{p_n}\,, \quad g_{p_i} \in P_{(p_i)}\,, \quad O(g_{p_i}) = p_i^{k_i}\ (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

takže

$$p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_n^{k_n} \,.\, g = p_2^{k_2} p_3^{k_3} \ldots p_n^{k_n} \,.\, g_{p_1} \neq 0\,,$$

odkud je patrná D-závislost na množině $\overline{\mathfrak{S}}$.

Abychom dokázali D-nezávislost množiny $\overline{\mathfrak{S}}$, vyšetřujme mezi libovolnými prvky z $\overline{\mathfrak{S}}$ relaci

$$f_{(0)}(g_{\iota_{(0)},1}, g_{\iota_{(0)},2}, \ldots, g_{\iota_{(0)},n_0}) + f_{(p_1)}(g_{\iota_{(p_1)},1}, g_{\iota_{(p_1)},2}, \ldots, g_{\iota_{(p_1)},n_1}) + \\ + \ldots + f_{(p_k)}(g_{\iota_{(p_k)},1}, g_{\iota_{(p_k)},2}, \ldots, g_{\iota_{(p_k)},n_k}) = 0\,.$$

Vhodným vynásobením tohoto vztahu dostáváme postupně

$$f_{(0)}(g_{\iota_{(0)},1}, g_{\iota_{(0)},2}, \ldots, g_{\iota_{(0)},n_0}) = 0\,, \quad f_{(p_1)}(g_{\iota_{(p_1)},1}, g_{\iota_{(p_1)},2}, \ldots, g_{\iota_{(p_1)},n_1}) = 0\,, \ldots \\ \ldots, f_{(p_k)}(g_{\iota_{(p_k)},1}, g_{\iota_{(p_k)},2}, \ldots, g_{\iota_{(p_k)},n_k}) = 0\,,$$

odkud v důsledku D-nezávislosti soustav $\mathfrak{S}_{(0)}, \mathfrak{S}_{(p_1)}, \ldots, \mathfrak{S}_{(p_k)}$ plyne D-nezávislost množiny $\overline{\mathfrak{S}}$.

Mohutnost D-soustavy $\overline{\mathfrak{S}}$ grupy G, popsané lemmatem 5, je tedy rovna D-hodnosti této grupy. Vztah mezi mohutnostmi libovolných D-soustav a D-hodností grupy G vyšetříme větou 4. Lemma 5 nás opravňuje k následující definici:

Definice 5. *D-soustavu $\mathfrak{S}$ grupy G nazveme kanonickou D-soustavou, jestliže řád každého prvku $g \in \mathfrak{S}$ je nekonečný nebo je mocninou prvočísla. Kanonickou D-soustavu, jejíž každý prvek konečného řádu má řád prvočíselný, nazveme redukovanou.*

Následující vyšetřování kanonických D-soustav ukáže jejich důležitost.

[14]) Rozumí se, samozřejmě, pro ta prvočísla p, pro něž je $P_{(p)}$ nenulová.

Lemma 6. *Budiž $\mathfrak{S}$ kanonická D-soustava grupy G. Nechť $G_{(p)}$ je p-primární komponenta periodické části P grupy G, $G_{(p)} \neq 0$. Potom množinový průnik $\mathfrak{S}_{(p)} = \mathfrak{S} \cap G_{(p)}$ je kanonická D-soustava p-primární grupy $G_{(p)}$.*

Důkaz. Předně je z D-maximality D-soustavy $\mathfrak{S}$ zřejmé, že průnik $\mathfrak{S}_{(p)} = \mathfrak{S} \cap G_{(p)}$ je neprázdný; D-nezávislost množiny $\mathfrak{S}_{(p)}$ je triviální. Jde o to, zjistit, že $\mathfrak{S}_{(p)}$ je D-maximální v $G_{(p)}$. Budiž tedy $0 \neq g \in G_{(p)}$; potom v důsledku D-maximality D-soustavy $\mathfrak{S}$ v grupě G je

$$0 \neq k \,.\, g = f_1(g_1^{(p)}, g_2^{(p)}, \ldots, g_n^{(p)}) + f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m),\quad g_i^{(p)} \in \mathfrak{S}_{(p)}\ (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$h_j \in \mathfrak{S} - \mathfrak{S}_{(p)}{}^{15})\ (j = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

t. j.

$$O(g_i^{(p)}) = p^{k_i}\ (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ a}$$
$$O(h_j) = \infty \quad \text{nebo} \quad (O(h_j), p) = 1\ (j = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

Avšak snadno vidíme, že není možné, aby lineární kombinace $f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ byla netriviální. Lemma 6 je dokázáno.

Z poznámky 2 je též jasné, jakým způsobem můžeme od kanonických D-soustav přejít k D-soustavám redukovaným.

Lemma 7. *Budiž $\mathfrak{S}$ D-soustava grupy G, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$ množina všech prvků nekonečného řádu z $\mathfrak{S}$. Potom je $\mathfrak{A}$ maximální lineárně nezávislá soustava grupy G a je tedy*

$$\mathrm{m}(\mathfrak{A}) = \mathrm{r}(G). \tag{2}$$

Důkaz. Lineární nezávislost prvků z $\mathfrak{A}$ je triviální. Přesvědčíme se o maximalitě této množiny; pro libovolný prvek $0 \neq g \in G$ je

$$0 \neq k \,.\, g = f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n) + f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m),\quad g_i \in \mathfrak{A},\quad h_j \in \mathfrak{S} - \mathfrak{A}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n\,;\ j = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

Jelikož $O(h_j) < \infty$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, je potom pro vhodné přirozené t zřejmě $tk \,.\, g = f_1'(g_1, g_2, \ldots, g_n)$,[16] a tedy je též (2).

Platí nyní následující tvrzení:

Věta 2. *Mohutnost kanonické D-soustavy $\mathfrak{S}$ nenulové grupy G se rovná D-hodnosti této grupy.*

Důkaz. To je bezprostředním důsledkem lemmatu 6 a lemmatu 7. Neboť, nechť $\mathfrak{S} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{P}$, kde $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{P}$) je množina prvků nekonečného (resp. konečného) řádu D-soustavy $\mathfrak{S}$. Potom podle lemmatu 7 platí (2); dále máme podle lemmatu 6 a věty 1

$$\mathrm{m}(\mathfrak{P} \cap G_{(p)}) = \mathrm{r}_D(G_{(p)}), \text{ a tedy } \mathrm{m}(\mathfrak{P}) = \sum_p \mathrm{r}_D(G_{(p)})\,.$$

Tím je věta 2 dokázána.

[15]) $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ označuje množinový rozdíl množin $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$.

[16]) $f_1'(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, t. j. též $f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ může být ovšem triviální. Je též zřejmé, že (2) platí i v případě, že $\mathfrak{A} = \emptyset$.

Poznámka 4. Jestliže mohutnost D-soustavy $\mathfrak{G}$ grupy G je rovna D-hodnosti této grupy, nemusí být D-soustava $\mathfrak{G}$ ještě kanonická:

Budiž $\Pi = (p_1, p_2, \dots, p_k, \dots)$ nekonečná soustava různých prvočísel, r, s celá čísla taková, že $rp_1 + sp_2 = 1$. Grupa G budiž direktním součtem cyklických grup $G(p_k) = \{g_k\}$ řádu p_k: $G = \sum_{i=1}^{\infty}{}' G(p_k)$. Zřejmě $\mathfrak{G} = (s \,.\, g_1 - r \,.\, g_2, g_3, \dots$ $\dots, g_k \dots)$ je D-soustava, $\mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \mathrm{r}_D(G)$ a při tom $\mathfrak{G}$ není kanonická D-soustava, neboť $O(s \,.\, g_1 - r \,.\, g_2) = p_1 p_2$.

Ukážeme však, že toto nemůže nastat v případě, kdy D-hodnost grupy G je konečná. Nejprve však dokažme lemma, které popisuje, jak možno přejít od libovolné D-soustavy grupy G ke kanonické D-soustavě této grupy.

Lemma 8. *Budiž $\mathfrak{G}$ D-soustava grupy G. Každý prvek $g \in \mathfrak{G}$ konečného řádu, jež není mocninou prvočísla, t. j.*

$$O(g) = n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}\,, \quad 1 \leqq e_i \ (i = 1, 2, \dots, k)\,, \quad k \geqq 2 \text{ přirozená čísla}\,, \tag{3}$$

nahraďme k prvky

$$g_1 = p_2^{e_2} p_3^{e_3} \dots p_k^{e_k} \,.\, g\,, \quad g_2 = p_1^{e_1} p_3^{e_3} \dots p_k^{e_k} \,.\, g\,, \dots g_k = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_{k-1}^{e_{k-1}} \,.\, g \tag{4}$$

a označme vzniklou množinu $\mathfrak{G}'$. Potom $\mathfrak{G}'$ je kanonická D-soustava grupy G.

Důkaz. Je zřejmé, že každý prvek množiny $\mathfrak{G}'$ má buď řád nekonečný nebo řád rovný mocnině některého prvočísla. Dále $\mathfrak{G}'$ je D-maximální v grupě G; k tomu si stačí uvědomit, že pro prvek $g \in \mathfrak{G}$, splňující podmínky (3), je $g = f(g_1, g_2, \dots, g_k)$, g_i tvaru (4), $i = 1, 2, \dots, k$. Dokážeme ještě D-nezávislost množiny $\mathfrak{G}'$. Nechť pro $g_i \in \mathfrak{G}'$ platí vztah

$$0 \neq t \,.\, g_i = f_1(g_1, g_2, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_k) + f_2(h_1, h_2, \dots, h_m)\,,$$

kde prvky $g_1, g_2, \dots, g_k$ mají význam uvedený ve znění lemmatu. Jelikož $(O(g_i), O(g_j)) = 1$ pro $j \neq i$, $j = 1, 2, \dots, k$, existuje přirozené číslo l, že $0 \neq tl \,.\, g_i = f_2'(h_1, h_2 \dots h_m)$; ale g_i, jakož i prvky $h_1, h_2, \dots, h_m$ jsou přirozenými násobky jistých prvků z D-soustavy $\mathfrak{G}$ a tedy podle poznámky 2 máme tvrzení lemmatu 8 ověřeno, neboť $f_2(h_1, h_2, \dots, h_m)$ je nutně triviální.

Věta 3. *Je-li D-hodnost $\mathrm{r}_D(G)$ nenulové grupy G konečná, potom kanonické D-soustavy grupy G jsou právě D-nezávislé množiny prvků této grupy, jejichž mohutnost je $\mathrm{r}_D(G)$.*

Důkaz. První část tvrzení je obsažena ve větě 2. Máme-li naopak D-nezávislou množinu $\mathfrak{G}$ prvků grupy G, $\mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \mathrm{r}_D(G)$, která není kanonickou D-soustavou, doplníme ji na množinu D-maximální v grupě G a způsobem popsaným v lemmatu 8 přejdeme ke kanonické D-soustavě; ihned dostáváme spor s větou 2.

Důsledkem lemmatu 8 je též následující věta.

Věta 4. *Mohutnost libovolné D-soustavy $\mathfrak{S}$ grupy G je rovna nejvýše D-hodnosti této grupy:* $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$; *je-li při tom* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$, *je dokonce* $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{r}_D(G)$.

Důkaz. Podle lemmatu 8 můžeme od libovolné D-soustavy $\mathfrak{S}$ přejít ke kanonické D-soustavě $\mathfrak{S}'$, při čemž $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) \leqq \mathrm{m}(\mathfrak{S}')$. Podle věty 2 máme $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) \leqq \leqq \mathrm{m}(\mathfrak{S}') = \mathrm{r}_D(G)$. Jestliže $\mathfrak{S}$ je konečná, je též $\mathfrak{S}'$ a tedy i D-hodnost $\mathrm{r}_D(G)$ grupy G konečná. Je-li $\mathrm{r}_D(G)$ nekonečná, je v důsledku toho nutně $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) \geqq \aleph_0$. Protože ale podle lemmatu 8 je

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(\mathfrak{S}') \leqq \aleph_0 \,.\, \mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{m}(\mathfrak{S})\,,$$

je celá věta 4 dokázána.

Tvrzení lemmatu 5 a věty 4 vede ihned k výsledku, z něhož je bezprostředně patrná invariance pojmu D-hodnosti Abelovy grupy a pomocí něhož též vidíme, jak možno D-hodnost Abelovy grupy definovat přímo, nezávisle na rozkladu grupy G.

Věta 5. *Budiž* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{S}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ *systém všech D-soustav nenulové grupy G; označme* $\mathrm{m}(\mathfrak{S}_\delta) = \lambda_\delta$ *pro* $\delta \in \Delta$. *Potom množina kardinálních čísel* $\Lambda = (\lambda_\delta)_{\delta \in \Delta}$ *má maximální prvek* λ_{δ_1} *a je* $\lambda_{\delta_1} = \mathrm{r}_D(G)$. *Při tom je množina* Λ *jednoprvková,* $\Lambda = (\mathrm{r}_D(G))$, *tehdy a jen tehdy, jestliže v systému* $\mathfrak{M}$ *existuje alespoň jedna D-soustava* $\mathfrak{S}_{\delta_2}$ *nekonečné mohutnosti, nebo jestliže periodická část grupy G je p-primární či nulová.*[17])

Důkaz. Z věty 4 vyplývá pro všechna kardinální čísla $\lambda_\delta (\delta \in \Delta)$ nerovnost $\lambda_\delta \leqq \mathrm{r}_D(G)$, z lemmatu 5 pak existence čísla λ_{δ_1}, pro něž je $\lambda_{\delta_1} = \mathrm{r}_D(G)$. Je-li $\mathfrak{S}_{\delta_2}$ D-soustava z $\mathfrak{M}$, jejíž mohutnost je nekonečná, potom z věty 4 plyne, že $\Lambda = (\mathrm{r}_D(G))$. Stejně je tomu tak podle lemmatu 7 a věty 1 v případě, kdy periodická část grupy G je nulová či p-primární.

Jestliže $\Lambda = (\mathrm{r}_D(G))$ je naopak jednoprvková a není-li $\mathrm{r}_D(G)$ nekonečná, ani G aperiodická, je nutně periodická část grupy G p-primární. Jinak by totiž existoval prvek $g \in G$ konečného řádu $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} n'$, p_i navzájem různá prvočísla, $e_i \geqq 1$, n' přirozená čísla $(i = 1, 2)$ a dále D-soustava $\mathfrak{S}$ grupy G, obsahující tento prvek g. Jelikož je při tom $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) < \infty$, máme podle lemmatu 8 $\mathrm{m}(\mathfrak{S}) < \mathrm{r}_D(G)$, což je spor s předpokladem o množině Λ.

Nyní dokážeme jednoduchý vztah mezi D-hodností grupy G a její podgrupy H a mezi D-hodností direktního součtu $G = \sum'_{\iota \in I} G_\iota$ a D-hodnostmi direktních sčítanců G_ι $(\iota \in I)$.

Věta 6. *Pro podgrupu* $H \subseteq G$ *platí* $\mathrm{r}_D(H) \leqq \mathrm{r}_D(G)$, *pro direktní součet* $G = \sum'_{\iota \in I} G_\iota$ *je* $\mathrm{r}_D(G) = \sum_{\iota \in I} \mathrm{r}_D(G_\iota)$.

Důkaz. První část je triviální, neboť každou kanonickou D-soustavu podgrupy H můžeme doplnit na D-soustavu grupy G.[18]) Podobně dokážeme

[17]) T. j. G je aperiodická.

[18]) Dokonce, jak je snadné se přesvědčit, na kanonickou D-soustavu grupy G.

snadno i druhé tvrzení. Stačí si jen uvědomit, že množinové sjednocení kanonických D-soustav $\mathfrak{G}_\iota$ grup G_ι ($\iota \in I$) je kanonickou D-soustavou grupy G.

Ovšem známý vztah mezi hodností grupy G a její podgrupy $H \subseteq G$

$$\mathrm{r}(G) = \mathrm{r}(H) + \mathrm{r}(G/H)$$

obecně nelze na D-hodnost přenést. To ukazuje jednoduchý příklad aditivní grupy racionálních čísel R a její podgrupy $\{1\} \subset R$. Je totiž $\mathrm{r}_D(R) = \mathrm{r}_D(\{1\}) = 1$, ale $\mathrm{r}_D(R/\{1\}) = \aleph_0$, neboť $R/\{1\}$ je direktní součet Prüferových grup $G(p^\infty)$ vzhledem ke všem prvočíslům p. Rovnost

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H) \tag{5}$$

dokonce obecně neplatí ani pro p-primární grupu G. Neboť, není-li p-primární grupa G konečné D-hodnosti direktním součtem cyklických grup řádu p, t. j. existuje-li $g \in G$, $O(g) > p$, potom za podgrupu H stačí volit dolní vrstvu G° grupy G; je totiž podle poznámky 3 $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}_D(G^\circ)$ a jelikož $G/G^\circ \neq 0$, je $\mathrm{r}_D(G/G^\circ) > 0$, neboli neplatí (5).

Věta 7. *Pro libovolnou podgrupu H grupy G platí vztah:*

$$\mathrm{r}_D(G) \leqq \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H)\,. \tag{6}$$

Důkaz. Budiž $\mathfrak{H}$ kanonická D-soustava grupy H; doplňme ji na kanonickou D-soustavu $\mathfrak{G}$ grupy G. Zbytkovou třídu faktorové grupy G mod H, ve které leží prvek g, označme $\bar{g}$ a množinu takto vzniklých tříd pro všechny prvky $g \in \mathfrak{G} - \mathfrak{H}$ potom označme $\bar{\mathfrak{F}}$. Dokážeme, že $\bar{\mathfrak{F}}$ je D-nezávislá v G/H. Nechť tedy existuje netriviální lineární kombinace $f_1(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n) = 0$, $\bar{g}_i \in \bar{\mathfrak{F}}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Potom odtud dostáváme vztah

$$f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n) = h\,, \quad g_i \in \mathfrak{G} - \mathfrak{H} \ (i = 1, 2, \ldots, n),\ h \in H\,.$$

Je-li $h = 0$, je $f_1(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ a tedy i $f_1(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n)$ triviální. Je tedy $h \neq 0$, t. j.

$$0 \neq k\,.\,h = f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m),\quad h_j \in \mathfrak{H} \ (j = 1, 2, \ldots, m),$$

odkud $0 \neq f_2(h_1, h_2, \ldots, h_m) = f_1'(g_1, g_2, \ldots, g_n)$; to je spor s D-nezávislostí D-soustavy $\mathfrak{G}$. Jelikož podle věty 4 je $\mathrm{r}_D(G/H) \geqq \mathrm{m}(\bar{\mathfrak{F}}) = \mathrm{m}(\mathfrak{G} - \mathfrak{H})$, dostáváme ihned (6).

Vyšetříme nyní, jaké podmínky musí splňovat grupa G a její podgrupa $H \subseteq G$, aby platila rovnost (5). K tomu účelu dokažme nejprve následující lemmata a věty, které jsou důležité i samy o sobě.

Lemma 9. *Budiž G Abelova grupa; nechť G_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) je podgrupa grupy G těch prvků $g \in G$, pro něž je $O(g) = p^j$, $j \leqq i$, p prvočíslo.*[19]) *Jestliže platí $\mathrm{m}(G_k) \geqq \aleph_0$ (resp. $\mathrm{m}(G_k) > \tau$ pro kardinální číslo $\tau \geqq \aleph_0$), pak též pro každý index $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ platí $\mathrm{m}(G_i) \geqq \aleph_0$* (resp. $\mathrm{m}(G_i) > \tau$).[20])

---

[19]) T. j. $p^i\,.\,g = 0$. Je tedy $G_k \supseteq G_{k-1} \supseteq \ldots \supseteq G_1$.

[20]) Stejným způsobem dokážeme implikaci: Jestliže σ je nekonečné regulární kardinální číslo, a je $\mathrm{m}(G_k) \geqq \sigma$, potom $\mathrm{m}(G_i) \geqq \sigma$ pro každý index $i = 1, 2, \ldots, k - 1$.

Důkaz. Důkaz provedeme úplnou indukcí; ukážeme, že z nerovnosti $\mathrm{m}(G_i) \geqq \aleph_0$ plyne ihned nerovnost $\mathrm{m}(G_{i-1}) \geqq \aleph_0$ $(i = k, k-1, \dots, 2)$. Nechť je naopak $\mathrm{m}(G_{i-1}) < \aleph_0$. Potom existuje prvek $g_{i-1} \in G_{i-1}$, že množina řešení rovnice

$$p \cdot x = g_{i-1} \tag{7}$$

v grupě G_i má mohutnost $\varrho_{i-1} \geqq \aleph_0$. Jinak totiž dostáváme proti předpokladu $\mathrm{m}(G_i) < \mathrm{m}(G_{i-1}) \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Ovšem, je-li g_i řešení rovnice (7), potom každé jiné řešení této rovnice má tvar $g_i + g_1$, $g_1 \in G_1$. Tedy $\mathrm{m}(G_1) \geqq \aleph_0$, ale protože $G_{i-1} \supseteq G_1$, dostáváme $\mathrm{m}(G_{i-1}) \geqq \mathrm{m}(G_1) \geqq \aleph_0$, což je spor s předpokladem.

Druhé tvrzení s ostrou nerovností dokážeme snadno stejným způsobem.

Lemma 10. *Budiž $\mathfrak{M}$ množina všech řešení rovnice*

$$n \cdot x = g_0\,, \quad 0 \neq g_0 \in G\,, \quad n \text{ \textit{přirozené číslo},} \tag{8}$$

v grupě G. Potom je buďto $\mathfrak{M} = \emptyset$, nebo platí:

je-li $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$, je $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$,[21]

je-li $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, je též $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) < \aleph_0$.

Důkaz. Nechť existuje řešení rovnice (8); označme je g', t. j. $n \cdot g' = g_0$. Všechna ostatní řešení rovnice (8) v grupě G jsou pak právě prvky tvaru $g = g' + h$, $h \in G$, $n \cdot h = 0$. Označme $G^{(n)}$ podgrupu grupy G všech prvků $h \in G$, pro něž $n \cdot h = 0$. Je tedy zřejmě $\mathrm{m}(G^{(n)}) = \mathrm{m}(\mathfrak{M})$.

Dokažme nejdříve první část tvrzení; předpokládejme, že toto tvrzení neplatí, t. j.

$$\mathrm{m}(\mathfrak{M}) > \mathrm{r}_D(G), \quad \text{čili} \quad \mathrm{m}(G^{(n)}) > \mathrm{r}_D(G)\,. \tag{9}$$

Budiž

$$G^{(n)} = \sum_p{}' G^{(n)}_{(p)} \tag{10}$$

rozklad grupy $G^{(n)}$ na p-primární komponenty, jichž je zřejmě konečný počet, a $\mathfrak{S}^{(n)}$ redukovaná kanonická D-soustava grupy $G^{(n)}$. Ukážeme nejprve, že za předpokladu (9) platí $\mathrm{m}(\mathfrak{S}^{(n)}) = \mathrm{m}(G^{(n)})$, t. j. $\mathrm{r}_D(G^{(n)}) = \mathrm{m}(G^{(n)})$. Předpokládejme tedy, že naše tvrzení neplatí, t. j. že

$$\mathrm{m}(\mathfrak{S}^{(n)}) < \mathrm{m}(G^{(n)})\,. \tag{11}$$

Jelikož podle lemmatu 6 redukovaná D-soustava $\mathfrak{S}^{(n)}$ je sjednocením redukovaných D-soustav $\mathfrak{S}^{(n)}_{(p)}$ jednotlivých p-primárních komponent $G^{(n)}_{(p)}$ v rozkladu (10) a jelikož z předpokladu $\mathrm{m}(G^{(n)}) > \mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ plyne existence prvočísla p_0, pro něž $\mathrm{m}(G^{(n)}_{(p_0)}) = \mathrm{m}(G^{(n)})$, je potom pro toto prvočíslo p_0 nutně

$$\mathrm{m}(\mathfrak{S}^{(n)}_{(p_0)}) < \mathrm{m}(G^{(n)}_{(p_0)})\,, \quad \mathrm{m}(G^{(n)}_{(p_0)}) > \mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0\,. \tag{12}$$

---

[21]) Je-li G aperiodická, $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, je ovšem $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) = 1$. Jestliže $G = G(\infty) + \sum_{\iota \in I}' G_\iota(p)$, $G(\infty) = \{g\}$, $\mathrm{m}(I) = \mu \geqq \aleph_0$ a je-li $n = p$, $g_0 = n \cdot g$, je potom $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) = \mathrm{r}_D(G) = \mu$.

Při tom, protože řády prvků z $G^{(n)}_{(p_0)}$ jsou omezeny, pro vhodné přirozené k (volme k nejmenší možné) a libovolný prvek $g \in G^{(n)}_{(p_0)}$ je $O(g) \leqq p_0^k$. Uvažujme nyní konečnou klesající posloupnost podgrup

$$G^{(n)}_{(p_0)} = G_k \supset G_{k-1} \supset \ldots \supset G_2 \supset G_1 \neq 0 ,$$

kde G_i je podgrupa grupy $G^{(n)}_{(p_0)}$ těch prvků g, pro jejichž řád platí vztah

$$O(g) \leqq p_0^i \; (i = k, k-1, \ldots, 2, 1) .^{22})$$

Při tom si uvědoměme, že redukovaná D-soustava $\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}$ p_0-primární komponenty $G^{(n)}_{(p_0)}$ grupy $G^{(n)}$ je též redukovanou D-soustavou každé podgrupy G_i ($i = k - 1, k - 2, \ldots, 2, 1$). Jelikož platí (12), dostáváme podle lemmatu 9 ihned $\mathrm{m}(G_1) > \mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$. Odtud vidíme, že

$$\mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \geqq \aleph_0 .^{23}) \tag{13}$$

Kdyby totiž platilo $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) < \aleph_0$, bylo by též $\mathrm{m}(G_1) < \aleph_0$, neboť každý prvek $g_1 \in G_1$ je podle lemmatu 2 lineární kombinací prvků z $\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}$ a všech možných takových lineárních kombinací je zřejmě konečný počet. Jelikož podle (12) a (13) $\mathrm{m}(G^{(n)}_{(p_0)}) > \mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \geqq \aleph_0$, dostáváme opětným použitím druhé části lemmatu 9 $\mathrm{m}(G_1) > \mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)})$. S druhé strany však každý prvek podgrupy G_1 je lineární kombinací prvků z D-soustavy $\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}$, a tedy podle (13)

$$\mathrm{m}(G_1) \leqq \mathrm{m}\,(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \,.\, \aleph_0 = \mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \,.$$

Tím jsme však odvodili z předpokladu (11) spor, takže za předpokladu (9) je skutečně $\mathrm{r}_D(G^{(n)}) = \mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}) = \mathrm{m}(G^{(n)})$. Z této rovnosti a ze vztahu (9) dostáváme $\mathrm{r}_D(G^{(n)}) = \mathrm{m}(G^{(n)}) > \mathrm{r}_D(G)$, $G^{(n)} \subseteq G$, což je ve sporu s větou 6. Tedy nebyl správný ani předpoklad (9) a je skutečně $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$.

Druhé tvrzení dokážeme též použitím lemmatu 9. Nechť za předpokladu, že $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, platí $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \geqq \aleph_0$, t. j. $\mathrm{m}(G^{(n)}) \geqq \aleph_0$. Potom nutně v konečném direktním rozkladu (10) podgrupy $G^{(n)}$ pro vhodné prvočíslo p_0 je

$$\mathrm{m}(G^{(n)}_{(p_0)}) \geqq \aleph_0.$$

Ponechajíce označení z první části důkazu, dostáváme odtud podle první části lemmatu 9 $\mathrm{m}(G_1) \geqq \aleph_0$. Potom ovšem, protože každý prvek grupy G_1 je lineární kombinací prvků z $\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}$, máme $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \geqq \aleph_0$; protože $G^{(n)}_{(p_0)} \subseteq G$, je podle věty 6 $\mathrm{r}_D(G^{(n)}_{(p_0)}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$, a tedy

$$\mathrm{r}_D(G) \geqq \mathrm{r}_D(G^{(n)}_{(p_0)}) = \mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) \geqq \aleph_0 ,$$

což je spor s předpokladem lemmatu 10. Celé lemma 10 je dokázáno.

Věta 8. *Je-li* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$, *resp. je-li* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$,[24]) *potom je* $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G)$.

Důkaz. Nechť nejprve $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$. Jelikož pro každý prvek $0 \neq g \in G$ platí

$$0 \neq g_0 = k \,.\, g = f_{(g)}(g_1, g_2, \ldots, g_m) \,, \quad g_i \in \mathfrak{G} \; (i = 1, 2, \ldots, m) \,,$$

[22]) Dokonce všech prvků $g \in G$, pro něž platí, že $p^i_0 \,.\, g = 0$ ($i = k, k-1, \ldots, 2, 1$).

[23]) Nerovnost možno samozřejmě zlepšit: $\mathrm{m}(\mathfrak{G}^{(n)}_{(p_0)}) > \mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$.

kde $\mathfrak{G}$ je D-soustava grupy G, a jelikož podle lemmatu 10 je mohutnost množiny $\mathfrak{M}^n_{g_0}$ řešení rovnice (8) v grupě G pro každé přirozené n nejvýše rovna D-hodnosti grupy G, snadno zjistíme, že

$$\mathrm{m}(G) \leqq \mathrm{m}(\mathfrak{M}^n_{g_0}) \,.\, \aleph_0 \,.\, \mathrm{m}(\mathfrak{G}) \,.\, \aleph_0 \leqq \mathrm{r}_D(G) \,.\, \mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \mathrm{r}_D(G)\,.$$

S druhé strany platí triviálně $\mathrm{m}(G) \geqq \mathrm{r}_D(G)$, čímž máme důkaz prvního tvrzení hotov.

Abychom dokázali druhé tvrzení, ukážeme, že nerovnost $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ je důsledkem nerovnosti $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$. Předpokládejme za tím účelem opak, t. j.

$$\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0\,. \tag{14}$$

Z lemmatu 10 dostáváme, že pro každé n má rovnice (8) pouze konečně řešení,[25]) a tedy je-li $\mathfrak{G}$ D-soustava grupy G, je $\mathrm{m}(G) \leqq \aleph_0^2 \,.\, \mathrm{m}(\mathfrak{G}) \,.\, \aleph_0 = \aleph_0$, neboť $\mathrm{m}(\mathfrak{G}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$ podle věty 4. Tím jsme odvodili z předpokladu (14) spor s nerovností $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$; celá věta 8 je dokázána.

Věta 9. *Je-li* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ *(nebo* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$*), potom pro libovolnou podgrupu* $H \subseteq G$ *platí rovnost* (5).

Důkaz. Podle věty 7 platí nerovnost (6). Je dále zřejmě $\mathrm{m}(G) \geqq \mathrm{m}(H)$, $\mathrm{m}(G) \geqq \mathrm{m}(G/H)$. Jelikož podle věty 8 je $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G) \geqq \mathrm{m}(H) + \mathrm{m}(G/H)$, a triviálně $\mathrm{m}(H) \geqq \mathrm{r}_D(H)$, $\mathrm{m}(G/H) \geqq \mathrm{r}_D(G/H)$, dostáváme $\mathrm{r}_D(G) \geqq \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H)$; věta 9 je dokázána.

Abychom popsali též případ, kdy platí (5) pro grupy, jejichž D-hodnost je konečná, zaveďme pojem *slabě servantní podgrupy* v dané grupě.

Definice 6. *Podgrupu H grupy G nazveme slabě servantní v G, jestliže každá zbytková třída grupy G/H řádu prvočíselného obsahuje prvek téhož řádu.*[26])

Věta 10. *Je-li* $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, *potom pro její podgrupu* $H \subseteq G$ *platí rovnost* (5) *právě tehdy, je-li H slabě servantní v G.*

Důkaz. Jelikož pro případy $G = 0$ nebo $H = 0$ jsou implikace v obou směrech triviální, předpokládejme $H \neq 0$.

Nechť podgrupa H je slabě servantní v G. Buď $\mathfrak{H} = (h_1, h_2, \ldots, h_r)$ redukovaná D-soustava grupy H (podle věty 6 a věty 4 je konečná) a $\overline{\mathfrak{G}} = (\bar{g}_\iota)_{\iota \in I}$

---

[24]) Je-li G periodická grupa, jejíž prvky mají ohraničené řády, potom z důkazu věty 8 vidíme, že k platnosti $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G)$ stačí předpokládat $\mathrm{m}(G) \geqq \aleph_0$. Příklad grup $G(p^\infty)$, $G(\infty)$ však ukazuje, že v případě obecné periodické či aperiodické grupy nutno předpokládat ostrou nerovnost.

[25]) Zde jsme se však mohli obejít bez druhé části lemmatu 10, neboť k našemu účelu stačí tvrzení, že každá tato rovnice má nejvýše spočetně řešení, což plyne ihned z první části lemmatu 10: utvoříme totiž grupu $G_1 = G + \sum\limits_{i=1}^{\infty}{}' G_i(p)$, $\mathrm{r}_D(G_1) = \aleph_0$, a dále je vše zřejmé.

[26]) Ekvivalentní je definice: Podgrupu H grupy G nazveme slabě servantní v G, jestliže každá rovnice $p \,.\, x = h$, $0 \neq h \in H$, p libovolné prvočíslo, která má řešení v grupě G, má též řešení v H. Je-li G aperiodická grupa, potom ovšem pojem slabě servantní a servantní podgrupy splývá.

redukovaná D-soustava grupy G/H. Podle předpokladu existují prvky $g_\iota \in G$ takové, že

$$g_\iota \in \bar{g}_\iota, \quad O(g_\iota) = O(\bar{g}_\iota), \quad \iota \in I.^{27)} \tag{15}$$

Označme $\mathfrak{G}' = (g_\iota)_{\iota \in I}$. Dokážeme, že množina $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' \cup \mathfrak{H}$ je D-nezávislá. Vyšetřujme lineární kombinaci

$$k_1 . h_1 + k_2 . h_2 + \ldots + k_r . h_r + l_1 . g_{\iota_1} + l_2 . g_{\iota_2} + \ldots + l_s . g_{\iota_s} = 0 ;$$

potom je $l_1 . \bar{g}_{\iota_1} + l_2 . \bar{g}_{\iota_2} + \ldots + l_s . \bar{g}_{\iota_s} = 0$, čili $l_i . \bar{g}_{\iota_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$, a tedy podle (15) $l_i . g_i = 0, i = 1, 2, \ldots, s$. Potom ovšem $k_j . h_j = 0, j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, r$. Dostáváme tudíž nerovnost

$$\mathrm{r}_D(G) \geqq \mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \mathrm{m}(\mathfrak{H}) + \mathrm{m}(\overline{\mathfrak{G}}) = \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H)^{28)}$$

a jelikož podle věty 7 platí (6), je skutečně (5).

Nechť naopak platí rovnost (5). Buďtež $\mathfrak{H} = (h_1, h_2, \ldots, h_r)$, $\mathfrak{G} = (h_1, h_2, \ldots$ $\ldots, h_r, g_1, g_2, \ldots, g_s)$ redukované D-soustavy podgrupy H a grupy G, t. j. $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$. Označme zbytkovou třídu faktorové grupy G/H, v níž leží prvek g_i, symbolem $\bar{g}_i$; je $\bar{g}_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Při tom zřejmě pro každý index i platí:

je-li $O(g_i) = p$, je $O(\bar{g}_i) = p$, je-li $O(g_i) = \infty$, je $O(\bar{g}_i) = \infty$.

Stejným způsobem jako v důkaze věty 7 dokážeme, že množina $\overline{\mathfrak{G}} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots$ $\ldots, \bar{g}_s)$ je D-nezávislá. Jelikož platí (5), je tedy $\overline{\mathfrak{G}}$ redukovaná D-soustava grupy G/H.

Budiž nyní $\bar{g} \in G/H$, $O(\bar{g}) = p$, kde p je prvočíslo. Pak je podle lemmatu 6 a lemmatu 2 $\bar{g} = f(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_s)$. Odtud pro $g \in \bar{g}$ dostáváme $g = f(g_1, g_2, \ldots$ $\ldots, g_s) + h$, $h \in H$, čili $g - h \in \bar{g}$, $g - h = f(g_1, g_2, \ldots, g_s)$. Při tom ovšem $O(f(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_s)) = O(f(g_1, g_2, \ldots, g_s))$, neboť $\overline{\mathfrak{G}}$ je D-nezávislá množina a $O(g_i) = O(\bar{g}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Tedy $O(g - h) = O(\bar{g})$, $g - h \in \bar{g}$, čímž je celá věta 10 dokázána.

Z věty 9 a věty 10 ihned vyplývá následující tvrzení.

Korolár 1. *Je-li H servantní podgrupou v Abelově grupě G (nebo je-li speciálně direktním sčítancem této grupy),*[29] *potom platí rovnost* (5).

Poznámka 5. Uvedeme jednoduchý příklad, ukazující, že z platnosti (5) neplyne ještě, že podgrupa H je servantní v G. Zároveň nám tento příklad ukáže, že *pojem slabě servantní se nekryje s pojmem servantní podgrupy* v dané grupě. Budiž $G = G(\infty) + G(p)$, $G(\infty) = \{g_1\}$, $G(p) = \{g_2\}$, $H = \{p . g_1 + g_2\}$. Je zřejmé, že H není servantní v G, neboť rovnice $p^2 . x = p^2 . g_1$ má řešení $g_1 \in G$, nemá však řešení v podgrupě H.[30] Snadno ale zjistíme, že faktorová

[27]) Je-li $O(\bar{g}_\iota) = p_\iota$, plyne toto tvrzení z předpokladu slabé servantnosti podgrupy H v G, je-li $O(\bar{g}_\iota) = \infty$, je tvrzení triviální.

[28]) Odtud též vidíme, že $\overline{\mathfrak{G}}$ je konečná.

[29]) Toto plyne už ovšem z věty 6.

[30]) Všechna řešení mají tvar $g_1 + k . g_2$ $(k = 1, 2, \ldots p - 1, p)$.

grupa G/H je isomorfní cyklické grupě řádu p^2, vytvořené zbytkovou třídou $\bar{g}_1$, v níž leží generátor g_1 grupy $G(\infty)$. Tedy $r_D(G) = 2$, $r_D(H) = 1$, $r_D(G/H) = 1$ a vztah (5) platí.

4. Závěrečné poznámky

Obsahem tohoto posledního odstavce jsou dvě věty o Abelových grupách konečné D-hodnosti a poznámka k Prüferově pojmu hodnosti Abelovy grupy. Zatím co jsme v předcházejících úvahách nepoužívali žádných hlubších výsledků teorie Abelových grup, odvoláme se nyní na některá tvrzení připomenutá v přípravném odstavci 1.

Na rozdíl od aperiodických grup konečné D-hodnosti (které, jak známo, nejsou obecně direktně rozložitelné na podgrupy D-hodnosti 1) platí toto tvrzení:

Věta 11. *Periodická grupa G konečné D-hodnosti n je direktním součtem n grup D-hodnosti 1, t. j. primárních cyklických grup a grup typu p^∞ (vzhledem k různým prvočíslům p).*[31]

Důkaz. Předně ihned vidíme, že periodické grupy D-hodnosti 1 jsou právě primární cyklické grupy a grupy typu p^∞. Jelikož grupu G můžeme direktně rozložit na p-primární komponenty, jejichž D-hodnost je také konečná, stačí větu dokázat za předpokladu, že G je p-primární. Důkaz provedeme úplnou indukcí. Je-li $n = 1$, je tvrzení věty triviální; předpokládejme, že pro p-primární grupy D-hodnosti $n - 1 \geqq 1$ tvrzení platí. Jelikož z grupy G můžeme vždy direktně oddělit cyklického sčítance nebo grupu typu p^∞, máme $G = G' + G_n$, $r_D(G_n) = 1$. Potom podle věty 6 je $r_D(G') = n - 1$, a tedy $G' = \sum_{i=1}^{n-1}{}' G_i$, $r_D(G_i) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$, odkud $G = \sum_{i=1}^{n}{}' G_i$, $r_D(G_i) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, q. e. d.

Z věty 11 dostáváme ihned následující důsledek.

Korolár 2. *Redukované periodické Abelovy grupy konečné D-hodnosti jsou právě konečné Abelovy grupy.*

Věta 12. *Smíšená Abelova grupa G konečné D-hodnosti je štěpitelná.*

Důkaz. V důsledku $r_D(G) < \aleph_0$ má též periodická část P grupy G konečnou D-hodnost a je tedy podle věty 11 konečným direktním součtem cyklických grup a grup $G(p^\infty)$. Prvky konečného direktního součtu cyklických grup mají však ohraničené řády, takže P je direktním sčítancem G. Věta 12 je dokázána.

Poznámka 6. H. Prüfer (viz [2]) definuje pojem hodnosti Abelovy grupy G takto (označme ji $r_P(G)$):

[31]) Z důkazu této věty je patrno, že stačí předpokládat, aby každá p-primární komponenta grupy G měla konečnou D-hodnost.

Je-li G nenulová, konečná a je-li $\mathfrak{G}$ soustava generátorů této grupy o nejmenším počtu prvků, potom $\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{m}(\mathfrak{G})$. Je-li G nekonečná, označme $\mathfrak{S} = (\Gamma_\iota)_{\iota\in I}$ systém všech konečných podmnožin prvků grupy G; nechť $\mathfrak{G}_\iota$, $\iota \in I$ je soustava generátorů o nejmenším počtu prvků podgrupy grupy G, vytvořené prvky z $\Gamma_\iota (\iota \in I)$. Označme $\mathrm{m}(\mathfrak{G}_\iota) = n_\iota$. Existuje-li v množině přirozených čísel $(n_\iota)_{\iota\in I}$ maximální prvek n_{ι_0}, potom $\mathrm{r}_P(G) = n_{\iota_0}$; neexistuje-li takový prvek (t. j. tato množina je neohraničená), je $\mathrm{r}_P(G) = \infty$. Pro nulovou grupu G je $\mathrm{r}_P(G) = 0$.

Snadno se přesvědčíme, že pro p-primární Abelovy grupy splývá pojem D-hodnosti s Prüferovou definicí hodnosti Abelovy grupy v tom smyslu, že libovolné nekonečné D-hodnosti odpovídá Prüferova hodnost ∞. Předpokládejme nejprve za tím účelem, že p-primární grupa $G_{(p)}$ je konečná. Potom je $G_{(p)}$ konečným direktním součtem p-primárních cyklických grup a vidíme ihned, že

$$\mathrm{r}_P(G_{(p)}) = r_D(G_{(p)}) . \tag{16}$$

Předpokládejme dále, že $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) < \aleph_0$. Budiž Γ libovolná konečná množina prvků z $G_{(p)}$ a $G'_{(p)}$ konečná podgrupa grupy $G_{(p)}$, vytvořená prvky z této množiny; tedy $\mathrm{r}_D(G'_{(p)}) \leqq \mathrm{r}_D(G_{(p)})$. Jelikož $G'_{(p)}$ je konečná, dostáváme $\mathrm{r}_P(G'_{(p)}) = \mathrm{r}_D(G'_{(p)}) \leqq \mathrm{r}_D(G_{(p)})$. S druhé strany však pro konečnou dolní vrstvu $G^\circ_{(p)}$ grupy $G_{(p)}$ je podle předchozí úvahy a poznámky 3 $\mathrm{r}_P(G^\circ_{(p)}) = \mathrm{r}_D(G^\circ_{(p)}) = \mathrm{r}_D(G_{(p)})$, takže skutečně platí (16).

Je-li nakonec $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) \geqq \aleph_0$, potom dolní vrstva $G^\circ_{(p)}$ je direktním součtem nekonečně mnoha cyklických grup $G(p)$, takže ihned dostáváme $\mathrm{r}_P(G_{(p)}) = \infty$.

Stejnými úvahami, využívajíce známé věty o rozkladu Abelovy grupy s konečným počtem generátorů na direktní součet cyklických podgrup, se snadno přesvědčíme, že platí, je-li grupa G aperiodická,

$$\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{r}_D(G) , \tag{17}$$

a že pro libovolnou Abelovu grupu G platí

$$\mathrm{r}_P(G) \leqq \mathrm{r}_D(G) ; \tag{18}$$

při tom oba vztahy (17) a (18) chápeme v případě, je-li $\mathrm{r}_P(G) = \infty$, ve zřejmém smyslu. Příklad konečné cyklické grupy E z poznámky 1 pak ukazuje, že vztah (18) mezi Prüferovou hodností a D-hodností Abelovy grupy může být ostrou nerovností; je totiž zřejmě $r_P(E) = 1$, $\mathrm{r}_D(E) = n$, $n \geqq 2$.

LITERATURA

[1] *А. Г. Курош*: Теория групп, 2-ое изд., Москва 1953.

[2] *H. Prüfer*: Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Zeitschrift **17** (1923), 35—61.

Резюме

D-РАНГ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

ВЛАСТИМИЛ ДЛАБ (Vlastimil Dlab), Прага.

(Поступило в редакцию 9/IV 1956 г.)

Автор называет в статье множество элементов $(g_\iota)_{\iota \in I}$ абелевой группы G *D-независимым*, если из всякого соотношения

$$k_1 \,.\, g_{\iota_1} + k_2 \,.\, g_{\iota_2} + \ldots + k_n \,.\, g_{\iota_n} = 0\,,$$

k_i — целые числа, n — произвольное натуральное число, вытекает $k_i \,.\, g_{\iota_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Финитный характер определения обеспечивает существование *максимальной линейно D-независимой системы* (отличных от нуля элементов); однако, ее мощность в общем случае не является инвариантом группы G (*Замечание* 1). Но если же $G_{(p)}$ является ненулевой p-примарной группой, то все максимальные линейно D-независимые системы (коротко D-системы) имеют одну и ту же мощность (*Теорема* 1), которую назовем *D-рангом* $\mathrm{r}_D(G_{(p)})$ группы $G_{(p)}$; для $G_{(p)} = 0$ положим $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) = 0$. D-ранг $\mathrm{r}_D(G)$ общей ненулевой абелевой группы G определим уравнением

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G) + \sum_p \mathrm{r}_D(P_{(p)})\,,$$

причем $P = \sum_p{}' P_{(p)}$ является прямым разложением периодической части группы G на p-примарные компоненты, а $\mathrm{r}(G)$ означает ранг (в обыкновенном смысле) группы G. Если группа G является ненулевой, то, очевидно, $\mathrm{r}_D(G) > 0$, если G — группа без кручения, то $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G)$.

Из всех D-систем группы G особое место занимают *канонические D-системы*, т. е. такие D-системы, каждый из элементов которых является элементом или бесконечного порядка или порядка, равного степени простого числа. Если $\mathfrak{S}$ — каноническая D-система группы G, то

$$\mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{r}_D(G)\,;^{1}) \tag{1}$$

если же $\mathrm{r}_D(G)$ конечен и если какое-нибудь D-независимое множество $\mathfrak{S}$ элементов группы G удовлетворяет уравнению (1), то $\mathfrak{S}$ есть каноническая D-система группы G (*Теорема* 2 и *Теорема* 3). Далее, справедлива также

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{M} = (\mathfrak{S}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ — *совокупность всех D-систем ненулевой группы G; обозначим* $\mathrm{m}(\mathfrak{S}_\delta) = \lambda_\delta$ *для* $\delta \in \Delta$. *Тогда множество кардинальных чисел* $\Lambda = (\delta_\delta)_{\delta \in \Delta}$ *содержит наибольший элемент* λ_{δ_1} *и* $\lambda_{\delta_1} = \mathrm{r}_D(G)$. *Притом множество* Λ *содержит только один элемент* $\mathrm{r}_D(G)$ *тогда и только*

[1]) Символом $\mathrm{m}(\mathfrak{M})$ обозначена мощность множества $\mathfrak{M}$.

тогда, если в системе $\mathfrak{M}$ *существует хоть одна бесконечная* D*-система* $\mathfrak{G}_{\delta_2}$, *или если же периодическая часть группы* G *является* p*-примарной или нулевой.*

Теорема 6. *Для подгруппы* $H \subseteq G$ *справедливо* $\mathrm{r}_D(H) \leqq \mathrm{r}_D(G)$, *для прямой суммы* $G = \sum'_{\iota \in I} G_\iota$ *имеет место* $\mathrm{r}_D(G) = \sum_{\iota \in I} \mathrm{r}_D(G_\iota)$.

Важное значение имеет утверждение леммы 10, при помощи которой доказывается теорема 8.

Лемма 10. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *множество всех решений уравнения* $n\,.\,x = g_0$, $0 \neq g_0 \in G$, n — *натуральное число, в группе* G. *Тогда или* $\mathfrak{M} = \emptyset$ *или справедливы утверждения:*

Если $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$, *то* $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$; *если* $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, *то* $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) < \aleph_0$.

Теорема 8. *Если* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ *(или* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$*), то* $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G)$.

В теореме 7, в теореме 9 и в теореме 10 исследуются условия, при которых для подгруппы $H \subseteq G$ имеет место соотношение

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H)\,. \tag{2}$$

С этой целью вводится понятие слабо сервантной подгруппы:

Подгруппу H группы G называем *слабо сервантной в* G, если каждый класс фактор-группы G/H, порядок которого равен простому числу, содержит элемент того же порядка.

Теорема 9. *Если* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ *(или* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$*), то для любой подгруппы* $H \subseteq G$ *справедливо соотношение* (2).

Теорема 10. *Для группы* G, $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$, *и ее подгруппы* $H \subseteq G$ *имеет место равенство* (2) *тогда и только тогда, если* H *является слабо сервантной в* G.

Наконец, в теоремах 11 и 12 говорится о периодических и смешанных группах, имеющих конечный D-ранг; сравнивается D-ранг с *определением ранга* $\mathrm{r}_P(G)$ абелевой группой G, *данным Прюфером*. В случае p-примарной группы и в случае группы без кручения всегда $\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{r}_D(G)$; в общем можно только утверждать, что $\mathrm{r}_P(G) \leqq \mathrm{r}_D(G)$. (*Замечание 6.*)

Zusammenfassung

D-RANG EINER ABELSCHEN GRUPPE

VLASTIMIL DLAB, Prag.

(Eingegangen am 9. April 1956.)

Der Autor nennt in der Arbeit eine Menge $(g_\iota)_{\iota \in I}$ von Elementen der abelschen Gruppe G *D-unabhängig*, wenn jede Beziehung

$$k_1\,.\,g_{\iota_1} + k_2\,.\,g_{\iota_2} + \ldots + k_n\,.\,g_{\iota_n} = 0$$

bei ganzen k_i und beliebigem natürlichem n $k_i \,.\, g_{\iota_i} = 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ nach sich zieht. Der finite Charakter der Definition garantiert die Existenz eines *maximalen D-unabhängigen Systems* (von Null verschiedener Elemente), dessen Mächtigkeit aber im Allgemeinen kein Invariant der Gruppe G ist (*Bemerkung 1*). In einer nichttrivialen p-primären Gruppe $G_{(p)}$ haben aber alle maximalen D-unabhängigen Systeme (kurz D-Systeme) dieselbe Mächtigkeit (*Satz 1*), die wir den *D-Rang* $r_D(G_{(p)})$ der Gruppe $G_{(p)}$ nennen; für $G_{(p)} = 0$ definieren wir $\mathrm{r}_D(G_{(p)}) = 0$. Den D-Rang $\mathrm{r}_D(G)$ der allgemeinen abelschen Gruppe G definieren wir durch die Beziehung

$$r_D(G) = \mathrm{r}(G) + \sum_p r_D(P_{(p)})\ ;$$

hier ist $P = \sum_p{}' P_{(p)}$ die direkte Zerlegung der maximalen periodischen Untergruppe in p-primäre Komponenten und $\mathrm{r}(G)$ der Rang der Gruppe (im gewöhnlichen Sinne). Wenn die Gruppe G nichttrivial, d. h. von der Nullgruppe verschieden, ist, so ist offenbar $\mathrm{r}_D(G) > 0$, ist die Gruppe G torsionsfrei, so ist $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G)$.

Unter den D-Systemen der Gruppe G sind besonders wichtig die *kanonischen D-Systeme*, d. h. diejenigen D-Systeme, deren jedes Element entweder eine unendliche oder eine Primzahlpotenzordnung hat. Wenn $\mathfrak{S}$ ein kanonisches D-System der Gruppe G bedeutet, dann gilt die Gleichheit

$$\mathrm{m}(\mathfrak{S}) = \mathrm{r}_D(G)\ ^{1});\tag{1}$$

im Falle, daß $r_D(G)$ endlich ist und irgend eine D-unabhängige Menge $\mathfrak{S}$ der Gleichheit (1) genügt, ist $\mathfrak{S}$ ein kanonisches D-System der Gruppe G (*Satz 2* und *Satz 3*). Weiterhin gilt:

Satz 5. *$\mathfrak{M} = (G_\delta)_{\delta\in\Delta}$ sei das System aller D-Systeme einer nichttrivialen Gruppe G; bezeichnen wir $\mathrm{m}(\mathfrak{S}_\delta) = \lambda_\delta$ für jedes $\delta \in \Delta$. Dann hat die Menge $\Lambda = (\lambda_\delta)_{\delta\in\Delta}$ der Kardinalzahlen λ_δ ein größtes Element λ_{δ_1} und es ist $\mathrm{r}_D(G) = \lambda_{\delta_1}$. Hierbei enthält die Menge Λ gerade ein einziges Element $\mathrm{r}_D(G)$, wenn und nur wenn im System $\mathfrak{M}$ wenigstens ein unendliches D-System $\mathfrak{S}_{\delta_2}$ existiert, oder wenn die maximale periodische Untergruppe der Gruppe G p-primär oder trivial ist.*

Satz 6. *Es ist für die Untergruppe $H \subseteq G$ $\mathrm{r}_D(H) \leqq r_D(G)$ und für die direkte Summe $G = \sum_{\iota\in I}' G_\iota$ $r_D(G) = \sum_{\iota\in I} \mathrm{r}_D(G_\iota)$.*

Die Aussage, die im Hilfssatz 10 enthalten ist, ist besonders wichtig; mit ihrer Hilfe ist dann der Satz 8 bewiesen.

Hilfssatz 10. *$\mathfrak{M}$ sei die Menge aller Lösungen $x \in G$ der Gleichung $n \,.\, x = g_0$, wo n natürlich und $0 \neq g_0 \in G$ ist. Dann ist entweder $\mathfrak{M} = \emptyset$ oder es ist für $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) \leqq \mathrm{r}_D(G)$ und für $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$ ebenfalls $\mathrm{m}(\mathfrak{M}) < \aleph_0$.*

---

[1]) $\mathrm{m}(\mathfrak{M})$ ist die Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{M}$.

Satz 8. *Falls* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ *(bzw.* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$*) ist, so ist* $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(G)$.

Die Sätze 7, 9 und 10 untersuchen, unter welchen Bedingungen für die Untergruppe $H \subseteq G$ die Beziehung

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}_D(H) + \mathrm{r}_D(G/H) \tag{2}$$

richtig ist. Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der schwachen Servanzuntergruppe ein:

Die Untergruppe H der Gruppe G nennen wir eine *schwache Servanzuntergruppe in* G, wenn jede Restklasse der Faktorgruppe G/H von Primzahlordnung ein Element derselben Ordnung enthält.

Satz 9. *Falls* $\mathrm{r}_D(G) \geqq \aleph_0$ *(bzw.* $\mathrm{m}(G) > \aleph_0$*) ist, dann gilt für jede beliebige Untergruppe* $H \subseteq G$ *die Beziehung* (2).

Satz 10. *Falls* $\mathrm{r}_D(G) < \aleph_0$ *ist, dann gilt für ihre Untergruppe* $H \subseteq G$ *die Gleichheit* (2) *dann und nur dann, wenn* H *eine schwache Servanzuntergruppe in* G *ist.*

Am Ende werden in den Sätzen 11 und 12 die periodischen und gemischten Gruppen von endlichem D-Range untersucht, und es ist der D-Rang mit der *Prüferschen Definition des Ranges* $\mathrm{r}_P(G)$ der abelschen Gruppe G verglichen. Für p-primäre und torsionsfreie Gruppen ist immer $\mathrm{r}_P(G) = \mathrm{r}_D(G)$; im Allgemeinen gilt allerdings nur die Beziehung $\mathrm{r}_P(G) \leqq \mathrm{r}_D(G)$. *(Bemerkung 6.)*

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

POZNÁMKA K OTÁZCE ŘEŠITELNOSTI JISTÉ SOUSTAVY NEROVNOSTÍ KLADNÝMI ČÍSLY

ALENA ČERVENÁ, Praha.

(Došlo dne 27. června 1956.) DT:512.13

V článku jsou metodou úplné indukce dokázány nutné a postačující podmínky existence kladného řešení jistého speciálního systému lineárních nerovností.

S. N. Černikov v práci vyšlé na jaře roku 1956 [1] udal nutné a dostačující podmínky pro existenci takového řešení obecného systému lineárních nerovností, jehož některé anebo všechny komponenty jsou kladné (nezáporné), resp. záporné (nekladné). Podmínky uvedené v jeho práci jsou značně složité (jak lze očekávati při obecné formulaci problému).

Úkolem tohoto článku jest zodpovědět speciální otázku, jakým podmínkám musejí vyhovovat kladné konstanty C_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, aby soustava nerovností

$$\begin{aligned} &\alpha_2 C_{12} + \alpha_3 C_{13} + \ldots + \alpha_n C_{1n} < \alpha_1 C_{11}\,, \\ &\alpha_1 C_{21} + \alpha_3 C_{23} + \ldots + \alpha_n C_{2n} < \alpha_2 C_{22}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1 C_{n1} + \alpha_2 C_{n2} + \ldots + \alpha_{n-1} C_{nn-1} < \alpha_n C_{nn} \end{aligned} \tag{1}$$

měla řešení $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, kde $\alpha_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Níže uvedená věta neplyne bezprostředně z odpovídající věty Černikovovy a také metoda obou prací jest různá.

Věta. *Nutná a dostačující podmínka k tomu, aby soustava nerovností* (1), *kde všechny konstanty C_{ik} jsou kladné, měla řešení $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, kde $\alpha_i > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, jest tato:*

a) *Součin $C_{11}C_{22} \ldots C_{nn}$ má největší hodnotu ze všech součinů typu $C_{1i_1}C_{2i_2} \ldots C_{ni_n}$, kde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ je nějaká permutace čísel* $1, 2, \ldots, n$.

b) *Determinant soustavy, kterou dostaneme ze soustavy* (1) *převedením všech členů na pravé strany nerovností, jest větší než nula, t. j.*

$$\begin{vmatrix} C_{11} & -C_{12} \dots & -C_{1n} \\ -C_{21} & C_{22} \dots & -C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -C_{n1} & -C_{n2} \dots & C_{nn} \end{vmatrix} > 0 . \tag{2}$$

(O vzájemném vztahu podmínek a) a b) bude řeč na konci článku.)

Důkaz provedeme úplnou indukcí.

Pro $n = 2$ máme řešit soustavu

$$\alpha_2 C_{12} < \alpha_1 C_{11}, \quad \alpha_1 C_{21} < \alpha_2 C_{22} . \tag{3}$$

Předpokládejme, že soustavě nerovností (3) vyhovují kladná čísla α_1, α_2. Pak $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} < \frac{C_{11}}{C_{12}}$, ale také $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > \frac{C_{21}}{C_{22}}$. Odtud plyne $\frac{C_{21}}{C_{22}} < \frac{C_{11}}{C_{12}}$ neboli

$$C_{21}C_{12} < C_{11}C_{22}, \quad C_{11}C_{22} - C_{21}C_{12} > 0 , \tag{4}$$

čímž jest dokázána nutnost podmínek a) i b).

Splňují-li naopak kladné konstanty C_{ik}, $i, k = 1, 2$ nerovnost (4), pak $\frac{C_{21}}{C_{22}} < \frac{C_{11}}{C_{12}}$ a můžeme zvolit číslo $k > 0$ tak, aby platilo $\frac{C_{21}}{C_{22}} < k < \frac{C_{11}}{C_{12}}$. Položíme-li však $k = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ s kladnými hodnotami α_1, α_2, dostáváme řešení soustavy (3), které má požadované vlastnosti.

Tím jest dokázána i dostačitelnost vyslovené podmínky v případě $n = 2$.

Předpokládejme tedy, že jest naše věta správná pro $n - 1$ a dokažme ji pro n. (Indukčního předpokladu bude použito až při důkazu podmínky b), podmínka a) se dokáže nepřímým důkazem bez použití indukce.)

Podmínka a) jest nutná z tohoto důvodu:

Předpokládejme, že podmínka splněna není, t. zn., že existuje taková permutace $i_1, i_2, \dots, i_n$ čísel $1, 2, \dots, n$, že

$$C_{1i_1}C_{2i_2} \dots C_{ni_n} \geqq C_{11}C_{22} \dots C_{nn}$$

a že soustavě nerovností (1) vyhovuje soustava kladných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Tím spíše by musely být splněny nerovnosti

$$\begin{aligned} C_{1i_1}\alpha_{i_1} &\leqq C_{11}\alpha_1 , \\ C_{2i_2}\alpha_{i_2} &\leqq C_{22}\alpha_2 , \\ &\dots\dots \\ C_{ni_n}\alpha_{i_n} &\leqq C_{nn}\alpha_n . \end{aligned} \tag{5}$$

Jednotlivé nerovnosti v soustavě (5) jsou pro $i_k \neq k$ důsledkem odpovídajících nerovností ze soustavy (1), pro $i_k = k$ pak se redukují na triviální rovnost. Zároveň jest jasné, že v soustavě (5) musí alespoň ve 2 případech, není-li $i_1, i_2, \dots, i_n$ hlavní permutace, platit ostrá nerovnost.

Poněvadž v soustavě nerovností (5) se pracuje vesměs s kladnými veličinami, dostali bychom po vynásobení

$$C_{1i_1}C_{2i_2}\dots C_{ni_n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_n} < C_{11}C_{22}\dots C_{nn}\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\,,$$

což jest spor, neboť $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_n} = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$.

Dokažme nyní za předpokladu, že jest splněna podmínka a), **nutnost podmínky** b).

Nechť jest splněna soustava nerovností (1) (kladnými hodnotami $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$). Pak z první a poslední nerovnosti této soustavy vyplývá

$$\frac{\alpha_1 C_{n1} + \alpha_2 C_{n2} + \dots + \alpha_{n-1}C_{nn-1}}{C_{nn}} < \alpha_n < \frac{\alpha_1 C_{11} - \alpha_2 C_{12} - \alpha_3 C_{13} - \dots - \alpha_{n-1}C_{1n-1}}{C_{1n}} \tag{6}$$

neboli

$$\alpha_1(C_{n1}C_{1n} - C_{11}C_{nn}) + \alpha_2(C_{n2}C_{1n} + C_{12}C_{nn}) + \dots + \alpha_{n-1}(C_{nn-1}C_{1n} + C_{1n-1}C_{nn}) < 0\,,$$

čili

$$\alpha_2(C_{n2}C_{1n} + C_{12}C_{nn}) + \dots + \alpha_{n-1}(C_{nn-1}C_{1n} + C_{1n-1}C_{nn}) < \alpha_1(C_{11}C_{nn} - C_{n1}C_{1n})\,.$$

Analogicky, vyloučíme-li vždy α_n z 2. a n-té atd. až $(n-1)$-té a zároveň n-té nerovnosti soustavy (1), docházíme tak k soustavě $n-1$ nerovností typu

$$\begin{gathered}\alpha_2 C'_{12} + \alpha_3 C'_{13} + \dots + \alpha_{n-1}C'_{1n-1} < \alpha_1 C'_{11}\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_1 C'_{n-11} + \dots + \alpha_{n-2}C'_{n-1\,n-2} < \alpha_{n-1}C'_{n-1\,n-1}\,,\end{gathered} \tag{7}$$

kde $C'_{ik} = C_{ik}C_{nn} + C_{in}C_{nk}$ pro $i \neq k$ a $C'_{ii} = C_{ii}C_{nn} - C_{in}C_{ni}$.

Všechny konstanty C'_{ik} jsou v důsledku podmínky a) kladné a soustava (7) má podle učiněného předpokladu řešení $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, kde $\alpha_i > 0$. Podle indukčního předpokladu vyhovují tedy konstanty C'_{ik}, kde $i, k = 1, 2, \dots, n-1$, podmínce b), t. j.

$$\begin{vmatrix} (C_{11}C_{nn} - C_{1n}C_{n1}) & -(C_{12}C_{nn} + C_{1n}C_{n2}) \dots & -(C_{1n-1}C_{nn} + C_{1n}C_{nn-1}) \\ -(C_{21}C_{nn} + C_{2n}C_{n1}) & (C_{22}C_{nn} - C_{2n}C_{n2}) \dots & -(C_{2n-1}C_{nn} + C_{2n}C_{nn-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ -(C_{n-11}C_{nn} + C_{n-1n}C_{n1}) & \dots\dots & (C_{n-1n-1}C_{nn} - C_{n-1n}C_{nn-1}) \end{vmatrix} > 0\,. \tag{8}$$

Poslední determinant jest možno zapsat ve tvaru

$$D = \frac{1}{C_{nn}}\begin{vmatrix} (C_{11}C_{nn} - C_{1n}C_{n1}) \dots\dots & -(C_{1n-1}C_{nn} + C_{1n}C_{nn-1}) & 0 \\ -(C_{21}C_{nn} + C_{2n}C_{n1}) \dots\dots & -(C_{2n-1}C_{nn} + C_{2n}C_{nn-1}) & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ -(C_{n-11}C_{nn} + C_{n-1n}C_{n1}) \dots & (C_{n-1n-1}C_{nn} - C_{n-1n}C_{nn-1}) & 0 \\ -C_{n1} \quad -C_{n2} \quad \dots & -C_{nn-1} & +C_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Nyní budeme postupně od i-tých řádků ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$) determinantu ve vzorci (9) odčítat řádek n-tý, násobený konstantou C_{in}. Po této úpravě

$$D = \frac{1}{C_{nn}} \begin{vmatrix} C_{11}C_{nn} & -C_{12}C_{nn} \ldots\ldots & -C_{1n-1}C_{nn} & -C_{1n}C_{nn} \\ -C_{21}C_{nn} & C_{22}C_{nn} \ldots\ldots & -C_{2n-1}C_{nn} & -C_{2n}C_{nn} \\ -C_{n-11}C_{nn} & \ldots\ldots\ldots\ldots & -C_{n-1n-1}C_{nn} & -C_{n-1n}C_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -C_{n1} & -C_{n2} \ldots\ldots & -C_{nn-1} & +C_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (C_{nn})^{n-2} \begin{vmatrix} C_{11} & -C_{12} \ldots\ldots & -C_{1n} \\ -C_{21} & C_{22} \ldots\ldots & -C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -C_{n1} & -C_{n2} \ldots\ldots & C_{nn} \end{vmatrix} > 0\,.$$

Poněvadž $(C_{nn})^{n-2} > 0$, dává nám poslední vztah podmínku b) v případě soustavy n nerovností uvažovaného typu.

D o s t a č i t e l n o s t podmínek v naší větě se dokáže zpětným pochodem opět úplnou indukcí:

Zapišme podmínku b) v případě n nerovností. Příslušný determinant násobíme kladnou konstantou $(C_{nn})^{n-2}$ a zpětnou úpravou se dostaneme až k determinantu (8), který je rovněž > 0. V tomto determinantu konstanty $C'_{ik} = C_{ik}C_{nn} + (1 - 2\delta_{ik})\, C_{in}C_{nk}$ jsou kladné (pro $i \neq k$ je to zřejmé, pro $i = k$ jest to v důsledku podmínky a)). Podle indukčního předpokladu má tedy soustava (7) řešení kladnými čísly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Zpětnou úpravou nerovností v soustavě (7) docházíme k nerovnostem typu

$$\frac{\alpha_1 C_{n1} + \alpha_2 C_{n2} + \ldots + \alpha_{n-1} C_{nn-1}}{C_{nn}} <$$
$$< \frac{\alpha_j C_{jj} - \alpha_1 C_{j1} - \ldots - \alpha_{j-1} C_{jj-1} - \alpha_{j+1} C_{jj+1} - \ldots - \alpha_{n-1} C_{jn-1}}{C_{jn}}\,, \quad (10)$$

kde $j = 1, 2, \ldots, n - 1$. (Viz (6) v případě $j = 1$.)

C_{ik} jsou konstanty, za α_j si myslíme dosazeno nějaké kladné řešení soustavy (7). Vzorec (10) nám potom představuje soustavu $n - 1$ nerovností mezi čísly, při čemž na levých stranách těchto nerovností jest vždy totéž kladné číslo, které jest zřejmě menší než minimum pravých stran, které označíme m_α. V důsledku toho můžeme najít kladné číslo α_n, vyhovující nerovnosti

$$\frac{1}{C_{nn}} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_{ni} < \alpha_n < m_\alpha\,,$$

a toto číslo α_n můžeme potom vložit mezi levou a pravou stranu libovolné nerovnosti ze soustavy (10). Soustava kladných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pak zřejmě vyhovuje soustavě nerovností (1). Tím jest dokončen důkaz uvedené věty.

Závěrem jest možno připojit několik poznámek.

P o z n á m k a 1. Předpoklad, že v determinantu (2) jsou kladné konstanty právě v hlavní úhlopříčce, jest pro větu podstatný, jak jest snadno vidět na příkladech.

V případě $n = 2$ vyhovuje dané podmínce soustava

$$C_{11}\alpha_1 - C_{12}\alpha_2 > 0\,, \quad - C_{21}\alpha_1 + C_{22}\alpha_2 > 0\,, \quad C_{ik} > 0\,.$$

Soustava

$$- C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2 > 0\,, \quad C_{21}\alpha_1 - C_{12}\alpha_2 > 0\,,$$

kde $C_{ik} > 0$ pro $i, k = 1, 2$, má řešení kladnými čísly α_1, α_2 tehdy a jen tehdy, jestliže $\begin{vmatrix} -C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & -C_{22} \end{vmatrix} < 0$, jak se snadno přesvědčíme. Konečně na př. soustava $C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2 > 0$, $C_{21}\alpha_2 - C_{22}\alpha_1 > 0$, $C_{ik} > 0$, má řešení kladnými čísly α_1, α_2 při libovolné hodnotě $\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & -C_{22} \end{vmatrix}$.

P o z n á m k a 2. Podmínkám věty bude vyhověno na př. vždy tehdy, bude-li $\dfrac{C_{ij}}{C_{ii}} \leqq \dfrac{1}{n-1}$ pro $j \neq i$, při čemž při pevném i alespoň pro jedno j bude platit ostrá nerovnost. Můžeme totiž nahlédnout přímo, že potom soustava (1) bude mít řešení uvažovaného typu. Věta však dává podmínku řešitelnosti v plné obecnosti.

Pro $n = 3$ má na př. podmínka b) tvar

$$C_{11}C_{23}C_{32} + C_{12}C_{21}C_{33} + C_{12}C_{23}C_{31} + C_{13}C_{21}C_{32} + C_{13}C_{22}C_{31} < \\ < C_{11}C_{22}C_{33}$$

neboli po dělení součinem $C_{11}C_{22}C_{33} > 0$,

$$\frac{C_{23}}{C_{22}} \cdot \frac{C_{32}}{C_{33}} + \frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{C_{21}}{C_{22}} + \frac{C_{12}}{C_{11}} \cdot \frac{C_{23}}{C_{22}} \cdot \frac{C_{31}}{C_{33}} + \frac{C_{13}}{C_{11}} \cdot \frac{C_{21}}{C_{22}} \cdot \frac{C_{32}}{C_{33}} + \frac{C_{13}}{C_{11}} \cdot \frac{C_{31}}{C_{33}} < 1\,.$$

V krajním případě $\dfrac{C_{ij}}{C_{ii}} = \dfrac{1}{2}$ pro $i \neq j$ se nerovnost změní v rovnost $3 \,.\, \dfrac{1}{4} + 2 \,.\, \dfrac{1}{8} = 1\,.$

Pro $n = 4$ má podmínka b) tvar

$$\begin{aligned} &C_{11}C_{22}C_{34}C_{43} + C_{11}C_{23}C_{32}C_{44} + C_{11}C_{23}C_{34}C_{42} + C_{11}C_{24}C_{32}C_{43} + C_{11}C_{24}C_{33}C_{42} + \\ &+ C_{12}C_{21}C_{33}C_{44} + C_{12}C_{23}C_{31}C_{44} + C_{12}C_{23}C_{34}C_{41} + C_{12}C_{24}C_{31}C_{43} + C_{12}C_{24}C_{33}C_{41} + \\ &+ C_{13}C_{21}C_{32}C_{44} + C_{13}C_{21}C_{34}C_{42} + C_{13}C_{22}C_{31}C_{44} + C_{13}C_{22}C_{34}C_{41} + C_{13}C_{24}C_{32}C_{41} + \\ &+ C_{14}C_{21}C_{32}C_{43} + C_{14}C_{21}C_{33}C_{42} + C_{14}C_{22}C_{31}C_{43} + C_{14}C_{22}C_{33}C_{41} + C_{14}C_{23} \,. \\ &. \, C_{31}C_{42} < C_{11}C_{22}C_{33}C_{44} + C_{12}C_{21}C_{34}C_{43} + C_{13}C_{24}C_{31}C_{42} + C_{14}C_{23}C_{32}C_{41} \,. \end{aligned} \tag{11}$$

Po dělení výrazem $C_{11}C_{22}C_{33}C_{44}$ a dosazení krajní hodnoty $\frac{C_{ij}}{C_{ii}} = \frac{1}{3}$ pro $j \neq i$ dostáváme $6 \cdot \frac{1}{9} + 8 \cdot \frac{1}{27} + 6 \cdot \frac{1}{81} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{81}$.

Poznámka 3: Po rozepsání podmínky b) pro případ $n = 3$ v poznámce 2 vidíme, že v tomto případě podmínka a) jest důsledkem podmínky b), avšak nikoliv naopak. V případě $n = 2$ vyplývá dokonce podmínka a) z podmínky b) a naopak podmínka b) z podmínky a). Pro $n \geqq 4$ jsou však již podmínky a) a b) navzájem nezávislé. Položíme-li na př. v (11) $C_{12} = C_{21} = C_{34} = C_{43} = 10$ a ostatní konstanty $= 1$, pak jest zřejmě podmínka b) splněna, ale není splněna podmínka a).

LITERATURA

[1] *С. Н. Черников*: Положительные и отрицательные решения систем линейных неравенств. Мат. сборник т. *38* (*80*): 4 (1956), 479—508. V této práci je uvedena literatura zabývající se příbuznými otázkami.

Резюме

ЗАМЕТКА К ВОПРОСУ РЕШАЕМОСТИ ОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ ПРИ ПОМОЩИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

АЛЕНА ЧЕРВЕНА (Alena Červená), Прага.

(Поступило в редакцию 27/VI 1956 г.)

Главной задачей статьи является доказательство следующей **теоремы:** *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы система неравенств*

$$\begin{aligned}
\alpha_1 C_{11} - \alpha_2 C_{12} - \alpha_3 C_{13} - \ldots - \alpha_n C_{1n} &> 0\,, \\
-\alpha_1 C_{21} + \alpha_2 C_{22} - \alpha_3 C_{23} - \ldots - \alpha_n C_{2n} &> 0\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
-\alpha_1 C_{n1} - \alpha_2 C_{n2} - \alpha_3 C_{n3} - \ldots + \alpha_n C_{nn} &> 0\,,
\end{aligned}$$

где все константы C_{ik} положительны, могла иметь решение $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, где $\alpha_i > 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, является следующее:

a) *Произведение $C_{11}\, C_{22} \ldots C_{nn}$ имеет наибольшее значение из всех произведений типа $C_{1i_1}\, C_{2i_2} \ldots C_{ni_n}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ является какой-то перестановкой чисел $1, 2, \ldots, n$.*

б) *Определитель рассматриваемой системы больше нуля.*

В примечаниях к приведенной теореме указывается на то, что пренебрежение предпосылкой, что все конст. C_{ik} являются положительными, приводит к тому, что теорема перестает быть правильной. Далее устанавливается взаимная зависимость условий а) и б). Для $n = 2$ вытекает из условия а) условие б) и наоборот; для $n = 3$ вытекает из условия б) условие а), но б) не является следствием а); для $n \geqq 4$ оба условия являются взаимно независимыми.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE LÖSUNGSFRAGE EINES SPEZIELLEN SYSTEMS VON UNGLEICHUNGEN DURCH POSITIVE ZAHLEN

ALENA ČERVENÁ, Praha.

(Eingelangt am 27. Juni 1956.)

Eigentliches Ziel der vorgelegten Arbeit ist der Beweis des folgenden **Satzes:** *Notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass ein System von Ungleichungen*

$$\begin{aligned}
\alpha_1 C_{11} - \alpha_2 C_{12} - \alpha_3 C_{13} - \ldots - \alpha_n C_{1n} &> 0\,, \\
-\alpha_1 C_{21} + \alpha_2 C_{22} - \alpha_3 C_{23} - \ldots - \alpha_n C_{2n} &> 0\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-\alpha_1 C_{n1} - \alpha_2 C_{n2} - \alpha_3 C_{n3} - \ldots + \alpha_n C_{nn} &> 0\,,
\end{aligned}$$

wo alle Konstanten C_{ik} positiv sind, eine Lösung $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ besitzt, wo $\alpha_i > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, ist die folgende:

a) *Das Produkt $C_{11}C_{22} \ldots C_{nn}$ besitzt den grössten Wert zwischen allen Produkten von dem Typ $C_{1i_1}C_{2i_2} \ldots C_{ni_n}$, wo $i_1, i_2, \ldots, i_n$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist.*

b) *Das Determinant des genannten Systems von Ungleichungen ist grösser als Null.*

In Bemerkungen zum zitierten Satz zeigt man, dass man durch die Vernachlässigung der Voraussetzung darüber, dass alle Konstanten C_{ik} positiv sind, zu einem nicht mehr richtigen Satz gelangt. Weiter wird die gegenseitige Abhängigkeit der Bedingungen a) und b) untersucht. Für $n = 2$ ist die Bedingung a) Folge von b) und umgekehrt; für $n = 3$ ist a) Folge von b), aber nicht mehr b) Folge von a), für $n \geqq 4$ sind die beiden Bedingungen gegenseitig unabhängig.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

POZNÁMKA K OTÁZCE O OSCILAČNÍCH VLASTNOSTECH ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $y'' + A(x)\,y = 0$

MILOŠ RÁB, BRNO.

(Došlo dne 30. července 1956.) DT: 517.941.91

Autor zostřuje známé kriterium, aby rovnice $y'' + A(x)\,y = 0$ byla neoscilatorická resp. oscilatorická, a zobecňuje nedávno publikované výsledky L. D. NIKOLENKA.

1. E. GAGLIARDO ukázal [1], že postačující podmínka k tomu, aby integrály diferenciální rovnice

$$y'' + A(x)\,y = 0 \tag{1}$$

oscilovaly v intervalu $(x_0, +\infty)$ jest, aby funkce $B(x) = A(x) - \frac{1}{4x^2}$ byla nezáporná a integrál $\int^t xB(x)\,dx \to +\infty$ pro $t \to +\infty$.

L. D. NIKOLENKO odvodil [2] následující nutnou podmínku pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1), „blízkou" k Gagliardově postačující podmínce:

$$\int^t x \ln x \operatorname{Max}\left\{A(x) - \frac{1}{4x^2}, 0\right\} dx \to +\infty \text{ pro } t \to +\infty\,. \tag{2}$$

Gagliardova postačující podmínka je však zvláštním případem obecnější věty, kterou odvodil již před tím M. ZLÁMAL [3].

Označíme-li $\log_0 x = x$, $\log_n x = \log \log_{n-1} x$; $L_0(x) = x$, $L_n(x) = L_{n-1}(x)\,.\,\log_n x$; $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [L_i(x)]^{-2}$, jest Zlámalova postačující podmínka pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1), aby

$$\int^t L_n(x)\left\{A(x) - \frac{1}{4}\,S_n(x)\right\} dx \to +\infty \quad \text{pro } t \to +\infty\,. \tag{3}$$

Podmínku tuto odvodil Zlámal jako korolár věty, které v dalším také užijeme:

a) *Jestliže integrál* $\int\limits^{x} \frac{\mathrm{d}t}{Q(t)}$ *diverguje a jestliže existuje kladná funkce* $\omega(t)$ *mající spojitou první derivaci taková, že*

$$\int\limits^{\infty} \frac{Q(t)}{\omega(t)} \omega'^2(t) \, \mathrm{d}t < +\infty , \tag{4}$$

$$\int\limits^{x} \omega(t) f(t) \, \mathrm{d}t \to +\infty \quad \text{pro} \quad x \to +\infty , \tag{5}$$

pak diferenciální rovnice $(Q(x) y')' + f(x) y = 0$ *jest oscilatorická.*

Obě podmínky (2) a (3) se dají zobecnit.

Ukážeme, že postačující podmínka k tomu, aby integrály diferenciální rovnice (1) oscilovaly, jest, aby

$$\int\limits^{t} \frac{L_{n+1}(x)}{\log_{n+2}^{1+\varepsilon} x} \left\{ A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right\} \mathrm{d}x \to +\infty \quad \text{pro} \quad t \to +\infty , \tag{6}$$

a nutná podmínka

$$\int\limits^{t} L_{n+1}(x) \operatorname{Max} \left\{ A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) , \; 0 \right\} \mathrm{d}x \to +\infty \quad \text{pro} \; t \to +\infty , \tag{7}$$

pro n celé nezáporné a $\varepsilon > 0$.

V případě, že $A(x)$ splňuje podmínku

$$\int\limits^{\infty} L_{n+1}(x) \left| A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right| \mathrm{d}x < +\infty , \tag{8}$$

lze udat pro integrály diferenciální rovnice (1) asymptotické vzorce. Dokážeme, že existuje takový fundamentální systém $y_1(x)$, $y_2(x)$ diferenciální rovnice (1), že

$$y_1(x) \sim \sqrt{L_n(x)} , \quad y_2(x) \sim \sqrt{L_n(x)} \log_{n+1} x .$$

2. Dokážeme nyní postačitelnost podmínky (6) k oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1).

Transformujme diferenciální rovnici (1) substitucí

$$s = \alpha(x) , \quad y(x) = \frac{u(s)}{\sqrt{\alpha'(x)}} ,$$

kde $\alpha(x)$ značí libovolnou funkci, která má v intervalu $(x_0, +\infty)$ spojitou třetí derivaci a $\alpha'(x) > 0$.

Po snadném počtu obdržíme diferenciální rovnici pro u

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}s^2} + R(x) u = 0 , \tag{9}$$

kde

$$R(x) = V(x) + \frac{A(x)}{\alpha'^2(x)}, \quad V(x) = \frac{3}{4}\,\frac{\alpha''(x)}{\alpha'^4(x)} - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha'''(x)}{\alpha'^3(x)}\,. \tag{10}$$

Zvolíme-li specielně $\alpha(x) = \log_{n+1} x$, jest

$$R(x) = L_n^2(x) \left\{ A(x) - \frac{1}{4}\, S_n(x) \right\}.$$

Důkaz. Předně jest $\alpha'(x) = \dfrac{1}{L_n(x)}$, takže stačí ukázat, že $V(x) = -\dfrac{1}{4}\, L_n^2(x)\,.$ $.\, S_n(x)$, čili (podle (10)), že

$$-\frac{1}{4}\, L_n'^2(x) + \frac{1}{2}\, L_n''(x)\, L_n(x) = -\frac{1}{4}\, L_n^2(x)\, S_n(x)\,. \tag{11}$$

Důkaz provedeme úplnou indukcí.

Pro $n = 1$ (11) zřejmě platí. Předpokládejme nyní platnost (11) pro $n - 1$ a dokažme platnost pro n. Poněvadž $L_n'(x) = (L_{n-1}(x) \log_n x)' = L_{n-1}'(x)\,.$ $.\, \log_n x + 1$, $L_n''(x) = L_{n-1}''(x) \log_n x + \dfrac{L_{n-1}'(x)}{L_{n-1}(x)}$, dostáváme po dosazení do levé strany (11):

$$-\frac{1}{4}\, L_n'^2(x) + \frac{1}{2}\, L_n''(x)\, L_n(x) = -\frac{1}{4}\, [L_{n-1}'(x) \log_n x + 1]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\, L_n(x) \left[L_{n-1}''(x) \log_n x + \frac{L_{n-1}'(x)}{L_{n-1}(x)} \right] = \log_n^2 x \left[\frac{1}{2}\, L_{n-1}(x)\, L_{n-1}''(x) - \frac{1}{4}\, L_{n-1}'^2(x) \right] -$$

$$-\frac{1}{4} = \log_n^2 x \left[-\frac{1}{4}\, S_{n-1}(x)\, L_{n-1}^2(x) \right] - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\, L_n^2(x)\, S_{n-1}(x) - \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{1}{4}\, L_n^2(x) \left[S_{n-1}(x) - \frac{1}{L_n^2(x)} \right] = -\frac{1}{4}\, L_n^2(x)\, S_n(x)\,, \quad \text{c. b. d.}$$

Obdrželi jsme tedy tento výsledek:

Diferenciální rovnice (1) *se transformuje substitucí*

$$s = \alpha(x)\,, \quad y = \frac{u(s)}{\sqrt{\alpha'(x)}}\,, \quad \text{kde } \alpha(x) = \log_{n+1} x \tag{12}$$

v diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + L_n^2(x) \left\{ A(x) - \frac{1}{4}\, S_n(x) \right\} u = 0\,. \tag{13}$$

Položme nyní ve větě (a) $\omega(s) = s(\log s)^{-1-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, $Q(s) \equiv 1$ a aplikujme ji na diferenciální rovnici (13). Poněvadž $\omega'(s) = (\log s)^{-1-\varepsilon} - (1 + \varepsilon)\,.$ $.\, (\log s)^{-2-\varepsilon}$, jest

$$\int^{\infty} \frac{\omega'^2(s)}{\omega(s)}\,\mathrm{d}s = \int^{\infty} \frac{(\log s)^{-2-2\varepsilon} - 2(1+\varepsilon)(\log s)^{-3-2\varepsilon} + (1+\varepsilon)^2 (\log s)^{-4-2\varepsilon}}{s\,(\log s)^{-1-\varepsilon}}\,\mathrm{d}s <$$

$$< 4(1+\varepsilon)^2 \int^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s\,(\log s)^{1+\varepsilon}} < +\infty\,.$$

Také podmínka (5) je splněna vzhledem k předpokladu (6), neboť

$$\int^{t} \omega(s)\,f(s)\,\mathrm{d}s = \int^{t'} \log_{n+1} x (\log\log_{n+1} x)^{-1-\varepsilon} L_n^2(x) \left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right\} \mathrm{d}(\log_{n+1} x) =$$

$$= \int^{t'} \frac{L_{n+1}(x)}{\log_{n+2}^{1+\varepsilon} x} \left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right\} \mathrm{d}x\,,$$

kde t' je dáno vztahem $t = \log_{n+1} t'$. Integrály diferenciální rovnice (13), a tedy též (1) oscilují v intervalu $(x_0, +\infty)$ a postačitelnost podmínky (6) je dokázána.

Než přistoupíme k vyšetření integrálů diferenciální rovnice (1) v případě neoscilatorickém, připomeňme větu [4], [5]:

Jestliže $\int^{\infty} x\,|f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$, *má diferenciální rovnice* $y'' + f(x)\,y = 0$ *takový fundamentální systém, že* $y_1 \sim 1$, $y_2 \sim x$.

Aplikujeme-li tuto větu na diferenciální rovnici (13), obdržíme: jestliže

$$\int^{\infty} s L_n^2(x) \left|A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right| \mathrm{d}s = \int^{\infty} L_{n+1}(x) \left|A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right| \mathrm{d}x < +\infty\,,$$

má diferenciální rovnice (13) fundamentální systém $u_1 \sim 1$, $u_2 \sim s$, a tedy diferenciální rovnice (1) vzhledem k (12) fundamentální systém

$$y_1 \sim \sqrt{L_n(x)}\,, \qquad y_2 \sim \sqrt{L_n(x)}\,\log_{n+1} x\,,$$

takže je zřejmě neoscilatorická.

Abychom dokázali podmínku (7), nutnou pro oscilaci, položme $B(x) = = \operatorname{Max}\left\{A(x)\,, \frac{1}{4} S_n(x)\right\}$. Jestliže

$$\int^{\infty} L_{n+1}(x) \left|B(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right| \mathrm{d}x = \int^{\infty} L_{n+1}(x) \operatorname{Max}\left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\,, 0\right\} \mathrm{d}x < +\infty$$

dle (8), jest diferenciální rovnice $y'' + B(x)\,y = 0$ neoscilatorická, a tedy tím spíše neosciluje diferenciální rovnice (1). Nutnost podmínky (7) pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1) jest tím dokázána.

Poznámka při korektuře. Podmínku (7) nutnou pro oscilaci integrálů diferenciální rovnice (1) odvodil současně Nikolenko v práci „Об одном достаточном условии неколебательности решений уравнения $y'' + f(x)y = 0$," ДАН СССР *110* (1956) 929—931.

LITERATURA

[1] *E. Gagliardo*: Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione differenziale $y'' + A(x)\,y = 0$ con $A(x) \geqq 0$, Boll. Unione Mat. Ital. *VIII* (1953), Ser. III, No 2, 177—185.

[2] *Л. Д. Николенко*: К вопросу об осцилляции решений дифференциального уравнения $y'' + p(x)\,y = 0$, Украинский Матем. Журнал VII (1955), No 1, 124—127.

[3] *M. Zlámal*: Oscillation criterions, Čas. pro pěst. matem. a fys. *75* (1950), 213—218.

[4] *M. Bôcher*: On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analytic, Trans. Amer. Math. Soc. *1* (1900), 40—52.

[5] *E. Hille*: Non-oscillation theorems, Trans. Amer. Math. Soc. *64* (1948), 234—252.

Резюме

ЗАМЕТКА К ВОПРОСАМ О КОЛЕБЛЮЩИХСЯ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y'' + A(x)\,y = 0$

МИЛОШ РАБ (Miloš Ráb), Брно.

(Поступило в редакцию 30/VII 1956 г.)

Л. Д. Николенко [2] указал необходимое условие для того, чтобы решения линейного дифференциального уравнения 2-ого порядка

$$y'' + A(x)\,y = 0 \tag{1}$$

были колеблющимися, которое он считал ,,достаточно близким" достаточному условию Э. Гаглиарда. Это необходимое условие, рядом с достаточным условием Гаглиарда [1]:

$$B(x) = A(x) - \frac{1}{4x^2} \geqq 0, \quad \int^t xB(x)\,\mathrm{d}x \to +\infty \text{ при } t \to +\infty,$$

следующее:

$$\int^\infty x \ln x \operatorname{Max}\left\{A(x) - \frac{1}{4x^2},\ 0\right\} \mathrm{d}x = +\infty\,.$$

В настоящей работе оба условия обобщаются. Доказывается, что достаточным условием для того, чтобы решения дифференциального уравнения (1) были колеблющимися, является расходимость интеграла

$$\int^t \frac{L_{n+1}(x)}{\log_{n+2}^{1+\varepsilon} x}\left\{A(x) - \frac{1}{4}\,S_n(x)\right\} \mathrm{d}x \text{ при } t \to +\infty\,,$$

где n — целое неотрицательное число и $\varepsilon > 0$. (Определение функций $L_n(x)$ и $S_n(x)$ смотри в статье.)

Необходимое условие следующее:

$$\int^{t} L_{n+1}(x) \operatorname{Max}\left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x),\ 0\right\} dx \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty .$$

При условии $\int^{\infty} L_{n+1}(x) \left| A(x) - \frac{1}{4} S_n(x) \right| dx < +\infty$ выводятся для решений дифференциального уравнения (1) асимптотические формулы. Доказывается, что существует такая фундаментальная система y_1 и y_2 решений дифференциального уравнения (1), что $y_1(x) \sim \sqrt{L_n(x)}$, $y_2(x) \sim \sqrt{L_n(x)} \cdot \log_{n+1} x$.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ZU DER FRAGE ÜBER DIE OSZILLATORISCHEN EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIAL-GLEICHUNG $y'' + A(x)\,y = 0$

MILOŠ RÁB, Brno

(Eingelangt 30. VII. 1956.)

L. D. Nikolenko [2] hat eine notwendige Bedingung für die Oszillation der Lösungen der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + A(x)\,y = 0 \tag{1}$$

abgeleitet, die er als „naheliegend" der hinreichenden Bedingung von E. Gagliardo [1] betrachtete. Seine notwendige Bedingung, neben der hinreichenden Bedingung von Gagliardo [1]:

$$B(x) = A(x) - \frac{1}{4x^2} \geqq 0\,, \quad \int^{t} x B(x)\, dx \to +\infty \quad \text{für} \quad t \to +\infty\,,$$

ist folgende:

$$\int^{\infty} x \ln x \operatorname{Max}\left\{A(x) - \frac{1}{4x^2},\ 0\right\} dx = +\infty\,.$$

In der vorliegenden Arbeit werden beide Bedingungen verallgemeinert. Es wird bewiesen, dass die hinreichende Bedingung für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung (1) die Divergenz des Integrals

$$\int^{t} \frac{L_{n+1}(x)}{\log_{n+2}^{1+\varepsilon} x} \left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right\} dx \quad \text{für } t \to +\infty$$

ist, wo $\varepsilon > 0$ und n eine nichtnegative ganze Zahl ist. (Die Definition der Funktionen $L_n(x)$ und $S_n(x)$ findet man in der Arbeit.)

Die notwendige Bedingung ist:

$$\int^{t} L_{n+1}(x) \operatorname{Max}\left\{A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\,,\ 0\right\} dx \to +\infty \quad \text{für} \quad t \to +\infty\,.$$

Unter der Voraussetzung $\int^{\infty} L_{n+1}(x) \left|A(x) - \frac{1}{4} S_n(x)\right| dx < +\infty$

werden für die Lösungen der Differentialgleichung (1) die asymptotischen Formeln abgeleitet. Es wird bewiesen, dass ein solches Fundamentalsystem y_1 und y_2 der Differentialgleichung (1) existiert, dass $y_1(x) \sim \sqrt{L_n(x)}$, $y_2(x) \sim \sqrt{L_n(x)} \,.\, \log_{n+1} x$ gilt.

POZNÁMKA O KONVEXNÍM MNOHOÚHELNÍKU

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Došlo dne 30. července 1956.) DT: 513.192

Tato poznámka navazuje na otevřené otázky z autorovy práce „O soustavách úhlopříček v konvexním n-úhelníku", Časopis pro pěstování matematiky, *81* (1956), 157—161.

Základní pojmy a symbolika jsou zavedeny v citovaném autorově článku. Dále pro stručnost označme card N počet prvků (konečné) množiny N. Číslem v celém článku rozumíme celé číslo.

Otázka odhadu čísla card $S_k^{(n)}$ může být úplně zodpovězena jen po zjištění, pro která k, n existuje soustava $S_k^{(n)}$. Předpokládáme-li však, že k je číslo „poměrně malé" vzhledem k n, je existence soustavy zaručena a můžeme přistoupit k odhadu pro card $S_k^{(n)}$, což se provádí v tomto příspěvku.

Existuje-li v konvexním n-úhelníku soustava $S_k^{(n)}$, můžeme pomocí $S_k^{(n)}$ definovat rozklad $R_k^{(n)}$ daného n-úhelníka na maximální souvislé oblasti. Snadno se nahlédne, že prvky z $R_k^{(n)}$ jsou konvexní mnohoúhelníky[1]). Počet r-úhelníků v rozkladu $R_k^{(n)}$ označme σ_r.

Lemma 1. *Je-li* $k \geqq 1$ *a existuje-li* $S_k^{(n)}$, *pak* card $R_k^{(n)} \geqq n$.

Důkaz. Při $n = 4$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že existuje nejmenší číslo $n > 4$ takové, že pro jisté $k \geqq 1$ existuje $S_k^{(n)}$ a platí card $R_k^{(n)} < n$. Odtud plyne existence (konvexního) r-úhelníka v rozkladu $R_k^{(n)}$, který má aspoň dvě strany A_vA_{v+1} a A_wA_{w+1} $(1 \leqq v < w < n)$ společné s daným n-úhelníkem. Je-li $v + 1 < w$, existuje úhlopříčka A_vA_w non $\in S_k^{(n)}$ (spor s definicí soustavy $S_k^{(n)}$). Je-li $v + 1 = w$, pak musí být $A_vA_{w+1} \in S_k^{(n)}$, tedy $\Delta A_vA_wA_{w+1} \in R_k^{(n)}$, takže v $(n - 1)$-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_vA_{w+1} \ldots A_n$ existuje soustava $S_k^{(n-1)} = S_k^{(n)} \dot{-} \{A_vA_{w+1}\}$ a jí určený rozklad $R_k^{(n-1)} = R_k^{(n)} \dot{-} \{\Delta A_vA_wA_{w+1}\}$ splňuje podmínku card $R_k^{(n-1)} < n - 1$, což je spor s minimalitou čísla n.

[1]) Počet stran každého z nich je nejvýše n při n lichém a nejvýše $n - 1$ při n sudém; viz *Шклярский-Ченсов-Яглом:* Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 2, Москва 1952 (задача 6).

Věta 1. *Je-li $n \geqq 2k + 2 \geqq 4$, pak ke každému $c \in \langle n - k - 1; n + k - 3\rangle$ existuje soustava $S_k^{(n)}$ tak, že* card $S_k^{(n)} = c$.

Důkaz. Pro $n = 4$ a $n = 5$ je tvrzení zřejmé. Budiž $n > 5$ a předpokládejme, že v každém konvexním n'-úhelníku ($n' < n$) ke každým c', k' splňujícím vztahy

$$n' \geqq 2k' + 2 \geqq 4\,, \quad n' - k' - 1 \leqq c' \leqq n' + k' - 3$$

existuje soustava $S_{k'}^{(n')}$ tak, že card $S_{k'}^{(n')} = c'$. Uvažujme n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ a nechť $n \geqq 2k + 2 \geqq 4$, $n - k - 1 \leqq c \leqq n + k - 3$. Pro $k = 1$ je $c = n - 2$ a tvrzení je zřejmé. Nechť tedy dále je $k \geqq 2$, t. j. $n \geqq 2k + 2 \geqq 6$.

a) Je-li $c = n - k - 1$, sestrojíme soustavu $\overline{S}_k^{(n)}$ mající card $\overline{S}_k^{(n)} = c$ takto: Je-li $n = 2k + 2$, vedeme úhlopříčku $A_{k+1}A_n$ a dále k úhlopříček A_iA_{n-i} ($1 \leqq i \leqq k$); dostáváme tak $\overline{S}_k^{(n)}$. Je-li $n > 2k + 2$, sestrojíme v uvažovaném n-úhelníku úhlopříčku $A_1 A_{2k+2}$. Ve vzniklém konvexním $(2k + 2)$-úhelníku sestrojíme soustavu k-tého stupně o $k + 1$ prvcích způsobem prve popsaným a ve zbývajícím konvexním $(n - 2k)$-úhelníku soustavu nultého stupně. Vznikne tak v uvažovaném n-úhelníku soustava $\overline{S}_k^{(n)}$ taková, že card $\overline{S}_k^{(n)} = 1 + (k + 1) + ((n - 2k) - 3) = c$ [2]).

b) Je-li $c = n - k$, pak soustavu $S_k^{(n)}$ sestrojíme tak, že v soustavě $\overline{S}_k^{(n)}$ sestrojené sub a) místo úhlopříčky $A_1 A_{2k+1}$ zavedeme dvě úhlopříčky A_2A_{2k+1} a A_2A_{2k+2}.

c) Je-li konečně $c \in \langle n - k + 1;\ n + k - 3\rangle$, pak $n - 2 \geqq 2(k - 1) + 2 \geqq 4$, $(n - 2) - (k - 1) - 1 \leqq c - 3 \leqq (n - 2) + (k - 1) - 3$. Podle indukčního předpokladu máme v konvexním $(n - 2)$-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_{n-2}$ zaručenou existenci soustavy $S_{k-1}^{(n-2)}$, pro níž card $S_{k-1}^{(n-2)} = c - 3$. Připojíme tedy ještě úhlopříčky A_1A_{n-2}, A_1A_{n-1} a $A_{n-2}A_n$, čímž je žádaná konstrukce provedena.

Věta 2. *Existuje-li soustava $S_k^{(n)}$ (kde $k \geqq 1$), pak*

$$n - k - 1 \leqq \text{card}\, S_k^{(n)} \leqq n + k - 3\,.$$

Důkaz. Soustavu $S_k^{(n)}$ spolu se stranami daného n-úhelníka lze považovat za rovinný graf o $n + k$ uzlech a h hranách (kde $h = n + 2k + \text{card}\, S_k^{(n)}$). Položíme-li $\sigma = \text{card}\, R_k^{(n)}$, platí podle Eulerovy věty [3])

$$\sigma = h - (n + k) + 1 = k + 1 + \text{card}\, S_k^{(n)}\,.$$

Podle lemmatu 1 je tedy card $S_k^{(n)} \geqq n - k - 1$. Abychom určili ještě horní odhad, uvažme, že $2h = n + \sum_{r=3}^{\infty} \sigma_r \geqq n + 3\sigma$; odtud card $S_k^{(n)} \leqq n + k - 3$.

[2]) Snadno však nahlédneme, že vztah card $S_k^{(n)} = n - k - 1$ necharakterisuje jen soustavy, v nichž všechny průsečíky leží na téže úhlopříčce (srovnej dále větu 3).

[3]) Viz *D. König*: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936, str. 196.

Věta 3. *Nechť existuje soustava* $S_k^{(n)}$ $(k \geqq 1)$; *pak platí* $\operatorname{card} S_k^{(n)} = n + k - 3$ *právě tehdy, neleží-li žádné dva průsečíky soustavy na téže úhlopříčce.*

Důkaz. Nechť žádné dva průsečíky soustavy $S_k^{(n)}$ neleží na téže úhlopříčce. Odstraňme k úhlopříček z $S_k^{(n)}$ tak, že z každých dvou úhlopříček procházejících jistým jejím průsečíkem ponecháme pouze jednu. Vznikne tak $S_0^{(n)}$, tedy $\operatorname{card} S_k^{(n)} = k + \operatorname{card} S_0^{(n)} = n + k - 3$.

Nechť obráceně $\operatorname{card} S_k^{(n)} = n + k - 3$. Pak všechny prvky z $R_k^{(n)}$ jsou trojúhelníky, neboť z opaku plyne $2h = n + \sum_{r=3}^{\infty} r\sigma_r > n + 3\sigma$ čili $\operatorname{card} S_k^{(n)} < < n + k - 3$ (spor). Nechť nyní na jisté úhlopříčce leží aspoň dva různé průsečíky X, Y. Lze předpokládat, že uvnitř úsečky XY neleží už žádný průsečík. Tato úsečka je stranou ve dvou trojúhelnících XYZ, XYZ' obsažených v $R_k^{(n)}$ (body Z, Z' jsou různé). Protože X leží právě na dvou úhlopříčkách, přímky XZ a XZ' jsou totožné (společné označení p_X) a podobně i přímky YZ a YZ' (společné označení p_Y). Protože X leží na p_X a Y na p_Y, jsou p_X, p_Y dvě různé přímky. Bod Z leží současně na obou přímkách p_X, p_Y a totéž platí o bodu Z'. Tedy Z, Z' jsou totožné (spor).

Резюме

ЗАМЕТКА О ВЫПУКЛОМ МНОГОУГОЛЬНИКЕ

ИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага.

(Поступило в редакцию 30/VII 1956 г.)

В этой заметке автор занимается решением вопросов, которые остались открытыми в его работе „О системах диагоналей в выпуклом n-угольнике“, *Časopis pro pěstování matematiky*, *81* (1956), 157—161.

Пусть никакие три диагонали выпуклого n-угольника $(n > 3)$ не имеют общей точки пересечения. Множество диагоналей, определяющих в точности k точек пересечения диагоналей, причем прибавлением какой-либо дальнейшей диагонали число точек пересечения увеличится, обозначим через $S_k^{(n)}$. Пусть символ $\operatorname{card} S_k^{(n)}$ означает число элементов множества $S_k^{(n)}$. В статье проводится оценка числа $\operatorname{card} S_k^{(n)}$ в случае, когда k „сравнительно мало“ по отношению к n; доказаны следующие теоремы:

1. *Если* $n \geqq 2k + 2 \geqq 4$ *и* c — *целое число, расположенное в интервале* $\langle n - k - 1; n + k - 3 \rangle$, *то существует* $S_k^{(n)}$ *так, что* $\operatorname{card} S_k^{(n)} = c$.

2. *Если существует* $S_k^{(n)}$ (*где* $k \geqq 1$), *то*

$$n - k - 1 \leqq \operatorname{card} S_k^{(n)} \leqq n + k - 3 .$$

Равенство card $S_k^{(n)} = n + k - 3$ *справедливо тогда и только тогда, кагда никакие две точки пересечения из* $S_k^{(n)}$ *не лежат на той же диагонали.*

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ÜBER DAS KONVEXE POLYGON

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Eingelangt am 30. VII. 1956.)

Diese Bemerkung befasst sich mit offenen Fragen der Arbeit des Verfassers „O soustavách úhlopříček v konvexním n-úhelníku" (Über Systeme der Diagonalen im konvexen n-Eck), Časopis pro pěstování matematiky, *81* (1956), 157—161.

Wir betrachten nur so ein konvexes n-Eck, dessen keine drei Diagonalen einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Wir bezeichnen mit $S_k^{(n)}$ so eine Menge der Diagonalen im n-Eck, die folgende zwei Eigenschaften hat: 1. $S_k^{(n)}$ enthält gerade k Schnittpunkte der Diagonalen; 2. durch Hinzufügen jeder weiteren Diagonalen des n-Ecks zu $S_k^{(n)}$ entstehen mindestens $k + 1$ Schnittpunkte. Es sei card $S_k^{(n)}$ die Elementanzahl der Menge $S_k^{(n)}$. In unserem Beitrag wird die Abschätzung von card $S_k^{(n)}$ unter der Voraussetzung durchgeführt, dass k eine „verhältnismässig kleine" Zahl in Bezug auf n ist. Es werden diese Sätze bewiesen:

1. *Wenn* $n \geqq 2k + 2 \geqq 4$ *und* c *eine weitere ganze Zahl aus dem Interval* $\langle n - k - 1; n + k - 3\rangle$ *ist, dann existiert* $S_k^{(n)}$ *so, dass* card $S_k^{(n)} = c$ *ist.*

2. *Wenn* $S_k^{(n)}$ *(für* $k \geqq 1$*) existiert, dann ist*

$$n - k - 1 \leqq \text{card } S_k^{(n)} \leqq n + k - 3 .$$

Die Gleichung card $S_k^{(n)} = n + k - 3$ *gilt dann und nur dann, wenn keine zwei Schnittpunkte von* $S_k^{(n)}$ *auf der gleichen Diagonalen liegen.*

O JEDNÉ VLASTNOSTI CELOČÍSELNÝCH NEZÁPORNÝCH ŘEŠENÍ ROVNICE $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$

KAREL ČULÍK, Brno.

(Došlo dne 29. srpna 1956.) DT: 519.1

Řešením rovnice

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = n\,, \tag{1}$$

kde k, n jsou daná přirozená čísla, rozumíme systém $\{r_i\}_{i=1}^k$ celých a nezáporných čísel r_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, který vyhovuje rovnici (1). Vždy lze předpokládat, že řešení $\{r_i\}_{k=1}^i$ splňuje podmínku

$$r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_k\,. \tag{2}$$

O otázce po počtu řešení rovnice (1) bylo v matematické literatuře často pojednáno (viz E. Netto: *Lehrbuch der Kombinatorik*, 2. vyd., 1927, str. 118 a násl.). V tomto příspěvku jsou vyšetřovány otázky jiného druhu a to:

Pro která řešení $\{r_i\}_{i=1}^k$ rovnice (1) nabývá výraz $\sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$, kde $c \geqq 0$ je dané celé číslo, minimální hodnoty a jaká je tato minimální hodnota? [1])

Odpověď na tuto otázku je dána větou 2, v níž je využito t. zv. *hlavního řešení* rovnice (1).

Řešení $\{h_i\}_{i=1}^k$ rovnice (1) nazýváme *hlavním řešením*, jestliže je definováno takto: $h_i = \left[\frac{n}{k}\right]$ pro $1 \leqq i \leqq j$, $h_i = \left[\frac{n+k}{k}\right]$ pro $j < i \leqq k$, kde $j = k\left[\frac{n+k}{k}\right] - n$.[2]) Pak platí

Věta 1. a) *Pro každé řešení* $\{r_i\}_{i=1}^k$ *rovnice* (1), *které splňuje nerovnosti* (2), *platí*

$$r_1 \leqq h_1 \leqq h_k \leqq r_k\,. \tag{3}$$

[1]) Podnětem k těmto úvahám byla práce *On a problem of K. Zarankiewicz*, Colloq. Math. *3* (1954), str. 54 a 57, od T. Kővári, V. T. Sóse a P. Turána.

[2]) Symbol $[x]$ značí *Gaussovu funkci*, t. j. největší celé číslo c, pro něž platí $c \leqq x$.

b) *Řešení* $\{r_i\}_{i=1}^k$, *které splňuje podmínku* (2), *je hlavním řešením tehdy a jen tehdy, když*

$$r_k - r_1 < 2\,. \tag{4}$$

Důkaz. a) Kdyby bylo $r_1 \geqq h_1 + 1$, bylo by podle (2) také $n = \sum_{i=1}^k r_i \geqq \geqq k\left[\frac{n+k}{k}\right] > n$, což je spor, a podobně se dojde ke sporu z předpokladu $r_k < h_k$. — b) Nutnost podmínky (4) je zřejmá. Je-li tedy naopak $\{r_i\}_{i=1}^k$ řešením rovnice (1), které splňuje (4) a (2), pak buď $r_1 = r_k$ a tedy podle (3) musí být $r_i = h_i$ pro každé i, $1 \leqq i \leqq k$, nebo $r_1 + 1 = r_k$, takže podle (3) musí být $r_1 \leqq h_1 \leqq h_k \leqq r_k = r_1 + 1$. Kdyby bylo $r_1 < h_1$, tedy také $h_1 = = h_k = r_k = r_1 + 1$, muselo by být $\sum_{i=1}^k r_i < \sum_{i=1}^k h_i$, a podobně kdyby bylo $r_1 = h_1 = h_k < r_k = r_1 + 1$, muselo by být $\sum_{i=1}^k r_i > \sum_{i=1}^k h_i$, což je v obou případech spor. Zbývá tedy, že platí $r_1 = h_1 < h_k = r_k = r_1 + 1$, odkud plyne $r_i = h_i$ pro všechna i, $1 \leqq i \leqq k$.

Lemma 1. *Nechť* r, p, c *jsou celá čísla, která splňují nerovnosti* $r \geqq 0$, $c \geqq 0$ *a* $2r \geqq p \geqq 0$. *Pak platí*

$$2\binom{r}{c} \leqq \binom{p}{c} + \binom{2r-p}{c}.\text{[3]} \tag{5}$$

Důkaz. Lze předpokládat, že $p < r$ a tvrzení dokázat indukcí vzhledem k c. Pro $c = 0,1$ je tvrzení zřejmě správné a předpokládejme, že je správné také pro $c - 1 \geqq 1$, avšak nikoli pro c, t. j., že platí nerovnosti

$$2\binom{r}{c-1} \leqq \binom{p}{c-1} + \binom{2r-p}{c-1} \quad \text{a} \quad \binom{p}{c} + \binom{2r-p}{c} < 2\binom{r}{c}.$$

Označíme-li pro stručnost $A = 2\binom{r}{c-1}$, $B = \binom{p}{c-1}$ a $C = \binom{2r-p}{c-1}$, přejdou obě nerovnosti do tvarů $A \leqq B + C$ a $B\frac{p-c+1}{c} + C\frac{2r-p-c+1}{c} < < A\frac{r-c+1}{c}$. Z předpokladů $c - 1 \geqq 1$ a $p < r$ však plyne $B \leqq C$ a tedy také $B\frac{r}{c} \leqq B\frac{p}{c} + C\frac{r-p}{c}$, takže platí $\frac{A}{c}(r-c+1) \leqq \frac{B+C}{c}(r-c+1) \leqq \leqq \frac{B}{c}(p-c+1) + \frac{C}{c}(2r-p-c+1) < \frac{A}{c}(r-c+1)$, což je spor.

---

[3]) Jsou-li m, n celá čísla, klademe podle obvyklých definic $\binom{m}{n} = 0$ pro $n < 0$ a pro $m < n$, avšak $\binom{m}{0} = 1$ pro $m \geqq 0$ a také $0! = 1$.

Lemma 2. *Nechť r, p, c jsou celá čísla, která splňují nerovnosti $r \geqq 0$, $c \geqq 0$ a $2r + 1 \geqq p \geqq 0$. Pak platí*

$$\binom{r}{c} + \binom{r+1}{c} \leqq \binom{p}{c} + \binom{2r-p+1}{c}. \tag{6}$$

Důkaz. Lze předpokládat, že $p < r$ a tvrzení dokázat indukcí vzhledem k c. Pro $c = 0, 1$ je tvrzení zřejmě správné a také pro $c = 2$, jak plyne ze správné nerovnosti $0 < (r - p)^2 + r - p$. Předpokládejme, že (6) platí pro $c - 1 \geqq 2$, ale neplatí pro c, t. j. že platí nerovnosti

$$\binom{r}{c-1} + \binom{r+1}{c-1} \leqq \binom{p}{c-1} + \binom{2r-p+1}{c-1} \quad \text{a}$$

$$\binom{p}{c} + \binom{2r-p+1}{c} < \binom{r}{c} + \binom{r+1}{c}.$$

Je-li $c > r$, je druhá nerovnost nesprávná, což je spor. Je-li $c \leqq r$, zaveďme označení $A = \dfrac{r(r-1)\ldots(r-c+3)}{(c-1)!}$, $B = \dbinom{p}{c-1}$ a $C = \dbinom{2r-p+1}{c-1}$, při čemž A má vždy smysl, neboť $c \geqq 3$, takže obě nerovnosti lze přepsat do tvarů $A(2r - c + 3) \leqq B + C$ a $\dfrac{B}{c}(p - c + 1) + \dfrac{C}{c}(2r - p - c + 2) < \dfrac{A}{c}(2r - c + 2)(r - c + 2)$. Avšak platí $B < A(r - c + 2)$, neboť $\dbinom{p}{c-1} < \dbinom{r}{c-1}$, a také $B \leqq C$ a proto i $(B - C)(r - p) \leqq 0$. Odtud plyne nerovnost $B + (B - C)(r - p) < A(r - c + 2)$, kterou lze přepsat do tvaru $B(r + 1) - A(r - c + 2) < Bp + C(r - p)$, takže konečně platí

$$\frac{A}{c}(2r - c + 2)(r - c + 2) = \frac{A}{c}(2r - c + 3)(r - c + 2) - \frac{A}{c}(r - c + 2) \leqq$$
$$\leqq \frac{B + C - A}{c}(r - c + 2) < \frac{B}{c}(-c + 1) + \frac{B}{c}p + \frac{C}{c}(r - p) +$$
$$+ \frac{C}{c}(r - c + 2) < \frac{A}{c}(2r - c + 2)(r - c + 2),$$

což je spor.

Věta 2. *Hlavní řešení $\{h_i\}_{i=1}^k$ rovnice* (1) *splňuje nerovnost*

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} \leqq \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c} \tag{7}$$

pro každé řešení $\{r_i\}_{i=1}^k$ rovnice (1) *a pro každé celé číslo $c \geqq 0$. Dále platí*

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} = \left(n - k\left[\frac{n}{k}\right]\right) \binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c-1} + k \binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c}. \tag{8}$$

Důkaz. Ke každému řešení $\{r_i^{(0)}\}_{i=1}^k$ rovnice (1), které splňuje podmínku (2), lze konstruovat postupně posloupnost řešení $\{r_i^{(j)}\}_{i=1}^k$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, takto: je-li $r_1^{(0)} + r_k^{(0)}$ sudé, položíme $s_1^{(1)} = s_k^{(1)} = \frac{1}{2}(r_1^{(0)} + r_k^{(0)})$, a je-li $r_1^{(0)} + r_k^{(0)}$ liché, položíme $s_k^{(1)} = \frac{1}{2}(r_1^{(0)} + r_k^{(0)} - 1)$, $s_k^{(1)} = \frac{1}{2}(r_1^{(0)} + r_k^{(0)} + 1)$. V obou případech dále klademe $s_i^{(1)} = r_i^{(0)}$ pro $1 < i < k$. Systém čísel $s_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$, je zřejmě řešením rovnice (1) a určuje (po vhodném uspořádání) jediné řešení $\{r_i^{(1)}\}_{i=1}^k$ rovnice (1), které splňuje také podmínku (2), atd. Snadno se vidí, že každé dva prvky této posloupnosti $\{r_i^{(u)}\}_{i=1}^k$, $\{r_i^{(v)}\}_{i=1}^k$, kde $u < v$, splňují podmínku $r_k^{(v)} - r_1^{(v)} \leqq r_k^{(u)} - r_1^{(u)}$ a že po dostatečně velkém, ale konečném počtu kroků m musí platit $r_k^{(m)} - r_1^{(m)} < 2$, takže podle věty 1 je $r_i^{(m)} = h_i$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, k$ a od tohoto indexu počínaje je posloupnost stacionární. Z popsané konstrukce řešení posloupnosti a z lemmat 1. a 2. však ihned plyne, že pro $u < v$ platí

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{r_i^{(v)}}{c} \leqq \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i^{(u)}}{c}, \tag{9}$$

čímž je věta dokázána.

Důsledek. *Nechť t, $0 \leqq t < n$, je dané celé číslo a nechť systém $\{s_i\}_{i=1}^k$ $(k > 1)$ je řešením rovnice (1), které je definováno takto: $s_1 = t$, $s_{i+1} = h_i$, $1 \leqq i < k$, kde $\{h_i\}_{i=1}^{k-1}$ je hlavním řešením rovnice $\sum_{i=1}^{k-1} p_i = n - t$. Pak platí*

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{s_i}{c} \leqq \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$$

pro každé celé $c \geqq 0$ a pro každé řešení $\{r_i\}_{i=1}^k$ rovnice (1), které splňuje podmínku $r_i = t$ pro vhodný index i, $1 \leqq i \leqq k$.

Poznámka 1. Věty 2 lze využít k řešení zobecněného problému K. ZARANKIEWICZE, který lze formulovat následujícím způsobem.

Nechť M je množina všech matic $A_l^k(n)$ typu k/l vytvořených z n čísel rovných jedné a z $kl - n$ čísel rovných nule. Řekneme, že matice $A_l^k(n) \in M$ má vlastnost $z(b, c)$, jestliže existuje její podmatice $P_c^b(b \,.\, c)$, t. j. podmatice typu b/c (vzniklá vypuštěním vhodných řádků a sloupců z matice dané) vytvořená ze samých jedniček. Má se určit minimální číslo n, pro něž platí (při daných b, c, k, l, $1 \leqq b \leqq k$, $1 \leqq c \leqq l$), že každá matice $A_l^k(n) \in M$ má vlastnost $z(b, c)$. Toto minimální číslo se označuje $Z_{b,c}(k, l)$.

Platí toto tvrzení: značí-li r_i počet jedniček v i-tém řádku matice $A_l^k(n) \in M$ a platí-li nerovnost

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c} > (b-1)\binom{l}{c},$$

má matice $A_l^k(n)$ vlastnost $z(b, c)$[4].

[4]) Viz lemma 2 v článku K. ČULÍKA: *Poznámka k problému K. Zarankiewicze*, Práce brněnské základny ČSAV, *XXVII*/7 (1955), kde je také uvedena obecná formulace problému.

Má-li nyní matice $A_l^k(n) \in M$ v i-tém řádku h_i jedniček, kde $\{h_i\}_{i=1}^k$ je hlavní řešení rovnice (1), t. j. $\sum_{i=1}^{k} h_i = n$, a platí-li pro $r_i = h_i$, $1 \leqq i \leqq k$, hořejší nerovnost, má tato matice podle uvedeného tvrzení vlastnost $z(b, c)$ a z věty 2. ihned plyne, že každá matice $A_l^k(n) \in M$ (ať je jejích n jedniček a $kl - n$ nul rozmístěno jakkoliv) má vlastnost $z(b, c)$ čili $Z_{b,c}(k, l) \leqq n$. Vzhledem k (8) tedy platí

$$(b-1)\binom{l}{c} < \left(n - k\left[\frac{n}{k}\right]\right)\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c-1} + k\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c} \Rightarrow Z_{b,c}(k, l) \leqq n \qquad (*)$$

a také obdobné tvrzení, které z (*) dostaneme, vyměníme-li mezi sebou čísla b, c a k, l (t. j. uvažujeme o sloupcích místo o řádcích matice).

Na příklad při důkazu tvrzení (7.2) v práci l. c. sub [1]), že $Z_{2,2}(p^2 + p, p^2) = p^2(p + 1) + 1$, $(p \geqq 1)$, je třeba celé stránky k důkazu nerovnosti $Z_{2,2}(p^2 + p, p^2) \leqq p^2(p + 1) + 1$. Tato nerovnost plyne okamžitě z (*) pro $n = p^2(p + 1) + 1$, $k = p^2 + p$, $l = p^2$, $b = c = 2$, neboť $(b - 1)\binom{l}{c} = \binom{p^2}{2} <$

$$< p + \binom{p^2}{2} = \left(n - k\left[\frac{n}{k}\right]\right)\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c-1} + k\binom{\left[\frac{n}{k}\right]}{c}.$$

P o z n á m k a 2. Věta 2 dovoluje vyslovit domněnku o řešení jedné úlohy od P. TURÁNA[5]): Je dáno n prvků $1, 2, \ldots, n$ a je předepsáno celé číslo h, $3 \leqq h \leqq n$. Má se určit systém A dvojic (i, j), $1 \leqq i < j \leqq n$, který má vlastnost: α) pro každou h-tici $(i_1, i_2, \ldots, i_h)$, $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_h \leqq n$, platí, že obsahuje alespoň jednu dvojici systému A; β) systém A obsahuje nejmenší možný počet dvojic.

Konstruujme systém A takto: Nechť $\{h_i\}_{i=1}^k$ je hlavní řešení rovnice (1), v níž položíme $k = h - 1$ a $c = 2$. Rozdělme nyní daných n prvků do $k = h - 1$ skupin tak, že každá skupina obsahuje právě h_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, prvků a systém A definujeme jako sjednocení systémů všech dvojic určených každou skupinou.

Z *Dirichletova Schubfachprinzipu* ihned plyne, že takto konstruovaný systém A má vlastnost α) a z věty 2 plyne jeho minimalita vzhledem k jisté speciální množině systémů s vlastností α). Minimalita tohoto systému vzhledem k množině všech systémů s vlastností α) zůstává nedokázána. Předpokládaný minimální počet dvojic systému A je dán výrazem (8), který po příslušném dosazení je roven $n\left[\frac{n}{h-1}\right] - (h-1)\binom{\left[\frac{n}{h-1}\right]+1}{2}$.

[5]) Jde o úlohu č. 268 v *Elemente der Mathematik XI/2* (1956).

Резюме

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Брно.

(Поступило в редакцию 29/VIII 1956 г.)

Под решением $\{r_i\}_{i=1}^k$ уравнения (1) $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$, где k, n — данные натуральные числа, подразумевается система целых и неотрицательных чисел r_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющих уравнению (1). Решение $\{h_i\}_{i=1}^k$ уравнения (1) называется *главным решением*, если $h_i = \left[\frac{n}{k}\right]$ для $1 \leqq i \leqq j$, $h_i = \left[\frac{n+k}{k}\right]$ для $j < i \leqq k$, где $j = k\left[\frac{n+k}{k}\right] - n$. Справедлива теорема:

Главное решение $\{h_i\}_{i=1}^k$ уравнения (1) удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} \leqq \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$$

для всех решений $\{r_i\}_{i=1}^k$ и для любого целого числа $c \geqq 0$.

Эта теорема полезна при нахождении чисел, определяемых обобщенной проблемой К. Заранкевича (ср. К. Чулик: *Замечание к проблеме К. Заранкевича*, Práce brněnské základny ČSAV, *XXVII/7* (1955)), и позволяет высказать предположение о решении одной задачи П. Турана (№ 268 в Elemente der Mathematik, *XI/2* (1956)).

Zusammenfassung

ÜBER EINE EIGENSCHAFT DER GANZZAHLIGEN NICHTNEGATIVEN LÖSUNGEN DER GLEICHUNG $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$

KAREL ČULÍK, Brno.

(Eingelangt 29. August 1956.)

Unter einer Lösung $\{r_i\}_{i=1}^k$ der Gleichung (1) $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$, wo k, n gegebene natürliche Zahlen sind, versteht man ein System ganzer und nichtnegativer Zahlen r_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, die die Gleichung (1) erfüllen. Eine Lösung $\{h_i\}_{i=1}^k$

der Gleichung (1) heisst die *Hauptlösung*, wenn sie folgendermassen definiert wird: $h_i = \left[\frac{n}{k}\right]$ für $1 \leqq i \leqq j$, $h_i = \left[\frac{n+k}{k}\right]$ für $j < i \leqq k$, wo $j = k\left[\frac{n+k}{k}\right] - n$. Es gilt der Satz:

Die Hauptlösung $\{h_i\}_{i=1}^{k}$ *der Gleichung* (1) *erfüllt die Ungleichheit*

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{h_i}{c} \leqq \sum_{i=1}^{k} \binom{r_i}{c}$$

für alle Lösungen $\{r_i\}_{i=1}^{k}$ *und für beliebige ganze Zahl* $c \geqq 0$.

Dieser Satz ist nützlich bei der Berechnung der Zahlen, die durch das verallgemeinerte Problem von K. Zarankiewicz definiert sind (vgl. K. Čulík: *Poznámka k problému K. Zarankiewicze*, Práce brněnské základny ČSAV, XXVII/7 (1955)) und erlaubt eine Vermutung über Lösung einer Aufgabe No. 268 in Elemente der Mathematik XI/2 (1956)) von P. Turán.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O DVOJICI (m, n) KONFIGURACÍ

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 12. září 1956.) DT: 513.84

Jde o dvě věty, mající úzkou souvislost s vícerozměrným zobecněním klasické věty Pohlkeovy-Schwarzovy. Přitom se navazuje na výsledky N. A. Glagoleva, N. F. Četveruchina a F. Schura.

Obsahem této práce jsou dvě věty, úzce spjaté s vícerozměrným zobecněním klasické věty Pohlkeovy-Schwarzovy. Nejprve je dokázána věta N. A. Glagoleva (viz [1], resp. [2], str. 46). Ve větě 1 je projednáno řešení vícerozměrné analogie úlohy Guglerovy (viz [3], poznámka pod čarou na str. 165). Konečně věta 2 spolu se svým důsledkem představuje vícerozměrné zobecnění věty Pohlkeovy-Schwarzovy a zahrnuje v sobě klasický výsledek F. Schura (viz [6], resp. [5], str. 174—176). O některých k thematu se vztahujících výsledcích sovětských geometrů podává informaci § 4 z oddílu „Synthetická geometrie" sborníku [4]. S algebraického hlediska vyšetřuje zobecnění věty Pohlkeovy pro promítání z bodu do nadroviny Ed. Stiefel ve své práci [7].

Předmětem našich úvah bude d-rozměrný rozšířený prostor eukleidovský ($d \geqq 3$). Konečnou posloupnost navzájem různých vlastních bodů nazveme (m, n) konfigurací, je-li $m + 1$ počet bodů posloupnosti a jestliže prvních $n + 1$ bodů posloupnosti je lineárně nezávislých; přitom předpokládáme, že $2 \leqq n \leqq m \leqq d$. Odpovídá-li i-tému bodu (m, n) konfigurace K_1 v lineární transformaci T i-tý bod (m, n) konfigurace K_2 pro každé $i = 1, 2, \ldots, m + 1$, pak budeme psáti $TK_1 = K_2$. Dimensí bodového útvaru rozumíme o jednotku zmenšený maximální počet lineárně nezávislých bodů útvaru. Tento pojem dimense ponecháme i pro sféry.

Věta Glagolevova. *Ke každé dvojici* (3,3) *konfigurací* K_1, K_2 *existuje nevlastní bod* S *tak, že konfigurace* K_1 *je perspektivně položena vzhledem ke středu perspektivity* S *s konfigurací* K'_2 *podobnou s* K_2.

Důkaz. Existuje právě jedna afinita A daného prostoru tak, že $AK_2 = K_1$. Nechť k je libovolná koule; pak $A^{-1}k$ je kvadrika, na níž lze najít kružnici k^+. Pak ale též Ak^+ je kružnice. Dále existuje právě jedna podobnost P daného prostoru tak, že Pk^+ je shodné s Ak^+. Tedy existuje orthogonální transformace O tak, že je $OPX = AX$ pro každé $X \epsilon k^+$. Pak ale $T = OPA^{-1}$ je perspektivní afinita: Pro každé $X \epsilon k^+$ jest $T(AX) = OPX = AX$, takže všecky body kružnice Ak^+ jsou samodružné vzhledem k afinitě T; tedy rovina, v níž leží Ak^+, je vzhledem k afinitě T rovinou samodružných bodů. Konfigurace $TK_1 = OP(A^{-1}K_1) = OPK_2$ je podobná s K_2. Důkaz je proveden.

Poznamenejme k tomu, že bod S (střed perspektivní afinity T) je závislý pouze na výběru kružnice k^+. Pak $A^{-1}k$ je buďto kulovou plochou anebo nerotačním či rotačním elipsoidem. Je-li $A^{-1}k$ elipsoidem, pak obsahuje dva (případně splývající) systémy kružnic vždy v rovinách navzájem rovnoběžných; každý z obou systémů vede k jedinému bodu S, avšak různým systémům odpovídají různé body S. Tedy celkem: Je-li $A^{-1}k$ kulová plocha, pak bod S je určen mnohoznačně (probíhá všecky body nevlastní), je-li $A^{-1}k$ nerotační elipsoid, pak bod S je určen dvojznačně a konečně, je-li $A^{-1}k$ rotační elipsoid, pak bod S je určen jednoznačně.

Věta 1. *Nechť K_1, resp. K_2 jsou dvě (n, n) konfigurace, ležící v n-rozměrných podprostorech R_1, resp. R_2, a nechť C je $(d - n - 1)$-rozměrný nevlastní podprostor. Pak označme A afinitu, pro níž $K_1 = AK_2$; dále označme a $(n - 1)$-rozměrnou absolutní sféru, ležící v R_2. Pak jsou ekvivalentní tyto dvě podmínky:*

(I) *n-rozměrný s C disjunktní vlastní prostor X protíná útvar $C \,.\, K_1$[1]) v konfiguraci K'_2 podobné s K_2;*

(II) *průnik útvaru $C \,.\, (Aa)$ s $(d - 1)$-rozměrnou absolutní sférou obsahuje $(n - 1)$-rozměrnou absolutní sféru, ležící v n-rozměrném vlastním podprostoru X disjunktním s C.*

D ů k a z. Nechť X je libovolný n-rozměrný vlastní podprostor disjunktní s C. Pak C jakožto centrum promítání zprostředkuje mezi podprostory R_1, X afinitu B_X. Afinita B_XA je podobností právě tehdy, odpovídají-li si v ní $(n - 1)$-rozměrné absolutní sféry podprostorů R_1, X. Avšak B_XAa leží v průniku podprostoru X s útvarem $C \,.\, (Aa)$. Z toho již plyne důkaz věty.

K předchozí větě učiňme ještě p o z n á m k u. Je-li $d = m + 1 = n + 1 = 3$, pak podle věty 3 lze řešiti úlohu Guglerovu, známou z elementů deskriptivní geometrie (úlohu Guglerovu lze takto formulovat: Na dané trojboké hranolové ploše najít trojúhelníky podobné s trojúhelníkem daným).

Věta 2. *Nechť K_1 je (d, d) konfigurace a nechť K_2 je (d, n) konfigurace; označme R_i podprostor, lineárně vytvořený prvními $n + 1$ body konfigurace K_i $(i = 1, 2)$. Pak lze sestrojit právě jeden $(d - n - 1)$-rozměrný nevlastní podprostor C a afinitu A_X mezi R_2 a mezi libovolným vlastním podprostorem X disjunktním s C, tak, že A_XK_2 je průmětem konfigurace K_1 z centra promítání C.*

[1]) Součinem dvou bodových útvarů označujeme sjednocení všech přímek, které spojují body jednoho útvaru s body útvaru druhého.

D ů k a z. Existuje právě jedna afinita A mezi R_2 a mezi R_1, pro niž $AK'_2 = K'_1$, kde K'_i je posloupnost prvních $n + 1$ bodů konfigurace K_i ($i = 1, 2$). Označme S_j nevlastní bod spojnice j-tého bodu konfigurace K_1 s j-tým bodem konfigurace K_2 pro každé $j = n + 2, n + 3, \ldots, d + 1$. Body S_j lineárně vytvářejí nevlastní podprostor dimense $d - n - 1$, z něhož se K_1 promítá do konfigurace AK_2. Je-li X libovolný vlastní podprostor dimense n, disjunktní s C, pak centrum promítání C zprostředkuje mezi podprostory R_1, X afinitu B_X tak, že B_XAK_2 je průmětem konfigurace K_1 ze středu promítání C. Položíme-li $A_X = B_XA$, je tím důkaz věty dokončen.

D ů s l e d e k. Afinita A_X z věty 2 je podobností právě tehdy, jestliže průnik útvaru $C \cdot (Aa)$ (a je absolutní sféra o dimensi $n - 1$, ležící v R_2) s $(d - 1)$-rozměrnou absolutní sférou obsahuje $(n - 1)$-rozměrnou absolutní sféru, ležící v X.

D ů k a z vyplývá snadno užitím věty 1.

P o z n á m k a (při korektuře 1. 6. 1957). Pokračováním tohoto příspěvku je autorova poznámka „Hlavní věta paralelní axonometrie", podaná do Časopisu pro pěst. matematiky. Tato poznámka je v těsné souvislosti s článkem Herberta Naumanna „Über Vektorsterne und Parallelprojektionen regulärer Polytope", Math. Zeitschr. *67*, 1957, 75—82.

LITERATURA

[1] *Н. А. Глаголев*: Обобщение теоремы Полке, Матем. сб. *32* (1925), 457—463.

[2] *Е. А. Глазунов-Н. Ф. Четверухин*: Аксонометрия, Moskva 1953.

[3] *Fr. Kadeřávek - J. Klíma - J. Kounovský*, Deskriptivní geometrie, I. díl, Praha 1954.

[4] Математика в СССР за тридцать лет, Сборник, Moskva-Leningrad 1948.

[5] *E. Müller*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Band: Die linearen Abbildungen (bearbeitet von E. Kruppa), Leipzig-Wien 1923.

[6] *F. Schur*, Über den Pohlke'schen Satz, Math. Ann. *25* (1885), 569—595.

[7] *Ed. Stiefel*, Zum Satz von Pohlke, Comm. Math. Helv. *10* (1938), 208—223.

Резюме

О ПАРЕ (m, n) КОНФИГУРАЦИЙ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Прага.

(Поступило в редакцию 12/IX 1956 г.)

В d-мерном расширенном евклидовом пространстве определена (m, n) конфигурация как последовательность $m + 1$ различных собственных точек, из которых первые $n + 1$ линейно независимы. Доказываются следующие теоремы:

Для каждой пары (3,3) *конфигураций* K_1, K_2 *существует несобственная точка* S *так, что конфигурация* K_1 *расположена перспективно относительно центра перспективности* S *с конфигурацией* K'_2, *подобной* K_2.

Теорема 1. *Пусть* K_i *есть* (n, n) *конфигурация, лежащая в* n*-мерном подпространстве* R_i $(i = 1, 2)$ *и пусть* C *есть* $(d - n - 1)$*-мерное несобственное подпространство. Обозначим через* A *аффинное соответствие, при котором* $K_1 = AK_2$ *и далее обозначим через* a $(n - 1)$*-мерную абсолютную сферу, лежащую в* R_2. *В таком случае* n*-мерное собственное дизъюнктное с* C *подпространство* X *пересекает линейную оболочку объектов* C, K_1 *в конфигурации* K'_2, *по-добной* K_2, *тогда и только тогда, если пересечение линейной оболочки объектов* C, Aa *с* $(d - 1)$*-мерной абсолютной сферой содержит* $(n - 1)$*- мерную абсолютную сферу, лежащую в* X.

Теорема 2. *Пусть* K_1 *есть* (d, d) *конфигурация и пусть* K_2 *есть* (d, n) *конфигурация. Обозначим через* R_i *подпространство, линейно образованное первыми* $n + 1$ *точками конфигураций* K_i $(i = 1, 2)$. *Тогда можно построить в точности одно* $(d - n - 1)$*-мерное несобственное подпространство* C *и аффинное соответствие* A_X *между* R_2 *и любым собственным, дизъюнктным с* C *подпространством* X *так, что* A_XK_2 *является проекцией конфигурации* K_1 *из центра проекций* C.

Следствие. Аффинное соответствие A_X из теоремы 2 будет соответствием подобия тогда и только тогда, если линейная оболочка объекта C с $(n - 1)$-мерной квадрикой Aa (где a — абсолютная сфера размерности $n - 1$, лежащая в R_2, и A — аффинное соответствие, переводящее первых $n + 1$ точек конфигурации K_2 в первых точек конфигурации K_1) пересекается с $(d - 1)$-мерной абсолютной квадрикой в объекте, содержащем $(n - 1)$-мерную абсолютную сферу подпространства X.

Теорема 1 представляет собой решение многомерного аналога задачи Гуглера (см. [3], стр. 165, сноска). Наконец, теорема 2 вместе со своим следствием является многомерным обобщением теоремы Польке-Шварца и содержит результат Ф. Шура (см. [6], соотв. [5], стр. 174—175).

Zusammenfassung

ÜBER DIE PAARE DER (m, n) KONFIGURATIONEN

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Eingelangt 12. IX. 1956.)

Im d-dimensionellen ergänzten euklidischen Raume sei (m, n) Konfiguration als eine Folge von $(m + 1)$ verschieden eigentlichen Punkten definiert, von denen die ersten $n + 1$ linear unabhängig sind. Man beweist folgende Sätze:

Zu jedem Paare der (3,3) Konfigurationen K_1, K_2 existiert ein solcher uneigentlicher Punkt S, dass die Konfiguration K_1 mit einer, mit K_2 ähnlichen Konfiguration K'_2 vom Zentrum S perspektiv ist.

Satz 1. *Sei K_i eine im n-dimensionellen Unterraume R_i liegende (n, n) Konfiguration $(i = 1, 2)$ und C ein $(d - n - 1)$-dimensioneller uneigentlicher Unterraum. Mit A bezeichnen wir die Affinität, für die $K_1 = AK_2$ gilt; mit a bezeichnen wir die $(n - 1)$-dimensionelle absolute Sphäre in R_2. Der n-dimensionelle mit C disjunkte Unterraum X schneidet die lineare Hülle von C, K_1 in einer, mit K_2 ähnlicher Konfiguration K'_2 gerade dann, wenn der Durschchnitt der linearen Hülle von C, Aa mit der $(d - 1)$-dimensionellen absoluten Sphäre eine $(n - 1)$-dimensionelle, in X liegende absolute Sphäre enthält.*

Satz 2. *Sei K_1 eine (d, d)Konfiguration und K_2 eine (d, n)Konfiguration. Mit R_i bezeichnen wir die lineare Hülle der ersten $n + 1$ Punkten der Konfiguration K_i $(i = 1, 2)$. Dann kann man gerade einen $(d - n - 1)$-dimensionellen uneigentlichen Unterraum C und die Affinität A_X zwischen R_2 und einem willkürlichen eigentlichen, mit C disjunkten Unterraum X finden, so dass $A_X K_2$ eine Projektion von K_1 aus dem Zentrum C ist.*

Die Folgerung. Die Affinität A_X aus dem Satz 2 wird eine Ähnlichkeit gerade dann, wenn die lineare Hülle des Unterraumes C mit der $(n - 1)$-dimensionellen Quadrik Aa (a ist die $(n - 1)$-dimensionelle absolute Sphäre in R_2 und A ist die Affinität, die die ersten $n + 1$ Punkte der Konfiguration K_2 in die ersten $n + 1$ Punkte der Konfiguration K_1 überführt) und die $(d - 1)$-dimensionelle absolute Sphäre eine gemeinsame $(n - 1)$-dimensionelle absolute Sphäre des Unterraumes X enthalten.

Satz 1 ist die Lösung der mehrdimensionellen Analogie der Guglerschen Aufgabe (siehe [3], Fussnote auf S. 165). Schliesslich Satz 2 zusammen mit seiner Folgerung ist die mehrdimensionelle Verallgemeinerung des Satzes von Pohlke-Schwarz und enthält ein Ergebnis von F. Schur (siehe [6] und [5], S. 174—175).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

5. Buď G otevřená množina v m-rozměrném Euklidově prostoru E_m, $\emptyset \neq G \neq E_m$; buď f spojitá funkce na hranici H množiny G. Je-li funkce F spojitá na $G \cup H$, harmonická na G a rovná f na H, nazveme funkci F řešením Dirichletovy úlohy, příslušné k funkci f a množině G. Rozhodněte, zda platí tato věta: Nechť ke každé omezené spojité funkci na množině H existuje omezené řešení příslušné Dirichletovy úlohy. Potom ke každé nezáporné omezené spojité funkci na množině H existuje nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy.

Jan Mařík, Praha.

6. Rozhodněte, zda platí: Čtyrstěn $ABCD$ je (až na čtyrstěny shodné) jednoznačně určen:

a) velikostmi hran AB, BC, CD a vnitřních úhlů stěn*) $B(AC)\,D$, $D(BC)\,A$, $A(BD)\,C$;

b) velikostmi hran AB, BC, CD, DA a vnitřních úhlů stěn $A(BD)\,C$, $B(AC)\,D$;

c) velikostmi hran AB, CD a vnitřních úhlů stěn $A(BD)\,C$, $C(AD)\,B$, $B(AC)\,D$, $D(BC)\,A$.

M. Fiedler, Praha.

*) Značíme $A(CD)\,B$ vnitřní úhel stěn ACD, CDB a pod.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

REFERÁTY

Z DĚJIN NEJSTARŠÍ MATEMATIKY

(Výtah z referátu o Waerdenově práci Science Awakening*), pronesený ALBÍNOU DRATVOVOU v matematické obci pražské dne 10. prosince 1956.)

Autor je algebraik a historik matematiky a astronomie. Po řadě speciálních studií napsal toto souborné dílo, používaje fenomenálních objevů O. NEUGEBAUERA, který vydal v r. 1937 „Mathematische Keilschrifttexte", obsahující i s překladem všechny do té doby nalezené klínové texty babylonské o matematice, a posledního objevu z r. 1943, „Zápis o pythagorovských číslech", kterým byly potvrzeny všechny Neugebauerovy teorie o tom, že v řecké matematice, považované dotud za geometrickou, je skryt algebraický prvek a že se tím prokazuje závislost řecké matematiky na babylonské algebře. Opíraje se o tyto objevy vyvrací Waerden tvrzení o naprosté původnosti řecké matematiky, ale právě tak autoritativně dokazuje, že řecká matematika přinesla prvek dotud neznámý, totiž požadavek, aby všechny věty, z nichž se odvozují věty další, byly dokázány.

Waerden v této krásné knize vysvětluje: 1. jak THALES a PYTHAGORAS vyšli z babylonské matematiky, ale dali jí specificky řecký ráz, 2. jak v pythagorské škole i mimo ni se rozvíjela matematika, která postupně dokonaleji vyhovovala požadavkům přesné logiky a 3. jak díky PLATONOVÝM přátelům THEAITETOVI a EUDOXOVI se matematika zdokonalila co do elegance a přesnosti, které se obdivujeme u EUKLEIDA. Ovšem tento výpočet cílů knihy zdaleka neukazuje bohatost materiálu a jeho zpracování. Waerden je rozený didaktik, umí i obtížné partie vysvětlit, má smysl pro psychologii objevů a je literárně vzdělán. Uvádí na pravou míru mnohé omyly, které se přenášely z díla do díla, na př. o poměru matematiky řecké k egyptské a babylonské, vysvětluje, proč Řekové řešili úlohy geometricky a nikoli algebraicky, upozorňuje na dvě hlavní matematické metody Řeků, algebraickou a analytickou. V duchu dnešního požadavku, aby i vědy byly chápány jako součást dění hospodářského a politického, vysvětluje i proměny v matematice a astronomii; ale nezůstává jen na nich, jde hlouběji do příčin, tkvících v samé vědě, resp. lidech, kteří ji tvoří. Nejšíře a nejhlouběji podal příčiny úpadku řecké matematiky ke konci starověku. Dosavad viděli historikové matematiky tyto příčiny v nezájmu posledních Ptolemaiovců o vědu a v nezájmu dobyvatelů Egypta, Římanů. Ti sice odváželi egyptské vychovatele, lékaře a umělce, nikoli však teoretické matematiky. Řecká matematika upadla však hlavně z příčin, které byly kdysi její předností: svou nekompromisností v požadavku naprosté logické přesnosti, při níž narazili na neznalost iracionálních čísel, dále způsobem záznamu, kterému žáci mohli porozumět potud, pokud byl

*) *B. L. van der Waerden*, Science Awakening. Z holandského originálu „Ontwakende Wetenschap" přeložil do angličtiny *Arnold Dresden*. Vyšlo v Groningen v Holandsku u P. Noordhoffa r. 1954. Stran 306. Obrazy vybral *H. G. Beyen*, profesor archeologie v Groningen.

doprovázen slovním výkladem a ukázáním na tabuli; když vymřela generace učitelská, žáci už záznamům nerozuměli. Je zajímavo, že bylo nutno vrátit se k primitivnějším babylonským metodám, jak skutečně pracovali Arabové.

A. Dratvová, Praha.

O DVOU VÝSLEDCÍCH Z OBECNÉ TOPOLOGIE

(Referát o přednášce Miroslava Katětova přednesené v Matematické obci pražské dne 11. února 1957.)

1. Nazýváme metrickou dimensí metrického prostoru P nejmenší n takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ prostor P má otevřené pokrytí řádu $\leqq n$ otevřenými množinami průměru $< \varepsilon$. Označíme-li $\mu \dim P$ tuto dimensi, $\dim P$ topologickou dimensi, definovanou pomocí pokrytí, platí

$$\mu \dim P \leqq \dim P \leqq 2\mu \dim P .$$

První nerovnost plyne ihned ze známých vět. Důkaz druhé se provede takto:

Je-li dáno konečné otevřené pokrytí $\{G_i\}$, buď G_i^k množina těch $x \in P$, pro něž $\varrho(x, P - G_k) > 3^{-k}$. Pro $k = 1, 2, \ldots$ zvolíme otevřené pokrytí $\{U_\lambda^k\}$ řádu $\leqq m = \mu \dim P$ tak, aby U_λ^k měly průměr $< 3^{-k}$. Pro každé k vybereme ta U_λ^k, jejichž uzávěr je obsažen v některém G_i^k; jejich sjednocení označíme V^k. Buď C^k množina těch $x \in P$, která leží v $m + 1$ vybraných U_λ^k; klademe $B^k = (\overline{V^k} \cap \overline{C^k}) \cup \overline{V^{k-1}}$. Pro vybraná U_λ^k klademe $W_\lambda^k = U_\lambda^k - B^{k-1}$. Ukáže se, že systém $\{W_\lambda^k\}_{k,\lambda}$ pokrývá P, je zjemněním $\{G_i\}$ a má řád $\leqq 2m$.

2. V pracích J. Smirnova byl položen problém, zda na každém δ-prostoru („prostoru blízkosti") existuje maximální uniformita. K zápornému řešení stačí udat příklad, kde součet dvou přípustných pseudometrik na δ-prostoru není přípustnou pseudometrikou. Buď N spočetný diskretní prostor, $\zeta, \eta \in \beta N - N$, $z = (\zeta, \eta)$, $P = (N \times N) \cup z \subset \beta N \times \times \beta N$. V $N \times N$ definujeme „blízkost": $A \delta B$, když a jen když $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ (uzávěry v P). Pro $x = (x_1, x_2) \in N \times N$, $y = (y_1, y_2) \in N \times N$ položme $\varrho_i(x, y) = 1$ pro $x_i \neq y_i$, $\varrho_i(x, y) = 0$ pro $x_i = y_i$. Pseudometriky ϱ_1, ϱ_2 mají potřebné vlastnosti.

Miroslav Katětov, Praha.

O STYKU PLOCH A KŘIVEK

(Referát o přednášce Františka Nožičky, konané dne 4. března 1957 v Matematické obci pražské a pořádané Jednotou československých matematiků a fysiků.)

Pojem styku variet je velmi důležitým pojmem v diferenciální geometrii. Na základě theorie styku variet lze dospět přirozenou geometrickou cestou ke geometrické interpretaci řady veličin, které lokálně varietu charakterisují. Obsahem přednášky bylo vhodné zavedení pojmu styku variet téže dimense vnořených do lineárního n-rozměrného afinního prostoru.

V afinním lineárním prostoru E_n ($n \geqq 2$) o souřadnicích x^α ($\alpha = 1, \ldots, n$) buďtež dány dvě p-rozměrné variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ ($1 \leqq p \leqq n - 1$) s parametrickým popisem

$${}^{(1)}X_p : x^\alpha = {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a), \quad \alpha = 1, \ldots, n; \quad a = 1, \ldots, p , \tag{I$_a$}$$

$${}^{(2)}X_p : x^\alpha = {}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a), \quad \alpha = 1, \ldots, n; \quad a = 1, \ldots, p , \tag{I$_b$}$$

při čemž předpokládáme

a) bod $\underset{0}{P} \in E_n$ o souřadnicích $\underset{0}{x}{}^\alpha$ je společným bodem variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$. Tomuto bodu odpovídají hodnoty $\underset{0}{{}^{(1)}\eta^a}$ parametrů ${}^{(1)}\eta^a$ variety ${}^{(1)}X_p$ a hodnoty ${}^{(2)}\eta^a$ parametrů ${}^{(2)}\eta^a$ variety ${}^{(2)}X_p$;

b) funkce ${}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a)$, ${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a)$ mají spojité parciální derivace podle svých argumentů řádu nejméně $k(k \geqq 1)$ v nějakém okolí bodu $\underset{0}{P}$ na varietách ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$;

c) bod $\underset{0}{P}$ je regulárním bodem variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$.

Zvolme $n - p$ konstantních vektorů $\overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha(s = 1, \ldots, n - p)$ v E_n tak, aby platilo

$$\text{determinant } [{}^{(1)}B^\alpha_1, \ldots, {}^{(1)}B^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha]_{{}^{(1)}\eta^a = {}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a} \neq 0 , \tag{II}$$

$$\text{determinant } [{}^{(2)}B^\alpha_1, \ldots, {}^{(2)}B^\alpha_p, \overset{(1)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha, \ldots, \overset{(n-p)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha]_{{}^{(2)}\eta^a = {}^{(2)}\underset{0}{\eta}{}^a} \neq 0 ,$$

kde ${}^{(1)}B^\alpha_a \equiv \dfrac{\partial {}^{(1)}x^\alpha}{\partial {}^{(1)}\eta^a}$, ${}^{(2)}B^\alpha_a \equiv \dfrac{\partial {}^{(2)}x^\alpha}{\partial {}^{(2)}\eta^a}$.

Za těchto předpokladů je systémem rovnic

$${}^{(2)}x^\alpha({}^{(2)}\eta^a) - {}^{(1)}x^\alpha({}^{(1)}\eta^a) = \sum_{s=1}^{n-p} \underset{s}{\lambda} \overset{(s)}{\underset{0}{v}}{}^\alpha , \quad \alpha = 1 , \ldots, n \tag{III}$$

lokálně — v dostatečně malém okolí bodu $\underset{0}{P}$ — definována jedno-jednoznačná korespondence

$${}^{(2)}\eta^a = \varphi^a({}^{(1)}\eta^a)$$

mezi parametry variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ a tím též mezi body těchto dvou variet v uvažovaném okolí bodu $\underset{0}{P}$, při čemž funkce $\varphi^a({}^{(1)}\eta^a)$ jsou spojitě diferencovatelné a to nejméně do k-tého řádu v dostatečně malém okolí bodu $(\underset{0}{\eta}{}^a)$. Systémem rovnic (III) jsou též lokálně jednoznačně definovány skaláry $\underset{s}{\lambda} = \underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$, při čemž funkce $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$ $(s = 1, \ldots, n - p)$ mají spojité parciální derivace až do k-tého řádu včetně (v dostatečně malém okolí bodu $({}^{(1)}\eta^a)$).

Jestliže symboly $(d\underset{s}{\lambda})_0$, $(d^2\underset{s}{\lambda})_0$, ..., $(d^l\underset{s}{\lambda})_0$, ... představují totální diferenciály prvého, druhého, ..., l-tého řádu v bodě $({}^{(1)}\underset{0}{\eta}{}^a)$ funkcí $\underset{s}{\lambda}({}^{(1)}\eta^a)$, potom styk aspoň k-tého řádu variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ v jejich společném bodě $\underset{0}{P}$ definujeme takto:

Variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ *mají za předpokladů shora uvedených v bodě* $\underset{0}{P}$ *styk aspoň* k*-tého řádu, jestliže platí*

$$(\underset{s}{\lambda})_0 = (d\underset{s}{\lambda})_0 = \ldots = (d^k\underset{s}{\lambda})_0 = 0 \quad \text{pro} \quad s = 1 , \ldots, n - p .$$

To je speciální (afinní) definice styku aspoň k-tého řádu dvou variet v bodě lineárního afinního prostoru E_n.

Ukáže se, že ta okolnost, že dvě variety ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$ mají v bodě styk aspoň k-tého řádu ve smyslu hoření definice, je nezávislá:

1. na volbě konstantních vektorů $\overset{(s)}{\underset{0}{v^\alpha}}$ $(s = 1, \ldots, n - p)$, pokud jsou splněny podmínky (II);

2. na volbě systémů parametrů variet ${}^{(1)}X_p$, ${}^{(2)}X_p$;

3. na volbě souřadnic v E_n.

Dají se nyní nalézt velmi jednoduché nutné a postačující podmínky pro styk aspoň k-tého řádu dvou variet téže dimense v E_n. Dá se velmi snadno ukázat, že známá (metrická) definice styku dvou regulárních křivek v obyčejném eukleidovském prostoru je ekvivalentní shora vyslovené afinní definici styku křivek (pro $p = 1$) v tom smyslu, že mají-li uvažované křivky ve společném bodě styk řádu aspoň k-tého ve smyslu obvyklé metrické definice, pak mají v tomto bodě styk aspoň k-tého řádu ve smyslu hořené afinní definice styku a též naopak.

František Nožička, Praha.

RECENSE

Karel Rychlík, **Úvod do analytické theorie mnohočlenů s reálnými koeficienty.** Nakladatelství ČSAV, Praha 1957. Str. 181, náklad 2300. Cena brož. 11,90 Kčs.

Rychlíkova kniha se zabývá metodami vedoucími k numerickému řešení algebraických rovnic s reálnými koeficienty, a to odhady počtu a rozložení kořenů reálného polynomu. Nezabývá se přímým numerickým výpočtem kořenů.

Kniha je rozdělena na 11 kapitol. Krátká 1. kapitola má úvodní ráz; je tu vyloženo rozšíření reálných čísel o prvky $\pm\infty$, Hornerovo schema, jeho užití na lineární a lineárně lomené transformace polynomu a zavedeny Laguerrovy mnohočleny daného polynomu.

2. kapitola s názvem „Závory kořenů mnohočlenu" je takřka celá věnována horním a dolním odhadům reálných (případně kladných či záporných) kořenů daného reálného polynomu; jen § 1 této kapitoly obsahuje odhad absolutních hodnot všech kořenů libovolného komplexního polynomu. Místo termínu odhad užívá autor všude výrazu závora, zavedeného v Jarníkově *Diferenciálním počtu* II; rozlišuje mezi závorou a otevřenou závorou. Po vyložení běžných odhadů reálných, kladných a záporných kořenů reálného polynomu, které jsou udány na př. v Kořínkově učebnici *Základy algebry*, obrací se autor k odhadům pro polynomy s jednou znaménkovou změnou, k určení horní závory reálných kořenů vhodným rozkladem mnohočlenu v součet mnohočlenů jednodušších a ke Cauchyovu vzorci k určení horní závory kladných kořenů. Pro jiné stanovení této závory udává autor ještě Newtonovo a Laguerrovo pravidlo a ukazuje výhodnost pravidla Laguerrova před Newtonovým.

3. kapitola obsahuje Bolzano-Weierstrassovu větu pro mnohočleny, vyslovenou i pro neohraničené intervaly (hodnotou $f(x)$ v $\pm\infty$ se rozumí limita $f(x)$ v tomto bodě) a použití této věty k odhadu počtu kořenů v daném intervalu. Kapitola je zakončena větou o separaci kořenů (i nereálných) reálného polynomu pomocí Cauchyova odhadu absolutních hodnot rozdílů dvojic kořenů.

4. kapitola je věnována Rolleově větě pro mnohočleny a jejímu použití při vyšetřování vztahů mezi reálnými kořeny polynomu a jeho derivace. Pro nereálné kořeny dokazuje autor Jensenovu větu o rozložení nereálných kořenů (reálného) polynomu a jeho derivace. V této kapitole zavádí autor symbol $a \underline{\underline{\leq}} b \pmod 2$, značící, že $a \leq b$ a $a \equiv b \pmod 2$; výhoda tohoto zápisu pro stručné vyjadřování vynikne zejména v kapitole 5 a 6.

Obsahem kapitoly 5 je věta Descartesova a její zpřesnění pro mnohočleny s vesměs reálnými kořeny, pro mnohočleny bez mezer a mnohočleny s mezerami. Autor podává dva důkazy Descartesovy věty; druhý z nich je důkaz Petrův.

6. kapitola se týká Budan-Fourierovy věty. Autor tu nejprve užitím Descartesovy věty odvozuje B.-F. větu v jejím přesnějším tvaru pro mnohočleny s vesměs reálnými kořeny; teprve pak přistupuje k důkazu B.-F. věty pro obecný případ. B.-F. větu uvádí v obecnějším tvaru, než jak se obvykle činí: nepředpokládá se, že bod β intervalu $(\alpha, \beta\rangle$, v němž hledáme kořeny polynomu $f(x)$, není kořenem $f(x)$. Pro případ, že se v posloupnosti $f(\beta)$, $f'(\beta)$, ..., $f^{(n)}(\beta)$ vyskytnou vnitřní mezery, udává jednoduché a užitečné Petrovo zpřesnění B.-F. věty.

Krátká 7. kapitola obsahuje Descartes-Jacobiovu metodu odhadu počtu reálných kořenů polynomu v daném otevřeném intervalu. Autor tu uvádí, že metoda Descartes-Jacobiova je účinnější než metoda Budan-Fourierova. Důkazem tohoto tvrzení se pak zabývá kapitola 8; důkaz je proveden pomocí lineárních transformací nezvětšujících počet znaménkových změn, t. j. reálných transformací $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ $(1 \leqq i \leqq m)$, pro které počet znaménkových změn v posloupnosti $(y_1, \ldots, y_m)$ pro žádné $(x_1, \ldots, x_n)$ nepřesahuje počet znaménkových změn v posloupnosti $(x_1, \ldots, x_n)$.

Nejobsáhlejší kapitola 9 je věnována Sturmově větě. Tato věta je tu dokázána pro libovolný uzavřený interval a libovolnou Sturmovu posloupnost pro tento interval. Jako příklad je ukázáno užití Sturmovy věty na Legendreovy polynomy. V dalším se autor obrací ke konstrukci Sturmovy posloupnosti Eukleidovým algoritmem, k úplným Sturmovým posloupnostem a k užití Sturmovy věty pro polynomy s vícenásobnými kořeny. Kapitola je zakončena paragrafem věnovaným Darbouxově větě o nereálných kořenech členů Sturmovy posloupnosti.

Kapitola 10 se zabývá jiným způsobem určení počtu různých reálných kořenů polynomu v daném intervalu, spočívajícím na Hermiteově větě, která říká, že počet všech různých kořenů reálného polynomu $f(x)$ (resp. počet reálných různých kořenů) je roven hodnosti (resp. signatuře) kvadratické formy $\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} s_{\lambda+\mu-2}\, x_\lambda x_\mu$, kde s_ν je součet ν-tých mocnin kořenů $f(x)$.

V poslední 11. kapitole se autor zabývá Hurwitzovými polynomy, t. j. polynomy, jejichž všechny kořeny mají záporné reálné části. K určení, zda daný polynom (s komplexními koeficienty) je Hurwitzovým polynomem, jsou odvozena Schurova kriteria; pomocí nich je pak dokázána Hurwitzova věta, která dává jednoduchou odpověď na otázku (vyskytující se v různých aplikacích), zda daný reálný polynom je Hurwitzovým polynomem.

Vyložené metody autor ilustruje na řadě konkretních příkladů; přitom vždy přihlíží k praktické použitelnosti a ukazuje, v čem je která metoda výhodnější před druhou. K procvičení látky je připojeno 34 úloh rázu teoretického i praktického s podrobným návodem.

Knížka je psána přesně a dostatečně podrobně; její srozumitelnost by však jistě bývalo možné zvýšit lepším uspořádáním některých partií (na př. kapitoly 8) a zejména pozornějším provedením korektur. Knihu může číst každý, kdo zná elementy algebry a diferenciálního počtu. Zcela postačí znalost základních fakt z Kořínkových Základů algebry a Jarníkova Diferenciálního počtu I. Výběrem látky i jejím zpracováním je knížka dobrým příspěvkem pro naši matematickou literaturu, zabývající se numerickými metodami.

V knize bohužel zůstal značný počet tiskových chyb. Většinou jsou to však drobná nedopatření, která si čtenář sám snadno opraví. Upozorňujeme tu jen na takové chyby, které by snad mohly čtenáře při prvním čtení zmást.

Na str. 19, ř. 4 a 5 shora mají být označeny jako vzorec (7).

Na str. 33 ve vzorci (11) má být $H_L = 1 + \sqrt[r]{\frac{c}{a_0}}$.

Na str. 44, ř. 17 shora: místo odkazu na odst. I4,4 má být odkaz na odst. I4,3.

Na str. 47, ř. 10 shora: místo „všechny kořeny“ má být „všechny reálné kořeny“.

Na str. 55, ř. 5 shora: místo $\xi_j - \xi_k$ má být $|\xi_j - \xi_k|$.

Na str. 118, ř. 4 shora: místo $\binom{n-1}{1}$ má být $\binom{n-1}{2}$.

Na str. 118, ř. 6 shora: místo $\binom{n-2}{2}$ má být $\binom{n-2}{1}$.

Na str. 119, ř. 7 shora: místo odkazu na odst. 4 má být odkaz na odst. 9.

Na str. 133, ř. 10 shora: místo odkazu na odst. 4,1 má být odkázáno na odst. 3,1.

Na str. 135, ř. 4 zdola: místo odkazu na větu 1 má být odkázáno na větu 2.

Na str. 151, ř. 10 shora: místo odkazu na odst. 9,4 má být odkázáno na odst. 8,4.

Na str. 170, ř. 11 shora: místo $|x + x_j|$ má být $|x + \bar{x}_j|$; podobně v řádcích 15—18 shora.

Na str. 170, ř. 18 shora: místo „$u = \operatorname{Re} x$ a $x_j \neq 0$" má být patrně jen $0 = \operatorname{Re} x$.

Na str. 178 je prvek v druhém řádku a druhém sloupci determinantu $a_0 a_1 \Delta_j$ roven $a_1 a_2 - a_0 a_3$ a nikoliv $a_1 a_2 - a_0 a_5$.

Václav Vilhelm, Praha.

А. Г. Витушкин: **О многомерных вариациях.** Serie Современные проблемы математики. Vydalo Госиздат. технико-теоретической литературы, Moskva 1955, náklad 3000 výtisků, 220 stran, cena rub. 5,85.

Vzhledem k důležitosti funkcí jedné proměnné s omezenou variací existuje řada prací, v nichž jsou dány různé definice tohoto pojmu pro funkce více proměnných; funkce s konečnou variací v tak definovaném smyslu mají pak různé vlastnosti funkcí s konečnou variací v E_1. V poslední době KRONROD otiskl obsáhlý článek,[1]) zabývající se funkcemi dvou proměnných, ve kterém zvláště přihlédl k pojmu variace. Definoval dvě variace, lineární a plošnou, které jsou nezávislé. Tyto funkcionály zachycují „jednorozměrné" resp. „dvojrozměrné" vlastnosti funkcí; funkce mající obě tyto variace konečné odpovídají funkcím s konečnou variací jedné proměnné. Dále se v práci podotýká, že pro funkce v E_n by podobně bylo třeba definovat n nezávislých variací; to Kronrod učinil různými způsoby, avšak tyto definice postrádají geometričnosti, t. j. nezávislosti na souřadné soustavě, a proto se zabýval jen případem $n = 2$.

Vituškinova kniha obsahuje theorii variací funkcí v E_n; základem je zajímavá theorie variací množin v E_n. Přejdeme k systematickému přehledu knihy.

V první kapitole je dána definice a základní vlastnosti funkcí s omezenou variací v E_1 a dále jsou tu uvedeny některé definice a vlastnosti pro dvojrozměrný případ.

Druhá kapitola obsahuje základní definice. Po úvodních elementárních paragrafech autor přechází k definici míry μ v prostoru Ω_k^n všech $(n - k)$-rozměrných rovin $\beta_{n-k} \subset E_n$ a v prostoru Φ_k^n všech k-rozměrných rovin, procházejících pevným bodem. Je-li $e \subset E_n$, pak $v_0(e)$ resp. $\mu_0(e)$ značí počet komponent resp. bodů množiny e. k-rozměrná variace $v_k^n(e)$ uzavřené množiny $e \subset E_n$ se definuje (až na vhodně volenou multiplikační konstantu) jako $\int_{\Omega^n_k} v_0(e \cap \beta_{n-k})\, d\mu_{\Omega^n_k}$.[2]) Pro μ_0 na místo v_0 se dostane t. zv. k-rozměrná Favardova míra, známá z integrální geometrie. Ukazuje se, že $v_k^n(e)$ nezávisí na n, dá-li se e vnořit do E_n. Dokazuje se, že $v_k^n(e) = \text{konst.} \int_{\Phi^n_k} v_{k\tau_k}(e)\, d\mu_{\Phi^n_k}$, kde $v_{k\tau_k}$ je k-rozměrná variace vzhledem k rovině τ_k. Zde $v_{k\tau_k}(e) = \int_{\tau_k} v_0(e \cap \beta_{n-k}(z))\, dm^k$, kde $\beta_{n-k}(z)$ je kolmá na τ_k a prochází bodem $z \in \tau_k$ a m^k je obvyklá k-rozměrná míra. Je-li dále f spojitá funkce na množině e, $t \in E_1$, $e_t = \{x | x \in e,\ f(x) = t\}$, pak číslo $v_k(f, e) = \text{konst}. \int_{\Omega^n_{k-1} \times E_1} v_0(e_t \cap \beta_{n-k+1})\, d\mu_{\Omega^n_{k-1}} \times dm^1$ se nazývá variací funkce f na množině e.

---

[1]) *А. С. Кронрод:* О функциях двух переменных, Успехи мат. наук *5*, 1 (35), 1950.

[2]) Smysl těchto konstrukcí se snadno nahlédne pro $n = 2$, $k = 1$.

T ř e t í resp. čtvrtá kapitola jsou věnovány podrobnějšímu studiu variací množin resp. funkcí. Dokazuje se měřitelnost funkcí v_0 a μ_0 pro uzavřené e (v závěru knihy je dán problém o zobecnění tohoto výsledku). Dále se ukazuje vztah lineární variace a Hausdorffovy délky množiny, je reprodukován Menšovův příklad uzavřené množiny délky ∞ s nulovou lineární variací a ukazuje se souvislost variací a Favardovy míry. Konečně se dokazuje, že ke každým n kladným číslům $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, kde a_0 je celé, existuje uzavřená množina e tak, že $v_k(e) = a_k$, a poznamenává se, že v_k závisí na v_n.

Ve čtvrté kapitole jsou ukázány základní vlastnosti variací funkcí, jako nezávislost variací a pod. Dále se vytyčují některé vlastnosti n-variace, o nichž se za pomoci výsledků Kronroda a j. dokazuje, že jsou charakteristické. Konečně se dokazuje formule

$$v_n(f, I_n) = \int_{I_n} |\text{grad } f| \, dm^n ,$$

což je zobecnění věty známé pro $n = 1$.

Kapitoly 1—4 tvoří úvodní část knihy, značně elementárnější než její pokračování.

V p á t é kapitole přechází autor k vlastnostem funkcí s omezenou variací. Použitý aparát byl vypracován Kronrodem ve výše citovaném článku. t-úrovní funkce f nazveme množinu těch x, pro něž je $f(x) = t$. Stromem T_f (дерево) spojité funkce f, definované na n-rozměrné uzavřené krychli I_n, nazveme topologický prostor, jehož prvky jsou komponenty všech t-úrovní, při čemž topologie je „přirozená". Studium funkce f na I_n nahradíme studiem funkce f^* na T_f, kde $f^*(I) = f(x)$ pro $I \in T_f$, $x \in I$ (účelnost této definice se nahlédne na příkladě monotonní funkce v I_1). Pomocí stromu funkce se jistým způsobem definuje monotonie funkce vzhledem k danému bodu O. Je-li nyní $v_1(f) < \infty$, je $f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 monotonně rostou vzhledem k O. Je-li dále f spojitá na I_n a má konečné variace všech řádů, pak f má skoro všude totální diferenciál. Kapitola končí informativní poznámkou o konvergenci dvojných Fourierových řad.

Vzhledem k předchozímu je účelné zkoumat podmínky pro omezenost variací funkce; tomu je věnována š e s t á kapitola. Nejprve se jednoduše dokáže, že funkce splňující Lipschitzovu podmínku má omezenou variaci v_n. Celá další část kapitoly je věnována důkazu obecnější v ě t y:

Jestliže f a všechny její parciální derivace až do řádu $n-k$ vyhovují Lipschitzově podmínce, pak $v_k(f, I_n)$ je konečná.

Důkaz zabírá 55 stránek. Autor podotýká, že získané podmínky jsou minimální. Na závěr jsou uvedeny poznámky o ohraničenosti variací množiny.

V poslední s e d m é kapitole jsou uvedeny dvě aplikace. Nejprve se definují variace v krychli a to poněkud jinak než dříve. Nyní se dokáže „metrický zákon duality":

Je-li n-tá variace $e \subset I_n$ nulová a ostatní jsou konečné, pak je možno do $I_n - e$ vepsat n-rozměrnou krychli s hranou jisté kladné délky.

Tato sama o sobě zajímavá věta je pak aplikována na řešení jednoho speciálního případu třináctého Hilbertova problému. Hilbert v r. 1900 vyslovil domněnku, že existují analytické funkce tří proměnných, které nejsou superposicí žádné násobnosti spojitých funkcí dvou proměnných (t. j. není na př. $f(x, y, z) = \varphi(x, \psi(y, z))$). Autor zde dokazuje větu tohoto druhu o superposici diferencovatelných funkcí.

V závěru knihy jsou uvedeny některé p r o b l é m y, jako na př. rozšíření theorie na metrické prostory, axiomatické zpracování variací a jiné.

Připojme některé další p o z n á m k y. Tato kniha je vlastně zpracováním nového zajímavého úseku theorie reálných funkcí a theorie množin v eukleidovských prostorech. Patrně prvním popudem k zavedeným definicím je známá Banachova věta o variaci spojité funkce (Var $f = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_0 \{x | t = f(x)\} \, dt$). Některé konstrukce se vyskytly v integrální geometrii. Dokázané věty ukazují účelnost takové theorie; pro další aplikace v analyse je potřeba většího objasnění.

Kniha je velmi podnětná a po pročtení se nabízejí mnohé otázky. Na př. se nikde nevyskytne potřeba k-té variace pro $1 < k < n$; souvisí to patrně s tím, že se uvažují funkce, t. j. zobrazení z E_n do E_1. Bylo by zajímavé aplikovat podobnou theorii na obecnější zobrazení.

Výkladu je možno leccos vytýkat. Je to především jistá nerovnoměrnost. Všeobecně známé věci se objasňují, avšak na některé speciální výsledky se ani neodkazuje. Pro úplné pochopení všech detailů je třeba dost širokých znalostí. Některé věcné chyby a opominutí a celá řada tiskových chyb také působí rušivě.

Karel Karták, Praha.

Mieczysław Biernacki: **Geometria różniczkowa,** I. Panstwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa 1954, str. 240, cena 21,35 zl.

Po dlouhé době vyšla r. 1954 v Polsku učebnice diferenciální geometrie. Její první díl je věnován hlavně křivkám rovinným a prostorovým. Z theorie ploch je uvedena jen tečná rovina, obalové plochy jednoparametrové a dvouparametrové soustavy ploch a ovšem plochy rozvinutelné.

Postup autora je obvyklý; používá klasických metod osvědčených při studiu útvarů v metrické geometrii euklidovského trojrozměrného prostoru. Útvary určuje souřadnicemi kartézskými. V druhé polovině knihy užívá také vektorů a vektorové symboliky.

Zvláštní péče je věnována ukázkovým příkladům v textu, které doplňují výklad, a příkladům ke cvičení. Na konci najde čtenář návody k řešení a výsledky všech 279 příkladů.

Kniha je rozdělena do dvou větších celků. V prvním jsou probírány rovinné křivky v eukleidovské rovině. Dosti místa je věnováno asymptotám a obrazům křivek, zejména algebraických.

Zajímavá je pozornost autora k větě o vrcholech oválu a k vzorci Cauchyho $L = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} P(\varphi) d\varphi$ pro oblouk křivky, kde $P(\varphi)$ je délka průmětu oblouku na přímku, která s osou x svírá úhel φ. Důvodem k tomu jistě byla u první věty její obecnost, u druhé věty okolnost, že byla studována polskými matematiky (H. Steinhaus, S. Gołąb).

Druhá část začíná stručným výkladem o vektorech a počítání s nimi a je převážně věnována prostorovým křivkám. Obvyklý obsah je doplněn teorií ploch.

Pozorného čtenáře zaujme v první části styk rovinných křivek (§ 7, str. 55—59), styk křivky a plochy (§ 28, str. 191—196) a jeho aplikace. Podaná definice styku je zřejmě invariantní i při afinních transformacích a lze ji přenést do vícerozměrných prostorů, jak to učinil ve své přednášce František Nožička. (Přednáška v matematické obci pražské dne 4. 3. 1957.)

Celkem lze knihu hodnotit jako velmi dobru učebnici pro studenty začátečníky a jako knihu podnětnou k dalším studiu pro ty, kteří dovedou číst mezi řádky a všímají si poznámek.

František Vyčichlo, Praha.

Andrzej Grzegorczyk: **Populární logika.** Z polštiny přeložil *P. Materna*. St. nakladatelství polit. literatury, 1957, 123 str., cena 4,36 Kčs.

Nikdo dnes u nás nepochybuje o tom, že znalost gramatiky tvoří součást všeobecného vzdělání. Je absurdní, že naproti tomu význam formální logiky, která je jakousi gramatikou správného myšlení, zůstává stále nedoceněn. Logická kultura má v průměru nízkou úroveň a technický trening ve vědomém formálním kombinování logických úsudků prakticky neexistuje. Důsledky tohoto stavu se výrazně projevují, a to především při vyučování matematice. Schází často i nejelementárnější ponětí o pravidlech formální logiky: Na technikách je zcela běžný případ, že student není schopen utvořit negaci výroku „všechna okna v posluchárně jsou otevřena". Tím spíš je takový student bezmocný tváří v tvář ε — δ formulacím s jejich logickou strohostí, která dynamičnost názorné představy zaklíná do statického rčení „ke každému ε". Snažíme se mu pomoci, vracíme se k logické abecedě. Pak zkoušíme. Lze to činit s klidným svědomím bez předpokladu o naší pedagogické genialitě či bez víry v zázraky? Moderní matematika je bez značné logické kultury nemožná. Některé části matematiky jakož i některá nová odvětví vědy nadto nezbytně vyžadují aktivní znalost theorie logického myšlení. Je proto třeba uvítat každou knihu, která pomáhá odstraňovat uvedené nedostatky, zvláště pak, je-li tak dobrá jako knížka polského pracovníka v logice a v theorii rekursních funkcí ANDRZEJE GRZEGORCZYKA. Tím spíš, že je určena širokému okruhu čtenářů (i nematematiků) a že přes adjektivum „populární" ve svém názvu seznamuje se základy moderní, matematické logiky. Z přehledu obsahu bude patrné, v čem se liší od dosud u nás vyšlých publikací o moderní („matematické" resp. „symbolické") logice.

Celá knížka se omezuje na *výrokový počet*. Je rozdělena na sedm paragrafů.

§ 1 je věnován výkladu významu logického usuzování a vysvětlení podstaty a úkolu logiky v užším i širším smyslu. Autor identifikuje názvy „současná", „symbolická" a „matematická" logika. Název „matematická logika" motivuje tím, že je nejvíce aplikována na matematické myšlení. (Domnívám se, že možná ještě spíš je název „matematická" oprávněn tím, že moderní logika podstatně užívá matematické methody.)

§ 2 pojednává o výrocích se zvláštním zřetelem k jejich jazykové a logické struktuře, zvláště pak o výrokových spojkách a složených výrocích. Je to jedna z nejpěkněji napsaných částí knížky pro svou živost a populárnost v nejlepším slova smyslu. Zde a na mnoha jiných místech je výhodou podobnost syntaxe polštiny a češtiny.

V § 3 je podrobněji vymezen předmět logiky: Je jím studium logických zákonů (t. j. identicky pravdivých výrokových schemat) a závěrových pravidel. Celý paragraf je věnován nejdůležitějšímu závěrovému pravidlu, t. zv. pravidlu odloučení (autor ani překladatel neuvádí pro toto pravidlo běžný název „modus ponens"). Je zdůrazněn formální charakter tohoto pravidla a je na něm osvětlen hlavní rys formální logiky. Pravidlo odloučení je uvedeno jako empirické pravidlo a jeho hlubší souvislost s povahou spojky „jestliže ..., pak" není diskutována.

§ 4 je věnován základním logickým zákonům a jejich významu pro konkretní usuzování. Jsou to zákon vyloučeného třetího, zákon sporu (je konfrontován s dialektickým zákonem existence protikladů), zákon transposice atd. Tyto zákony autor nemotivuje jinak, než že jsou zřejmé; příklady, které uvádí, mají být ilustrací tohoto faktu. Úkolem logiky je pouze „poukázat na takové elementární myšlenkové mechanismy, pomocí nichž můžeme vykonávat všechny správné úsudky". (Slovo „všechny" zde ovšem není docela na místě: Existuje rozsáhlá oblast úsudků, kterých se užívá ve vědě a které mají jiný než formální charakter; přitom nesporně jejich výzkum patří do logiky.) V odst. 4.4, věnovaném zákonu transposice, se po prvé setkáme s důležitým výkladem o tom, jak se u složitějšího úsudku logické zákony kombinují s pravidlem odloučení. O nepřímých důkazech a jejich souvislosti se zákonem transposice se autor explicitně nezmiňuje. Odst. 4.5 obsahuje příklad t. zv. odvozeného závěrového pravidla: autor ukazuje, že známe-li logický zákon $p \rightarrow [q \rightarrow (p \,\&\, q)]$ a pravidlo odloučení, můžeme dokázat pravidlo, na základě něhož z výroků p, q lze odvodit výrok $p \,\&\, q$. Naopak tímto důsledkem je uvedený logický zákon motivován. Tento methodický postup je aplikován často i v odst. 4.6, věnovaném t. zv. zákonům implikačních sylogismů. V tomto odstavci vrcholí výklad toho, jak kombinováním logických zákonů s pravidlem odloučení můžeme analysovat běh intuitivního logického usuzování. Celý § 4 je napsán s neobyčejným citem pro psychologii čtenáře, který není zvyklý na abstraktní myšlení. Autor na př. nešetří místem, aby výkladem o stylistických úpravách výroků postupně připravil čtenáře na standartní kondensovaný zápis složitých výroků.

§ 5 je věnován tabulkové, extensionální charakterisaci výrokových spojek a ospravedlnění možnosti takové charakterisace. Podat takové uspokojivé ospravedlnění, zvlášť v knížce neurčené výhradně matematikům, je obtížný úkol. Autorovi se to podařilo. Můžeme očekávat, že tomu, kdo knížku přečte, nebudou už trnem v oku implikace jako „jestliže na světě již nebudou žádné války, pak sloni žijí v Africe".

V § 6 autor nejprve uvádí různé druhy symboliky, běžné v matematické logice. (Sám však ponechává spojkám „ne", „a", „nebo" jejich slovní tvar.) Dále popisuje tabulkovou methodu ke zjištění, zda nějaká formule představuje logický zákon. Uvádí k tomuto účelu též zkrácenou methodu, která spočívá v odvození sporu z předpokladu, že daná formule není logickým zákonem.

§ 7 je věnován aplikacím výrokové logiky. Autor nejprve dokazuje pro reálná čísla implikaci $(x + z = y + z) \rightarrow (x = y)$ (kromě dříve uvedených logických prostředků se ovšem nevyhne užití pravidla o možnosti substituce za individuové proměnné; uvádí ho v poznámce ad hoc.); pak vysvětluje princip užití výrokové logiky na theorii elektrických obvodů. Po vhodně volených příkladech nesprávných úsudků knížka končí analysou známého paradoxu krokodila, jejž vtipná Egypťanka přivede do úzkých.

O vynikající kvalitě recensované knížky není pochyb. Je především podivuhodné, jak přirozeně autor vede čtenáře od běžných představ k pochopení formální, kombinatorické methody výrokového počtu, a jakých uměřených a přitom zajímavých prostředků používá.

Připojme několik drobných poznámek.

Autor zavádí negaci obratem „není pravda, že". To není nejvhodnější, neboť pak má negace charakter výroku o výroku, na rozdíl od negace, utvořené pomocí pouhého obratu „ne" (s příslušnou stilistickou úpravou).

Ve cvičení 4 na str. 28 by snad bylo na místě uvést, jak lze i užití spojek mezi pojmy převést na užití spojek mezi výroky.

Rozlišení dvou formulací pravidla odloučení (na str. 32 a 33) je patrně příliš jemné a neodpovídá celkem neformální diskusi tohoto pravidla v celém § 3.

Na str. 49 (ř. 2 shora) se mluví o „logickém systému, který zde uvádíme". To není na místě, neboť celý výklad má charakter registrace logických zákonů a pravidel a ne vybudování jednotného (na př. axiomatického) systému. Ostatně na str. 91 se mluví o „systému dvouhodnotové výrokové logiky" v jiném smyslu.

Užití obratu „jestliže je pravda, ..., pak musí být rovněž pravda" u výroku (j) na str. 53 má za následek, že výrok ztrácí charakter dosazení do (13) a spíš se stává jakýmsi tvrzením o možnosti odvození jednoho výroku z druhého. Podobné obraty zbavují logické přesnosti i výroky na jiných místech knížky.

Pravidlo odloučení jakož i logické zákony jsou v §§ 3, 4 ilustrovány pomocí výroků, v nichž čtenář spojku „jestliže ... pak" přirozeně chápe ve smyslu „býti důsledkem", neboť přední a zadní člen spolu obsahově souvisí. Bylo by snad na místě vrátit se k těmto příkladům a konfrontovat oba významy uvedené spojky s hlediska principu extensionálnosti, na němž jsou založeny tabulky spojek. Rovněž pravidlo odloučení se pak jeví v novém světle; je důsledkem nového, formálního významu spojek.

Autor podává na str. 109, 110 návod, jak kontrolovat správnost usuzování: U každého jednotlivého kroku je třeba najít logický zákon, který ho ospravedlňuje. To souvisí s tím, že v celém výkladu logiky privileguje logické zákony před odvozovacími pravidly (převádí vše na pravidlo odloučení). Domnívám se, že tento postup je těžkopádnější a méně přirozený, než kdybychom se opírali o větší počet (event. odvozených) závěrových pravidel.

Na str. 98 a 123 je sice zmínka o logice kvantifikátorů, bohužel však bez nejmenší vysvětlivky.

Několik poznámek k českému textu:

Místo „mezivýrokové spojky" je vhodnější a stačí říkat „výrokové spojky".

Na str. 30 čteme podivnou větu: „Tyto methody vypovídáme v logice dvojím způsobem".

Na str. 32, ř. 9 má být na př. „už" místo nevhodného „jen".

Na str. 36 se užívá nevhodně slova „žádný": „Žádné zákony výrokové logiky nejsou výroky běžného jazyka".

Na téže stránce je význam skreslen užitím slova „lze": „... za něž lze dosadit ...".

Na str. 62 je nevhodně užito slova „potvrzují": „Tyto výroky totiž potvrzují určitá fakta, která neexistují".

Na str. 70, ř. 6 má být spíš „tyto" místo „dané".

V odst. 6.5 je vhodnější mluvit o „zkrácené" než o „zkratkové" methodě. Místo termínu „nula — jednotkové" (který je rozšířen hlavně v polské literatuře) je vhodnější užívat prostě termínu „tabulkové" (ověření).

Tisková nedopatření. Na str. 29 je cvičení 9 uvedeno jako cvič. 5. Na str. 90 má být 2^n místo $2n$. Na str. 97 ve cvič. 1 a 2 má být spojka „a" kursivou. Na str. 123 chybí stránkování.

Jiří Bečvář, Liberec.

V. G. Boltjanskij: **Co je to derivace.** Přeložil Ing. *Milan Ulrich*, vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1956, 78 stran, 15 obrázků, cena 2,56 Kčs.

Knížka vyšla jako 16. svazek známé knižnice „Populární přednášky o matematice", která je určena hlavně žákům vyšších tříd výběrových škol. Autor se snaží na několika málo stránkách objasnit začátečníkům některé pojmy matematické analysy, zvláště pojem derivace a diferenciální rovnice. Je samozřejmé, že při tom musí na mnoha místech slevit z matematické přesnosti, místo důkazů najdeme tu většinou jen názorná objasnění. Zavedení pojmu derivace je motivováno fysikálně (rychlost volného pádu) a také s diferenciální rovnicí se čtenář seznamuje v souvislosti s fysikou (zapojení elektrického proudu a radioaktivní rozpad). Při četbě snad trochu rušivě působí neobvyklé zacházení s pojmenovanými čísly (pojmenování dokonce v indexech, na př. na str. 19).

Český překlad je celkem výstižný, jen na str. 22^5 místo slov „což znamená" by mělo být „dejme tomu" a na str. 25^6 místo „totiž" čti „tedy".

Student, který si přečte Boltjanského knížku, bude si ovšem muset později všechny pojmy zpřesnit, ale při první informaci budou pro něho cenné zvláště poukazy na fysikální a technické aplikace.

Jiří Sedláček, Praha.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

ZPRÁVY

PROFESOR DR FRANTIŠEK RÁDL ZEMŘEL

František Rádl se narodil 10. ledna 1876 v Pyšelích (v okrese říčanském v pražském kraji) z obchodnické rodiny jako třetí ze sedmi dětí (starší jeho bratr Emanuel narozený 21. 12. 1873, známý biolog a filosof, byl profesorem přírodovědecké fakulty Karlovy university). Studia středoškolská konal na gymnasiích v Benešově a Domažlicích. Pak studoval matematiku a fysiku na filosofické fakultě české university v Praze, při čemž poslouchal v první řadě přednášky profesorů F. J. Studničky a F. Koláčka. Po dosažení aprobace pro vyučování matematice a fysice na středních školách (r. 1900) ztrávil Rádl přes dvacet let jako středoškolský učitel v Brně, Klatovech, Táboře a konečně v Praze. Definitivním profesorem se stal v roce 1904, kdy působil na gymnasiu v Táboře. Za pobytu v Táboře předložil také disertační práci s fysikálně-teoretickým thematem „O interferenci v tlustých deskách" a byl promován na doktora filosofie v r. 1906. Ještě za svého působení v Táboře uveřejnil svá první matematická pojednání a po celou dobu své činnosti jako středoškolský učitel byl také vědecky činný. Školní rok 1909—10 ztrávil na studiích v Paříži na Sorbonně. Do Prahy přišel r. 1912. Za první světové války v r. 1917 se habilitoval z matematiky na strojním a elektrotechnickém oddělení české vysoké školy technické v Praze. Po tříleté docentuře (r. 1920) byl pověřen suplováním přednášek a vedením cvičení z matematiky na vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství v Praze za profesora F. Nušla, který se stal ředitelem státní hvězdárny. R. 1926 byl Rádl jmenován řádným profesorem matematiky na vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství v Praze. Děkanem této školy byl v roce 1935—36. Roku 1946 odešel do výslužby, přednášel však a zkoušel ještě další dva roky. Zemřel 30. prosince 1956 v Praze.

Fr. Rádl v r. 1928

Rádl uveřejnil 26 pojednání v Rozpravách české akademie (II. tř.), pět pojednání v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, jedno pojednání ve Věstníku královské české společnosti nauk a 4 pojednání v Mathematische Zeitschrift, konečně v posledním roce života (1956) vyšla dvě Rádlova pojednání (cyklostilovaná). Až na první dvě pojednání uveřejněná v Rozpravách a první pojednání uveřejněné v Časopise zabývá se Rádl ve svých pracích formální teorií diferenciálních rovnic lineárních obyčejných i parciálních. Rádl vydal také „Učebnici matematiky pro vysoké učení technické" (první vyd. 1931, druhé vyd. pozměněné 1946), určenou především pro jeho posluchače.

Tento souhrn životopisných dat zesnulého jakož i bohatý výčet jeho činnosti pedagogické i vědecké je třeba uzavřít zhodnocením jeho životního díla po stránce lidské, pedagogické i vědecké.

Zapomeňme při tom na některé trpkosti a nepříjemné události, způsobené bez zlé vůle v našem matematickém životě před poslední světovou válkou některými osobitostmi zesnulého a to jak ve věcech osobních, tak i ve věcech vědeckých. Zapomeňme na ně ne pro zásadu „o mrtvých jen dobré", ale proto, že se nám jeví z delšího časového odstupu jako malicherné. Vyzdvihněme to podstatně kladné, co zůstává životním dílem a zásluhou profesora Rádla.

Profesor Rádl nebyl rozhodně typem upjatého katedrového učence: Byl člověkem prostým, nelíčeným, s hojným smyslem pro radosti pozemské. Takovým byl i v poměru ke studentům. Jako přednášející i jako examinátor byl oblíben, jeho požadavky byly mírné, ovšem jisté minimum vědomostí vyžadoval bezpodmínečně.

Ve svých přednáškách a ve své učebnici pro techniky se snažil o co největší názornost a o to, aby těžký předmět studentům techniky co nejvíce přiblížil a usnadnil. Měl také pochopení pro fysikálně-technické aplikace matematiky a svoji vědeckou činnost začal disertační prací z matematické fysiky.

Ovšem způsoby a formy, jakými matematiku na tehdejší spojené fakultě strojního a elektrotechnického inženýrství vykládal, jakož i jeho učebnice, přijatelné v době t. zv. klasické analysy, byly pochopitelně vystaveny kritice s hlediska současných požadavků na logickou přesnost a správnost. Podobné výtky byly kladeny i jeho vědeckým pracím; je proto třeba těmto výtkám věnovat aspoň tolik osvětlení, aby jejich generalisováním a zveličováním nebyla nepoměrně snižována cena Rádlova celoživotního snažení.

Pokud jde o Rádlovu činnost vyučovací na technice, je třeba připomenout obtížnost problému nejlepšího vyučování matematice na technice (problému nepoměrně didakticky obtížnějšího, než je stejný problém na universitě).

I když nesouhlasíme s příliš populárním Rádlovým řešením tohoto problému, musíme si přiznat, že jsme jej sami dosud ještě nedokázali (relativně) definitivně vyřešit.

Pokud jde o Rádlovu činnost vědeckou, je třeba uvážit toto:

Mladý Rádl studoval matematiku na české universitě v Praze na přelomu století, tedy v době, kdy profesor Studnička, tehdejší vedoucí náš matematik, na sklonku svého života chronicky churavý, již téměř nepřednášel. Profesor Koláček byl fysikem, matematika mu byla pouze pomocným nástrojem a samo přesné budování matematiky jej nezajímalo. Neutěšený stav vyučování matematiky na české universitě té doby se krátce na to radikálně zlepšil zásluhou mladého profesora K. Petra; jeho působení však jen o 8 let mladšího Rádla již na universitě nezastihlo. A tak mladý Rádl byl na universitě v podstatě bez vedení odkázán na vlastní výběr a studium literatury (rozumí se přístupné cizí literatury; naše knižní matematická literatura v té době prakticky neexistovala). Odnesl si tedy (jako jiní naši matematikové té generace a s podobnými následky) z universitních studií bez své viny vědomosti více méně i v základních věcech nahodilé, neuspořádané a co do pojetí zpravidla zastaralé nebo rychle zastarávající v době bouřlivého rozvoje matematiky na přelomu století.

V existenčních a jiných osobních starostech profesor Rádl za své dvacetileté činnosti středoškolského učitele ani později již nenašel dosti podmínek k tomu, aby pevně stanul na půdě soudobého matematického myšlení.

Na druhé straně však samostatná matematická invence a vědecká zvídavost Rádlova, probouzející se sice za daných podmínek poměrně zvolna, ale zato neustále sílící, ukazovala na nadprůměrný talent a pobízela Rádla k vlastní vědecké práci. A je právě určitou tragedií Rádlovy vědecké snahy, že musel po celý život zápasit s naznačenými nedostatky svého matematického vzdělání (či lépe snad: matematické výchovy), jež si bez své viny odnesl z universitních studií. Zdá se, že hlavně v důsledku této okolnosti jeho dosti početné vědecké práce, které jistě nejsou bez původních myšlenek, nesou (zejména ve svém provedení) stopy těchto nedostatků — a zůstaly tak jednak pro svou logicky nedokonalou, až mnohdy nejasnou formu, a jednak pro nedostatek kontaktu se soudobými pracemi podobné tematiky skoro nepovšimnuty; profesor Rádl také bohužel neměl vědeckých žáků.

K opravdovému a spravedlivému ocenění vědeckých zásluh a původnosti profesora Rádla v jeho pracovním oboru, t. j. v t. zv. formální (aritmeticko-algebraické) teorii lineárních diferenciálních rovnic, by bylo zapotřebí učinit myšlenky těchto prací jasně srozumitelnými průměrně vzdělanému matematikovi naší doby tím, že pojmy Rádlem mlčky předpokládané budou výslovně definovány, a pokud jsou již známé, budou označeny obvyklými termíny — a že budou výslovně formulována tvrzení a jejich předpoklady. Uvažme také to, že podstata mnoha Rádlem mlčky používaných pojmů patří do abstraktní algebry, která se teprve tvořila v letech po první světové válce. Takové osvětlení Rádlových prací by bylo nejen cenné pro dějiny naší matematiky, ale mohlo by být snad ještě dnes i věcně podnětné přes obrovský rozvoj v teorii lineárních diferenciálních operátorů (od předválečných, dnes již klasických prací RITTOVÝCH a OREHO) k výsledkům sovětské školy (NAJMARK, ŠILOV, KREJN a j.), kde se uplatňuje hledisko funkcionální analysy.

Vědecký úděl Rádlův je vlastně smutným údělem nadaného samouka (který se vypracoval až do postavení vysokoškolského profesora), to jest pracovníka, který žil isolován od současné vědy nejen v tom smyslu, že neměl s ní náležitého kontaktu prostřednictvím literatury, ale i v tom smyslu, že Rádl neměl spolupracovníků a žáků, ba neměl, pokud je nám známo, ani vědeckých přátel, s nimiž by si vyměňoval myšlenky. Není naším úkolem zde posoudit, nakolik si zesnulý tento úděl přivodil sám a nakolik je výsledkem okolností, které nemohl změnit (i kdyby si jich byl vědom).

Profesor Rádl měl však svoje studenty rád a věnoval se jim podle svých sil a svého pojetí co nejlépe.

Profesor Rádl přes výhrady, které musíme mít k některým jeho vědeckým výsledkům, udělal v matematice kus původní práce a měl matematiku v pravém smyslu slova rád, to jest nebyla mu náplní rutinní výdělečné činnosti, nýbrž jí platilo tvořivé nadšení nejlepší stránky složité Rádlovy osobnosti. — A už to je dost, abychom zachovali prof. Rádla v dobré paměti.

Karel Rychlík a *Ladislav Rieger*, Praha.

SEZNAM POJEDNÁNÍ PROFESORA FRANTIŠKA RÁDLA

Rozpravy České akademie věd a umění, tř. II

16 (1907). O limitních funkcích. *2*, 7 str.
O novém odvození řady Lagrangeovy. *9*, 4 str.

21 (1912). Poznámka k theorii rovnic diferenciálních lineárních. *11*, 7 str.

22 (1913). O kaskádní transformaci diferenciálních rovnic lineárních obyčejných. *32*, 10 str.; *41*, 18 str.

23 (1914). O kaskádní transformaci diferenciálních rovnic lineárních obyčejných. *14*, 9 str.

25 (1916). O kaskádní transformaci diferenciálních rovnic lineárních obyčejných. *59*, 15 str.

26 (1917). O kaskádní transformaci diferenciálních rovnic lineárních. *5*, 14 str.
Poznámka k integraci rovnic s derivacemi parciálními lineárními o více než dvou neodvisle proměnných *15*, 11 str.
O kaskádní transformaci diferenciálních rovnic lineárních. *52*, 12 str.

27 (1918). O kaskádní transformaci diferenciálních rovnic lineárních. *2*, 12 str.
Zevšeobecnění transformace Laplaceovy na jisté rovnice s derivacemi parciálními lineární řádu n^{ho}. *23*, 6 str.
O rozšíření kaskádní transformace na rovnice lineární s derivacemi parciálními. *40*, 5 str.

28 (1919). Zavedení libovolné funkce transformační při transformaci rovnic lineárních s derivacemi parciálními. *10*, 5 str.
O invariantu P kaskádní transformace. *18*, 5 str.
O determinantu podmiňujícím transformaci diferenciálních rovnic lineárních obyčejných. *21*, 5 str.

29 (1920). O transformaci rovnic s derivacemi parciálními lineárních na základě známých integrálů partikulárních. *1,* 5 str.

O analogii transformace rovnic diferenciálních lineárních u rovnic algebraických. *7,* 5 str.

O jistých vlastnostech invariantů při transformaci diferenciálních rovnic lineárních obyčejných. *21,* 5 str.

O transformaci jistých systémů rovnic s derivacemi parciálními lineárních. *22,* 5 str.

30 (1921). O nových invariantech kaskádní transformace. *7,* 5 str.

O invariantech jisté rovnice s derivacemi parciálními lineární. *31,* 9 str.

O jisté rovnici s derivacemi parciálními lineární bez transformační řady. *32,* 10 str.

31 (1922). O rovnicích diferenciálních lineárních obyčejných třetího řádu s řadou transformační oboustranně zakončenou. *30,* 9 str.

32 (1923). O jistém theorému týkajícím se resultanty diferenciálních rovnic lineárních. *25,* 15 str.

34 (1925). O jistém obecném problému diferenciálních rovnic lineárních. *12,* 27 str.

35 (1926). O dělení mnohočlenu diferenciálního 3. řádu mnohočlenem diferenciálním 2. řádu. *45,* 16 str.

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

39 (1910). O zbytku řady Taylorovy a Lagrange-Laplaceovy. 144—146.

41 (1912). Poznámka k teorii rovnic diferenciálních lineárních. 35—37, 154—159, 557—561.

42 (1913). Poznámka k teorii rovnic diferenciálních lineárních. 20—28.

51 (1922). O rovnicích diferenciálních lineárních obyčejných druhého řádu s řadou transformační oboustranně zakončenou. (Sur les équations differentielles ordinaires du 2ᵉ ordre possédant une série de transformations limitée de deux côtés). 189—197.

57 (1929). O periodickém dělení diferenciálního mnohočlenu 3ho řádu mnohočlenem 1ho řádu. (Sur la division périodique d'un polynôme differentiel.) 83—91.

Věstník Královské české společnosti nauk, tř. matematicko-přírodovědecká

R. 1927. Vlastnosti resultantu při dělení mnohočlenů diferenciálních. (Sur la résultante de deux polynômes differentiels par raport à leur division.) 39 str.

Mathematische Zeitschrift

31 (1930). Ueber die verallgemeinerte Division der Differentialpolynome. 441—451.

40 (1935). Ueber das verallgemeinerte Mass von zwei Differentialpolynomen. 375—386.

45 (1939). Ueber die Teilbarkeitbedingungen bei den gewöhnlichen Differentialpolynomen. 429—446.

Ueber die Teilbarkeit des gewöhnlichen Differentialpolynomes dritter Ordnung durch ein ähnliches zweiter Ordnung. 719—734.

Cyklostylovaná pojednání (1956)

Ueber die stetige Transformation der Differentialpolynome. 11 stran.

Transfromation of differential linear polynomials. 13 stran.

Sestavil *Karel Rychlík,* Praha.

ZPRÁVA O ZÁJEZDU DO BERLÍNA K ÚČASTI NA OSLAVĚ 250. VÝROČÍ NAROZENIN LEONHARDA EULERA

Oslava 250. výročí narozenin Leonharda Eulera se konala dne 21. března 1957 dopoledne v plenární schůzi Německé akademie věd v Berlíně. Při příležitosti této oslavy uspořádala Německá akademie věd v Berlíně menší mezinárodní matematický sjezd věnovaný převážně thematům vztahujícím se k Eulerovu dílu a ve směru moderním k funkcím zeta.

Plenární schůze byla po hudební předehře zahájena místopředsedou Německé akademie věd v Berlíně prof. W. Friedrichem, který přivítal přítomné delegace a hosty. Ze států lidově-demokratických byl zastoupen Sovětský svaz čtyřčlennou delegací vedenou prof. P. S. Alexandrovem, dále Polsko (prof. K. Kuratowski) a Československo (prof. O. Borůvka). Po pozdravných projevech delegátů Polska a Československa pozdravil sjezd prof. Alexandrov, který na svůj projev navázal slavnostní přednášku o Leonhardu Eulerovi a jeho vztazích k Petrohradské akademii věd. Mimo to byla v této schůzi proslovena německými historiky přednáška o činnosti Leonharda Eulera v Berlínské akademii věd a slavnostní přednáška na thema: „Euler ve své době a dnes".

Ve dnech 21. (odpoledne), 22. a 23. (dopoledne) března se konaly pracovní schůze v rámci zmíněného matematického sjezdu. Bylo prosloveno celkem 18 přednášek, z toho tři delegáty ze Sovětského svazu (B. N. Delone, A. P. Juškevič, A. G. Postnikov). Československý delegát přednášel na thema: „Matyáš Lerch jako pokračovatel klasiků v theorii funkce gamma". Podal přehledný popis Lerchova díla, které se skládá z 238 vědeckých prací, a vylíčil jeho zásluhy v oboru funkce gamma, zejména objev souvislostí mezi malmsténovskými řadami a funkcí gamma. Z dalších hostů proslovili na sjezdu přednášky prof. Blaschke, Bompiani, Denjoy, Stoilov a j. Přednášky budou vydány tiskem. Sjezd byl zakončen 23. března v poledne proslovem předsedy Eulerovské komise při Německé akademii věd v Berlíně, prof. K. Schrödera. Po sjezdu byl pro účastníky uspořádán společný zájezd do Postupimě.

Sjezd byl organisován velmi pečlivě a s velkou pozorností berlínských hostitelů vůči cizím hostům. Účastníkům přinesl bohaté vědecké zkušenosti a zejména nové pohledy na život a nehynoucí dílo jednoho z největších matematiků všech dob.

Otakar Borůvka, Brno.

OBHAJOBY DISERTAČNÍCH PRACÍ KANDIDÁTŮ VĚD

Při Ústavu matematických strojů ČSAV obhájili dne 14. března 1957 disertační práce tito kandidáti fysikálně matematických věd:

Ing. *Zdeněk Korvas* práci „Příprava instrukčních sítí podle metody diferenciálního analysátoru" a Ing. *Karel Krištoufek* práci „Impulsní diferenciální analysátor".

Při Vysokém učení technickém v Praze obhájil dne 15. února 1957 kandidát technických věd dr *Miloš Lánský* práci „O transformaci GW" a dne 29. března 1957 kandidát technických věd Ing dr *Radim Servít* práci „Napjatost silnostěnného rotačního válce příčně i podélně předpjatého".

Redakce.

PŘEDNÁŠKY V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

18. 2. 1957: *Vojtěch Jarník, Vlastimil Pták* a *František Nožička*, Matematické sjezdy v Sofii, Vídni a Bukurešti.

25. 2. 1957: *Václav Metelka,* O konfiguracích.

27. 2. 1957: *Jaroslav Hájek,* O optimální výběrové strategii.

4. 3. 1957: *František Nožička,* O styku ploch a křivek. (Viz referát na str. 367.)

18. 3. 1957: *Miloš Jelínek,* O vyučování matematice v jiných státech (zpráva ze ženevské konference 1956). Viz články v časopise „Matematika ve škole", roč. VI (1956), č. 9 a 10 a roč. VII (1957), č. 2 a 3.

27. 3. 1957: *Jaromír Abrham,* O stabilitě řešení dopravního problému lineárního programování.

1. 4. 1957: *Alois Apfelbeck,* Matematická theorie vazby torsních a ohybových kmitů anisotropních tyčinek.

Redakce.