Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O ČÍSLECH $\binom{m}{n}$

V. A. GOLUBĚV, Kuvšinovo (SSSR).

(Došlo dne 10. května 1956.) DT:519.13

Autor vyšetřuje vyjádření funkce x^n součtem funkcí $\binom{x+m}{k}$, při čemž k, m, n jsou celá nezáporná čísla.

Věta 1. *Každé dvojici k, n přirozených čísel, pro něž je $k \leqq n$, přiřaďme číslo A_k^n tímto rekurentním předpisem:*

$$A_1^n = A_n^n = 1\,, \tag{1}$$

$$A_k^{n+1} = kA_k^n + (n-k+2)\,A_{k-1}^n \tag{2}$$

($k = 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$). Potom platí:

a) A_k^n jsou přirozená čísla a je $A_k^n = A_{n+1-k}^n$ pro všechna k, n.

b) Je $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^n = n!$ pro každé n.

c) Pro každé reálné x a každé n je

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} A_k^n \binom{x+n-k}{n}.^{1)} \tag{3}$$

Důkaz. Napřed dokážeme indukcí, že pro každé n platí rovnosti

$$r^n = \sum_{k=1}^{r} A_k^n \binom{n+r-k}{n} \quad (r = 1, \ldots, n)\,. \tag{4}$$

To je zřejmé pro $n = 1$. Nechť nyní rovnosti (4) platí pro některé přirozené n; zvolme index r, $1 \leqq r \leqq n+1$, a pišme ještě $A_0^n = A_{n+1}^n = 0$. Potom je vztah (2) správný i pro $k = 1$ a $k = n+1$, takže

$$\sum_{k=1}^{r} A_k^{n+1} \binom{n+1+r-k}{n+1} = \sum_{k=1}^{r} (kA_k^n + (n-k+2)\,A_{k-1}^n) \binom{n+1+r-k}{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} kA_k^n \binom{n+1+r-k}{n+1} + \sum_{k=0}^{r-1} (n-k+1)\,A_k^n \binom{n+r-k}{n+1} =$$

1) Je-li n přirozené a y reálné číslo, klademe $\binom{y}{n} = \dfrac{y(y-1)\ldots(y-n+1)}{n!}$.

$$= \sum_{k=1}^{r} A_k^n \left(k \binom{n+1+r-k}{n+1} + (n-k+1)\binom{n+r-k}{n+1}\right)^{2)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} A_k^n \left(k\frac{n+1+r-k}{n+1}\binom{n+r-k}{n} + (n-k+1)\frac{r-k}{n+1}\binom{n+r-k}{n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} A_k^n \binom{n+r-k}{n} \frac{k(n+1) + kr - k^2 + (n+1)r - (n+1)k - kr + k^2}{n+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} A_k^n \binom{n+r-k}{n} . r = r^n . r = r^{n+1}.$$

Tím je proveden indukční krok. Ze vztahu (4) ihned plyne, že vzorec (3) je správný pro $x = 0, \ldots, n$, tedy pro $n+1$ různých hodnot x. Vztah (3), který je rovností mezi polynomy stupně nejvýš n-tého, platí tedy pro každé x vůbec. Derivujeme-li ho n-krát, dostaneme tvrzení *b*). Tvrzení *a*) čtenář snadno dokáže indukcí.

Věta 2. *Buďte x, n přirozená čísla. Potom lze x^n vyjádřit jako součet $n!$ sčítanců tvaru $\binom{m}{n}$, kde m je celé, $x \leqq m < x+n$.* (Plyne ihned z věty 1.)

Věta 3. *Ke každému přirozenému m existují přirozená čísla $B_1, \ldots, B_m$ tak, že pro všechna reálná x platí*

$$x^{2m-1} = \sum_{j=1}^{m} B_j \binom{x+j-1}{2j-1}. \tag{5}$$

Důkaz. Určeme čísla $B_1, \ldots, B_m$ tak, aby vztah (5) byl správný pro $x = 1, \ldots$ $\ldots, m$. Snadno se zjistí, že jsou tím čísla B_j jednoznačně určena a že jsou celá. Položme $f(x) = \sum_{j=1}^{m} B_j \binom{x+j-1}{2j-1}$. Protože $\binom{-x+j-1}{2j-1} = -\binom{x+j-1}{2j-1}$, je $f(-x) = -f(x)$, takže vztah (5) platí také pro $x = -1, \ldots, -m$ a tedy pro všechna x vůbec. Zvolme nyní index r ($1 \leqq r \leqq m$) a utvořme funkci

$$g(x) = x^{2m-1} - \sum_{j=1}^{r} B_j \binom{x+j-1}{2j-1} = \sum_{j=r+1}^{m} B_j \binom{x+j-1}{2j-1}.$$

Zřejmě $g(x) = 0$ pro $x = -r, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, r$; funkce g' má tedy v intervalu $(-r, r)$ aspoň $2r$ (různých) kořenů, funkce g'' aspoň $2r-1$ kořenů, ..., funkce $g^{(2r-1)}$ aspoň 2 kořeny. Protože však $g^{(2r-1)}(x) = (2m-1)\ldots(2(m-r)+1) . x^{2(m-r)} - B_r$, musí být $B_r > 0$. Tím je vše dokázáno.

Poznámka. Z (3) snadno plyne vzorec $\sum_{r=1}^{j} r^n = \sum_{k=1}^{n} A_k^n \binom{j+1+n-k}{n+1}$; podobný vzorec lze odvodit (při lichém n) ze vztahu (5).

---

[2]) Použili jsme toho, že $A_0^n = 0$ a že $\binom{n+r-r}{n+1} = 0$.