определить полный граф как ориентированный граф, в котором с каждой парой различных вершин u, v существует одно и только одно из ребер $\overrightarrow{uv}$, $\overrightarrow{vu}$, то справедливо утверждение: Полный граф G содержит один единственный путь, проходящий через все вершины тогда и только тогда, если G—ациклический граф (теорема 15).

В множестве вершин $\Pi\{G\}$ произвольного ориентированного графа G можно определить следующую эквивалентность: Пусть $x\varrho y$ тогда и только тогда, если путь ведет из x к y и также путь ведет из y к x. Отношением ϱ определено разбиение Σ множества $\Pi\{G\}$. Элементы из Σ можно считать вершинами графа $\Sigma(G)$ и его ребра определить следующим образом. Для $V \neq W$, $V \in \Sigma$, $W \in \Sigma$ существует ребро $\overrightarrow{VW}$ тогда и только тогда, если существуют вершины $x \in V$, $y \in W$ так, что $\overrightarrow{xy} \in G$. Тогда $\Sigma(G)$ является ациклическим графом. Также показано, как можно при помощи графа $\Sigma(G)$ построить каждый базис вершин графа G.

Zusammenfassung

ÜBER ENDLICHE GERICHTETE GRAPHEN

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Eingelangt am 4. April 1956.)

Die vorliegende Arbeit hat vier Teile. Der erste Teil enthält Definitionen der Grundbegriffe: Als *unseparabel* bezeichnen wir (nach [5]) einen Graphen, dessen jede zwei Kanten mit einem gemeinsamen Knotenpunkt in irgendeinem Kreis liegen. Die Begriffe *Bahn*, *Kantenbasis*, *Punktbasis*, *Netz* und *ebener Graph* sind in [1] definiert. Mit $\nu(G)$ bezeichnen wir die Anzahl der Knotenpunkte 2. Grades im Graphen G. Im zweiten Teil studieren wir Kantenbasen für Netze und besonders solche Kantenbasen B, für welche $\nu(B)$ eine kleine Zahl ist. Haupteigenschaften dieser Graphen B sind: Für jedes B ist $\nu(B) \geqq 2$ (Satz 4). Ist B ein unseparabler Graph mit gerader (resp. ungerader) Anzahl von Knotenpunkten und $\nu(B) \leqq 3$ (resp. $\nu(B) \leqq 4$), dann ist B ein ebener Graph (Satz 8). Fig. 5 zeigt einen nichtebenen Graphen B^* mit 10 Knotenpunkten, wo $\nu(B^*) = 4$. (Dieser Teil unserer Arbeit knüpft an [3].) Der dritte Teil ist den *wohlgerichteten* Graphen gewidmet (so bezeichnen wir solche Graphen, in denen von jedem Knotenpunkt aus zu jedem anderen eine Bahn führt — siehe [4]). Der Begriff des wohlgerichteten Graphen hängt mit dem algebraischen Begriffe der *unzerlegbaren* Matrix eng zusammen. Wenn wir nämlich einer gegebenen Matrix $A = \|a_{ik}\|_1^n$ einen Graphen G_A (in weiterem Sinn) zuordnen, der n Knotenpunkte $u_1, u_2, \ldots, u_n$ hat, und dessen Kanten

durch die Formel (1) gegeben sind, dann ist A eine unzerlegbare Matrix dann und nur dann, wenn G_A ein wohlgerichteter Graph ist (Satz 9). Ein wohlgerichteter Graph, der h Kanten und u Knotenpunkte hat, enthält wenigstens $h - u + 1$ Zyklen (Satz 11).

Der vierte Teil behandelt *azyklische* Graphen. Ein Graph ist azyklisch, wenn kein Teilgraph ein Zyklus ist. Wenn wir der gegebenen Matrix A wieder einen Graphen G_A zuordnen, so ist G_A azyklisch dann und nur dann, wenn so eine Permutation der Spalten und Reihen der Matrix A existiert, welche die Matrix A in eine Dreiecksmatrix umformt (Anmerkung 5). Weiter wird gezeigt, dass ein azyklischer Graph nur eine einzige Kantenbasis (Satz 13) und eine einzige Punktbasis (Satz 14) enthält. Wenn wir einen vollständigen Graphen als gerichtet definieren, in dem zu jedem Paar verschiedener Knotenpunkte u, v eine und nur eine der Kanten $\overrightarrow{uv}$, $\overrightarrow{vu}$ existiert, dann gilt der Satz: Ein vollständiger Graph enthält dann und nur dann eine einzige Bahn, die durch alle Knotenpunkte führt, wenn G azyklisch ist (Satz 15).

In der Knotenpunktmenge $\Pi\{G\}$ eines beliebigen gerichteten Graphen G definieren wir die folgende Äquivalenzrelation: Es sei $x\varrho y$ dann und nur dann, wenn eine Bahn aus x nach y und zugleich auch eine Bahn aus y nach x führt. Die Relation ϱ definiert eine Zerlegung Σ der Menge $\Pi\{G\}$. Die Elemente von Σ können wir für Knotenpunkte eines Graphen $\Sigma\{G\}$ halten, wobei Kanten folgendermassen definiert sind: für $V \neq W$, $V \in \Sigma$, $W \in \Sigma$ existiert $\overrightarrow{VW}$ dann und nur dann, wenn es Knotenpunkte $x \in V$, $y \in W$ mit $\overrightarrow{xy} \in G$ gibt. Es gilt dann, dass $\Sigma(G)$ ein azyklischer Graph ist. Es wird auch gezeigt, dass man mit Hilfe des Graphen $\Sigma(G)$ jede Punktbasis des Graphen G leicht bilden kann.