Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O KONEČNÝCH ORIENTOVANÝCH GRAFECH

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Došlo dne 4. dubna 1956.)

DT: 519.5
513.34.001

Práce má čtyři části. Část I obsahuje definice základních pojmů. Tak basí hran (orientovaného) grafu G rozumíme jeho podgraf B takový, že každá hrana z B představuje jedinou dráhu spojující krajní uzly a ležící v B, zatím co ke každé hraně mimo B existuje dráha ležící v B a spojující krajní uzly. V části II studujeme base hran sítí (t. j. „úplných" orientovaných grafů). Podnět k úvahám v této části dala práce L. Rédeie [3]. Část III je věnována dobře orientovaným grafům (t. j. grafům, v nichž z každého uzlu můžeme dojít po dráze do každého dalšího). Ukazuje se souvislost s algebraickým pojmem nerozložitelné matice a odhad počtu cyklů dobře orientovaného grafu dává věta 11. Část IV si všímá acyklických grafů (t. j. grafů, v nichž neexistuje žádný cyklus).

I. Základní pojmy

Orientovaným grafem G rozumíme konečnou množinu $\Pi\{G\}$ prvků, jimž říkáme *uzly*, v níž je definována binární relace R, která je irreflexivní, t. j. pro každé x platí x non Rx. Dvojici uzlů x, y, pro něž platí xRy, nazveme *hranou* $\overrightarrow{xy}$ s *počátečním* uzlem x a *koncovým* uzlem y. Uzly x, y jsou pak *sousední*. Hrany $\overrightarrow{xy}$ a $\overrightarrow{yx}$ jsou *opačně orientované*. Množinu hran orientovaného grafu G označíme $K\{G\}$. Nemůže-li vzniknout nedorozumění, píšeme místo $x \in \Pi\{G\}$ jen $x \in G$, místo $\overrightarrow{xy} \in K\{G\}$ jen $\overrightarrow{xy} \in G$. Je-li R symetrická relace, mluvíme o *neorientovaném* grafu G. Neorientovaný graf je tedy zvláštním případem orientovaného grafu, proto v případech, kdy nemůže dojít k nedorozumění, říkáme místo „orientovaný" graf pouze „graf".

Uzly grafu můžeme geometricky znázornit jako body v E_3, hrany jako oblouky spojující uzly ale nemající společných vnitřních bodů, při čemž šipkou vyznačujeme, který uzel hrany je počáteční a který koncový. U neorientovaného grafu místo hran $\overrightarrow{xy}$ a $\overrightarrow{yx}$ mluvíme o hraně xy, kterou geometricky vyznačujeme jediným obloukem. Neklademe-li na relaci R požadavek irreflexivity (čili připouštíme-li, aby uzel byl spojen sám se sebou *smyčkou*), mluvíme o grafu v *širším smyslu.*

Jsou-li G_1 a G_2 dva grafy takové, že současně platí $\Pi\{G_1\} \subset \Pi\{G_2\}$, $K\{G_1\} \subset K\{G_2\}$, říkáme, že G_1 je *podgrafem* grafu G_2. Neplatí-li dále současně $\Pi\{G_1\} = \Pi\{G_2\}$, $K\{G_1\} = K\{G_2\}$, je G_1 *vlastním* podgrafem grafu G_2.

Stupněm uzlu u rozumíme počet hran, pro něž je u počátečním nebo koncovým uzlem. Uzel nultého stupně se nazývá *isolovaný*, uzel 1. stupně je *koncový*, uzel 2. stupně je *nerozvětvovací*, každý uzel aspoň 3. stupně pak *rozvětvovací*. Počet nerozvětvovacích uzlů grafu G označíme $\nu(G)$.

Řekněme, že dva grafy G_1 a G_2 jsou si *rovny* čili mají *stejnou strukturu*, existuje-li prosté zobrazení f množiny $\Pi\{G_1\}$ na $\Pi\{G_2\}$ takové, že $\overrightarrow{xy} \in G_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{f(x)\,f(y)} \in G_2$.

V grafu G zaveďme místo hrany $\overrightarrow{uv}$ nový uzel x a hrany $\overrightarrow{ux}$, $\overrightarrow{xv}$. Řekněme, že takto sestrojený graf G' vznikl z grafu G *půlením hrany* $\overrightarrow{uv}$. Grafy G_1 a G_2 jsou *homeomorfní*, když buď mají stejnou strukturu nebo když půlením některých hran lze je převést na grafy téže struktury.

Jsou-li u, v dva různé uzly grafu G, nazveme *drahou* D prostou (konečnou) posloupnost uzlů $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k$ takovou, že $u_0 = u$, $u_k = v$ a že pro $1 \leqq i \leqq k$ je $\overrightarrow{u_{i-1}u_i} \in K\{G\}$. Říkáme pak, že D *spojuje* svůj *počáteční* uzel u s *koncovým* uzlem v; existenci takové dráhy zapisujeme $u \rightarrow v$. Uzel dráhy, který není ani počáteční, ani koncový, nazývá se *vnitřní*. Zavádíme i dráhy bez hran tím, že pro každý uzel u klademe $u \rightarrow u$. Podgraf C grafu G se nazývá *cesta*, je-li to buď dráha nebo vznikne-li z něho dráha tím, že některé jeho hrany nahradíme opačně orientovanými (cesta C má koncové uzly u, v, což píšeme $u \sim v$; pro každý uzel u klademe $u \sim u$). Graf G je *souvislý*, jestliže pro každou dvojici uzlů x, y je $x \sim y$. Souvislý graf K o n uzlech se nazývá *n-úhelník* (někdy též *kružnice*), je-li $\nu(K) = n$. Souvislý graf s alespoň dvěma uzly, neobsahující žádnou kružnici, se nazývá *strom.*

Graf G je *dobře orientovaný*[1]), když pro každou dvojici uzlů u, v platí $u \rightarrow v$. Dobře orientovaný graf je tedy souvislý. Dobře orientovaný n-úhelník se nazývá *cyklus*. Nahradíme-li v cyklu o n uzlech ($n > 2$) hranu $\overrightarrow{xy}$ hranou $\overrightarrow{yx}$, vznikne *skorocyklus* nad $\overrightarrow{yx}$ (Rédei [3] zvolil název *Fastzyklus*). Podgraf W grafu G se nazývá *dvojdráha*, je-li homeomorfní se skorocyklem a vnitřní uzly jedné z drah tvořících W jsou nerozvětvovací v G (této dráze pak říkáme *oblouk* grafu G).

---

[1]) Robbins [4] r. 1939 dokázal větu: Nutná a dostačující podmínka k tomu, aby byl daný (konečný) souvislý graf G dobře orientovaný nebo aby se dal změnou orientace některých hran převést v dobře orientovaný graf, zní: Každá hrana grafu G leží v nějaké kružnici.

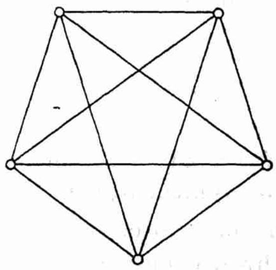
Analogickou větu pro nekonečné grafy dokázal r. 1941 L. Egyed. Jeho maďarsky psaná práce s německým resumé není u nás dosažitelná. (Mat. fis. Lap. *48*, str. 505—509.)

Podgraf B grafu G se nazývá *base hran* grafu G, má-li tyto vlastnosti:

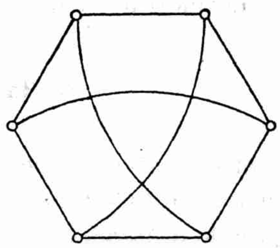
1. Je bez skorocyklů.

2. Je-li B vlastní podgraf C a C podgraf G, existuje v C skorocyklus nad jistou hranou $\overrightarrow{xy} \in K\{C\} - K\{B\}$.

Dá se dokázat, že každý graf obsahuje aspoň jednu basi hran ([1], str. 100) a že existují orientované grafy, v nichž lze udat více než jednu basi hran ([1], str. 92).



Obr. 1a.



Obr. 1b.

Příklad 1. Je zřejmé, že base hran grafu G je dobře orientovaný graf právě tehdy, je-li G dobře orientovaný graf.

Most (souvislého grafu) je hrana, po jejímž odstranění se poruší souvislost. Na př. tedy koncová hrana je most.[2])

Uzel a grafu G se nazývá *artikulace*, vycházejí-li z něho dvě hrany, které současně neleží v téže kružnici grafu. Není-li a artikulací grafu G, nazveme jej *regulárním* uzlem grafu G. Graf, jehož všechny uzly jsou regulární, je *neseparabilní*, jinak je *separabilní*.[3])

Článkem grafu G rozumíme jeho neseparabilní podgraf, který není vlastním podgrafem v žádném neseparabilním podgrafu grafu G. Článek grafu se nazývá *koncový*, je-li právě jeden jeho uzel artikulací daného grafu. Vlastnosti artikulací a článků je možno studovat prostřednictvím theorie stromů. Je-li totiž dán souvislý graf G, definujme nový graf H takto:[4]) Množinu $\Pi\{H\}$ tvoří jednak artikulace grafu G (uzly 1. typu), jednak uzly 2. typu, z nichž každý nahrazuje jeden článek grafu G. Hrany definujme takto: Je-li a artikulace grafu G ležící v jeho článcích $G_1, G_2, \ldots, G_r$ a jsou-li $g_1, g_2, \ldots, g_r$ příslušné uzly z H, zaveďme hrany $\overrightarrow{ag_i}$ $(1 \leqq i \leqq r)$. Dá se dokázat, že H je strom.

[2]) *König* [1] nepočítá koncové hrany mezi mosty.

[3]) Názvy „neseparabilní" a „separabilní" uvádí *H. Whitney* [5].

[4]) V knize [1], str. 230, je konstrukce grafu H popsána nesprávně, neboť při postupu tam uvedeném nemusí být H strom.

Příklad 2. Souvislý separabilní graf G má aspoň dva koncové články. Sestrojíme-li totiž výše popsaným způsobem strom H, odpovídají si koncový článek grafu G a koncový uzel stromu H. D. KÖNIG však dokazuje ([1], str. 49), že každý strom má aspoň dva koncové uzly.

Poznámka 1. H. WHITNEY dokázal ([5], věta 11), že každý neseparabilní podgraf grafu G je zcela obsažen v jednom článku grafu G.

Rovinným grafem rozumíme graf, který se dá znázornit v E_2. KURATOWSKI dokázal r. 1930, že (neorientovaný) graf je rovinný právě tehdy, není-li žádný jeho podgraf homeomorfní s některým z grafů na obr. 1.

II. Base hran sítě

Síť je graf o alespoň dvou uzlech, který s každými dvěma svými uzly u, v obsahuje hranu $\overrightarrow{uv}$. V této kapitole budeme studovat base hran sítě. Příkladem takové base je cyklus procházející všemi uzly sítě. König (str. 102—103) ukazuje, že tento příklad je v síti base hran o nejmenším počtu hran. Pro stručnost říkáme dále v této kapitole místo „base hran sítě" jenom „base".[5])

Věta 1. *Souvislý graf je dobře orientovaný právě tehdy, když každá jeho hrana je v nějakém cyklu.*

Důkaz. Budiž G dobře orientovaný graf a $\overrightarrow{xy}$ jeho hrana. Platí $y \rightarrow x$, tedy $\overrightarrow{xy}$ leží v cyklu. Ať nyní G je souvislý a každá jeho hrana leží v nějakém cyklu. Zvolme dva různé uzly u, v grafu G. Platí $u \sim v$; ke každé cestě spojující u a v přiřaďme číslo p znamenající počet hran této cesty, které musíme nahradit opačně orientovanými, aby tato cesta byla drahou s počátečním uzlem u a koncovým v. Vyhledejme nyní cestu $C_{\min}$ s nejmenším p. Ukážeme, že zde $p = 0$. V opačném případě ať $\overrightarrow{xy}$ je jedna z hran, jejichž orientaci jsme měnili. Z existence cyklu nad $\overrightarrow{xy}$ plyne spor s tím, že $C_{\min}$ má nejmenší p. Platí tedy $u \rightarrow v$ a G je dobře orientovaný graf.

Věta 2. *Souvislý graf G je basí právě tehdy, když každý jeho článek je dobře orientovaný graf bez skorocyklů.*

Důkaz. a) Je-li každý článek souvislého grafu G dobře orientovaný, je G dobře orientovaný (plyne z věty 1.). Nechť nyní G je dobře orientovaný graf. Nad hranou $\overrightarrow{xy}$, zvolenou v jeho článku T, existuje cyklus Z. Protože Z je neseparabilní podgraf, plyne z poznámky 1, že Z leží celý v T. Tento článek je tedy dobře orientovaný (podle věty 1).

b) Je-li G bez skorocyklů, je též každý článek bez skorocyklů. Nechť nyní je každý článek bez skorocyklů. Pak v G nemůže existovat skorocyklus, neboť podle poznámky 1 by celý ležel v některém článku.

[5]) Můžeme tedy také říci, že base B je dobře orientovaný graf, v němž vynecháním kterékoliv hrany se poruší dobrá orientovanost.

Poznámka 2. Protože dobře orientovaný graf nemá isolované ani koncové uzly, každá artikulace base je uzel aspoň 4. stupně.

Lemma 1. *Budiž H dobře orientovaný vlastní podgraf base B. Pak neexistuje hrana $\overrightarrow{xy} \in B$ neležící v H, pro niž by bylo $x \in H$, $y \in H$; dále neexistují uzly $u \in B$, v_1, $v_2 \in H$ tak, že $\overrightarrow{uv_i} \in B$, $\overrightarrow{uv_i}$ non $\in H$ ani tak, že $\overrightarrow{v_iu} \in B$, $\overrightarrow{v_iu}$ non $\in H$ ($i = 1, 2$).*

Důkaz. Nechť existuje hrana $\overrightarrow{xy}$ uvedených vlastností. V H je $x \rightarrow y$, tedy v B existuje skorocyklus nad $\overrightarrow{xy}$, což je spor. Podobně se dokáže i další část tvrzení.

Lemma 1 nás vede (při daných B a H) ke konstrukci nového grafu $B(H)$. Uzly grafu $B(H)$ jsou jednak uzly z B nepatřící k H, jednak nový uzel ξ. Množinu hran grafu $B(H)$ tvoří všechny hrany z B nepatřící k H a s uzlem ξ jsou spojeny ty uzly z $B(H)$, které jsou v B spojeny s některým uzlem z H (zachová se i orientace).[6] Graf $B(H)$ nazveme *kontrakcí grafu G podle H.*

Lemma 2. *Kontrakce $B(H)$ je opět base.*

Důkaz. Zvolme dva různé uzly u, v z $B(H)$; chceme dokázat $u \rightarrow v$. Je-li $u = \xi$, přistupme k basi B a v ní zvolme uzel $x \in H$. V B platí $x \rightarrow v$ a na příslušné dráze nechť x_0 je poslední uzel ležící v H. Část původní dráhy mezi x_0 a v leží v $B(H)$, tedy zde $\xi \rightarrow v$. Podobně z předpokladu $v = \xi$ plyne $u \rightarrow \xi$. Nechť tedy $u \neq \xi \neq v$. Přistupme k basi B, kde platí $u \rightarrow v$. Neobsahuje-li příslušná dráha žádný uzel z H, pak také v $B(H)$ platí $u \rightarrow v$. Obsahuje-li však tato dráha uzel $y \in H$, pak na ní vyhledáme první uzel této vlastnosti (označíme jej y_1) a poslední uzel této vlastnosti (označíme y_2). Část původní dráhy mezi u a y_1, jakož i část mezi y_2 a v ukazují, že v $B(H)$ je $u \rightarrow v$. Je tedy $B(H)$ dobře orientovaný graf.

Kdyby v $B(H)$ existoval skorocyklus S, pak S nutně obsahuje uzel ξ (jinak by existoval skorocyklus už v B). Přejdeme-li však k basi B, pak hrany skorocyklu S by měly s H společné uzly t_1, t_2. Není možné $t_1 = t_2$ a v případě $t_1 \neq t_2$ plyne z dobré orientovanosti podgrafu H existence skorocyklu v B. Kontrakce $B(H)$ tedy neobsahuje žádný skorocyklus.

Věta 3. *Neseparabilní base o n uzlech ($n \geqq 3$) neobsahuje žádný dvojúhelník.*

Důkaz. Nechť existuje neseparabilní base B s dvojúhelníkem $\overrightarrow{uv}$, $\overrightarrow{vu}$; odstraněním těchto dvou hran ať vznikne graf B'. V B' není $u \rightarrow v$. Graf B' obsahuje kromě u, v ještě další uzly; tak označme w uzel sousední k některému z uzlů u, v (na př. nechť $\overrightarrow{uw} \in B'$). Hrany $\overrightarrow{uv}$, $\overrightarrow{uw}$ leží v jisté kružnici grafu B, jinak by u byla artikulace grafu B. V B' tedy je $u \sim v$. Změnou orientace některých hran grafu B' (ležících na cestě C) se dá tedy dosáhnout toho, že v novém grafu je $u \rightarrow v$. Označme $p_{\min}$ nejmenší počet hran z B',

[6]) Tato konstrukce tedy (názorně řečeno) znamená, že necháme splynout H v jediný uzel. V dalším označujeme písmenem ξ uzel „vzniklý při kontrakci".

které musíme nahradit opačně orientovanými, aby v novém grafu B'' platilo $u \to v$. Je $p_{min} > 0$. Zvolme v B' hranu $\overrightarrow{xy} \in C$, u níž bylo nutno měnit orientaci, aby vznikl graf B''. Budiž Z cyklus obsahující hranu $\overrightarrow{xy}$.

Odstraněním hrany $\overrightarrow{xy}$ se C rozpadne na dvě cesty (mezi u a y je C_1, mezi x a v je C_2). Probíhejme cyklus Z ve směru hrany $\overrightarrow{xy}$ (začínáme v x). Budiž při tom u_0 poslední uzel ležící v C_1 a při dalším postupu nechť v_0 je první uzel ležící v C_2. Existence dráhy mezi u_0 a v_0 (na cyklu Z) je spor s minimalitou čísla p_{min}.

Poznámka 3. Obsahuje-li base B dvojúhelník $\overrightarrow{uv}$, $\overrightarrow{vu}$, kde u, v jsou rozvětvovací uzly, pak u, v jsou artikulacemi grafu B. Kdyby totiž na př. u byl regulární uzel, označme T článek, v němž u leží. Graf T je neseparabilní base (věta 2) s alespoň třemi uzly a dvojúhelníkem (spor s větou 3).

Existuje base B o libovolném počtu uzlů tak, že $\nu(B) = 2$; za B stačí volit graf, jehož každý článek je dvojúhelník a jen dva články jsou koncové. Dále platí

Věta 4. *Je-li B base, pak $\nu(B) \geqq 2$.*

Důkaz. Pro B o dvou uzlech je $\nu(B) = 2$. Předpokládejme, že existuje nejmenší číslo n_0 tak, že jistá base B_0 o n_0 uzlech má $\nu(B_0) < 2$. Zvolme cyklus Z tak, aby procházel nerozvětvovacím uzlem grafu B_0; má-li B_0 jen rozvětvovací uzly, zvolme za Z libovolný cyklus. Sestrojíme-li graf $B(Z)$, je počet uzlů této kontrakce menší než n_0. Platí však $\nu(B(Z)) < 2$, což je spor s minimalitou čísla n_0.

Důsledek věty 4 (důkaz je zřejmý): *Dobře orientovaný vlastní podgraf base B neobsahuje všechny nerozvětvovací uzly grafu B.*

Lemma 3. *Budiž H dobře orientovaný vlastní podgraf base B. Je-li a artikulace v kontrakci $B(H)$ ($a \neq \xi$), pak a je artikulace grafu B.*[7]

Důkaz. Nechť a je regulární uzel grafu B neležící v H a nechť je to artikulace grafu $B(H)$. Zřejmě existují dvě hrany grafu $B(H)$, pro něž je a počátečním nebo koncovým uzlem. Existuje zde dokonce taková dvojice hran h_1, h_2, která neleží v žádné kružnici grafu $B(H)$. V basi B jim odpovídají jisté hrany h'_1, h'_2, které leží v kružnici O.

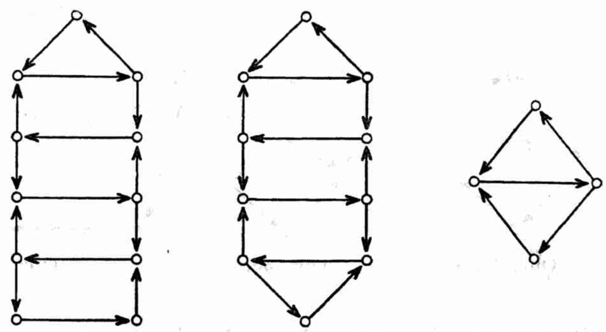
Není možné, aby O neměla žádný uzel společný s H; pak by totiž v $B(H)$ existovala kružnice jdoucí hranami h_1, h_2. Také předpoklad, že O má s H společné uzly, vede k témuž sporu.

Než podáme přehled neseparabilních basí s „malým počtem" nerozvětvovacích uzlů, zavedeme ještě několik pojmů.

Nechť trojúhelníkový cyklus T je vlastní podgraf base B. Kontrakce $J = B(T)$ ať má uzel ξ za nerozvětvovací. Pak J nazveme *zjednodušením* grafu

[7]) Názorně řečeno: kontrakcí nevznikají nové artikulace, leda uzel ξ.

B. Zjednodušení neseparabilní base je zřejmě opět neseparabilní base (podle lemmatu 3 a poznámky 2). K libovolné basi B sestrojme posloupnost grafů $J_0, J_1, J_2, \ldots$ tak, že $J_0 = B$ a každý další člen (existuje-li) je zjednodušením předcházejícího. Z konečnosti grafu B plyne konečnost této posloupnosti: existuje zde graf J_s, k němuž neexistuje zjednodušení. Nazveme jej *redukovaným* grafem base B. Je-li $s = 0$, nazveme B *ireducibilní* basí. Označme dále W_{2k+1} ($k \geqq 1$) graf o $2k + 1$ uzlech $u_1, u_2, \ldots, u_{2k+1}$, jehož hrany jsou $\overrightarrow{u_3 u_1}$,



Obr. 2a. Obr. 2b. Obr. 2c.

$\overrightarrow{u_2 u_4}$, $\overrightarrow{u_5 u_1}$, $\overrightarrow{u_i u_{i+1}}$ (pro $1 \leqq i \leqq 2k$, $i \neq 3$), $\overrightarrow{u_{2j+1} u_{2j-2}}$ (pro $3 \leqq j \leqq k$). Zřejmě W_{2k+1} je base.[8]) Je-li T trojúhelníkový cyklus base B, nazveme *zobecněným nerozvětvovacím uzlem* W (nad T) maximální vlastní podgraf struktury W_{2k+1} v grafu B, který obsahuje T jako podgraf a takový, že v $K\{B\} \dot{-} K\{W\}$ existují jen dvě hrany s jedním uzlem ve W, jedna s koncovým uzlem u_{2k} a druhá s počátečním u_{2k+1}. Je vidět, že kontrakci $B(W)$ můžeme najít prostřednictvím několika zjednodušení.

Lemma 4. *Všechny redukované grafy dané base B jsou si rovny.*

Důkaz. Je-li B ireducibilní, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)}, \ldots$ $\ldots, W^{(t)}$ jsou všechny zobecněné nerozvětvovací uzly v B. Mají-li některé dva z podgrafů $W^{(i)}$ společný uzel, pak snadno nahlédneme, že jeden redukovaný graf base B je dvojúhelník.[9]) V tomto případě platí naše tvrzení (nahlédneme to indukcí podle počtu sestrojených zjednodušení).

Nechť konečně jsou podgrafy $W^{(i)}$ po dvou disjunktní. Sestrojme posloupnost kontrakcí

$$B^{(1)} = B(W^{(1)}), \quad B^{(2)} = B^{(1)}(W^{(2)}), \ldots, B^{(t)} = B^{(t-1)}(W^{(t)}).$$

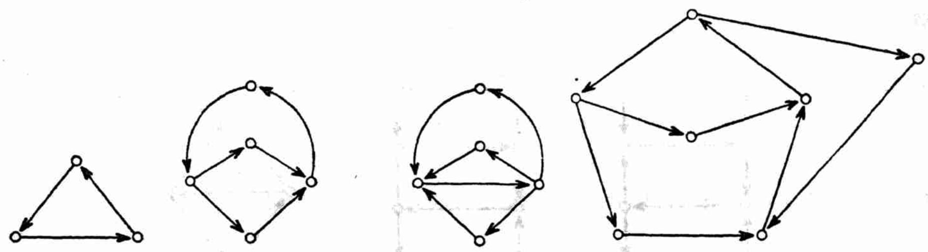
---

[8]) Na obr. 2a) je znázorněn W_{11}.

[9]) Basi o 10 uzlech, jejímž redukovaným grafem je dvojúhelník, udává obr. 2b), basi o 4 úhlech pak obr. 2c).

Graf $B^{(t)}$ je zřejmě ireducibilní a můžeme k němu dojít též prostřednictvím několika zjednodušení. Je to tedy redukovaný graf base B, a to jediný (vzhledem k disjunktnosti podgrafů $W^{(i)}$). Důkaz je podán.

Je-li $m \geqq 1$, existuje neseparabilní base B' o $2m$ uzlech tak, že $\nu(B') = 2$ (jejím redukovaným grafem je dvojúhelník).[9] Existuje tedy i neseparabilní base B'' o $2m + 1$ uzlech tak, že $\nu(B'') = 3$ (stačí v předcházejícím grafu provést půlení některé hrany — viz obr. 2a)). Dále platí



Obr. 3a. Obr. 3b. Obr. 3c. Obr. 3d.

Věta 5. *Je-li B neseparabilní base o $2m + 1$ uzlech, je $\nu(B) \geqq 3$.*

Důkaz. Je-li $m = 1$, je B cyklus, tedy $\nu(B) = 3$. Předpokládejme, že existuje nejmenší číslo m_1 tak, že pro jistou neseparabilní basi B_1 o $2m_1 + 1$ uzlech je $\nu(B_1) < 3$. Pak podle věty 4 je $\nu(B_1) = 2$. Zvolme cyklus Z_ν obsahující jeden z nerozvětvovacích uzlů grafu B_1 (z důsledku věty 4 plyne, že obsahuje právě jeden takový uzel). Označme k počet hran v Z_ν a sestrojme $B_2 = B_1(Z_\nu)$. Nemůže být $k \geqq 4$ (pak by $\nu(B_2) = 1$, což odporuje větě 4) ani $k = 2$ (věta 3). Případ $k = 3$ znamená, že graf B_2 má $2m_1 - 1$ uzlů a je $\nu(B_2) = 2$. Podle předpokladu o m_1 je tedy B_2 separabilní. Jeho artikulace však není ani uzel ξ (poznámka 2), ani žádný další uzel (lemma 3). Došli jsme ke sporu a důkaz je podán.

Pro stručnost vyjadřování položme nyní $\varrho_n = 2$ při n sudém, $\varrho_n = 3$ při n lichém. Platí

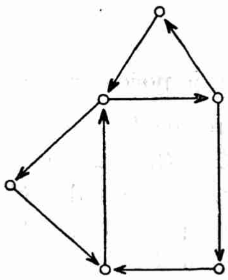
Věta 6. *Ireducibilní neseparabilní base B o n uzlech, pro něž $\nu(B) = \varrho_n$, jsou právě tyto:* a) *je-li n sudé, je B dvojúhelník;* b) *je-li n liché, je B jedním z grafů na obr.* 3.

Důkaz. Existují-li ještě jiné ireducibilní neseparabilní base, budiž B_0 jedna z nich o n_0 uzlech ($n_0 > \varrho_{n_0}$). Zvolme v ní cyklus Z_ν s nerozvětvovacím uzlem (Z_ν je vlastní podgraf); ať k je počet jeho hran. Je $k \geqq 3$ (věta 3). Kontrakce $B_1 = B_0(Z_\nu)$ má $n_0 - k + 1$ uzlů.

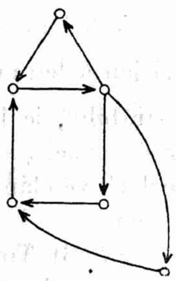
a) Při n_0 sudém není $k \geqq 4$, neboť pak by bylo $\nu(B_1) \leqq 1$ (spor s větou 4). Je-li $k = 3$, je v kontrakci B_1 uzel ξ buď rozvětvovací (pak je však $\nu(B_1) \leqq 1$) nebo nerozvětvovací (pak B_1 je zjednodušení base B_0 — spor s ireducibilitou).

b) Při n_0 lichém leží v Z_ν nejvýše dva nerozvětvovací uzly grafu B_0 (důsledek věty 4).

Leží-li tam dva, je $\nu(B_1) < 3$, tedy $\nu(B_1) = 2$, a proto $k = 4$. Uzel ξ kontrakce B_1 je pak nerozvětvovací, tedy B_1 je podle lemmatu 3 a poznámky 2 neseparabilní. Je-li B_1 ireducibilní, pak podle odstavce a) je $n_0 - k + 1 = 2$, čili $n_0 = 5$. Snadno nahlédneme, že potom jedinou basi B_0 o pěti uzlech, pro níž B_1 je dvojúhelník, přináší obr. 3b) (spor). Nechť B_1 není ireducibilní. Existuje v něm tedy cyklus T tak, že $B_1(T)$ je zjednodušení base B_1. Neprochází-li T uzlem ξ kontrakce B_1, pak T leží také v B_0 (spor s ireducibilitou). Leží-li ξ v cyklu T, pak ξ je jedním ze dvou nerozvětvovacích uzlů neseparabilní base B_1. Podle věty 5 má pak B_1 sudý počet uzlů. Podle odstavce a) jeho redukovaným grafem je dvojúhelník, tedy B_0 není ireducibilní (spor).



Obr. 4a.



Obr. 4b.

Leží-li v Z_ν jen jeden nerozvětvovací uzel, nemůže být $k \geqq 6$, neboť pak by bylo $\nu(B_1) = 2$ a uzel ξ v kontrakci B_1 by byl aspoň 5. stupně. Předpoklad, že B_1 je neseparabilní, zamítneme takto: Podle věty 5 má B_1 sudý počet uzlů, podle odstavce a) tedy známe jeho strukturu, ale zde rozvětvovací uzly jsou 3. stupně. Nechť B_1 je tedy separabilní; pak artikulaci této kontrakce představuje uzel ξ. Kdyby graf B_1 měl aspoň tři články, pak každý z nich má aspoň dva nerozvětvovací uzly, což vede ke sporu $\nu(B_1) \geqq 3$. Kontrakce B_1 má tedy dva články (v každé po jednom nerozvětvovacím uzlu) a uzel ξ je v každém článku nerozvětvovací, tedy v B_1 je to uzel 4. stupně (spor).

Zbývající případy jsou $k = 3; 4; 5$.

I. Je-li kontrakce B_1 separabilní, má artikulaci ξ a právě dva články, z nichž každý má sudý počet uzlů. Zřejmě má tedy lichý počet uzlů $n_0 - k + 1$, čili $k \neq 4$. Případ $k = 3$ vede k typu c) a $k = 5$ k typu d) (spor).

II. Je-li B_1 neseparabilní, je vyloučen případ $k = 5$ (věta 5). Je-li $k = 4$, nemůže být B_1 ireducibilní (pak by to totiž byl dvojúhelník, což je ve sporu s tím, že uzel ξ je rozvětvovací v kontrakci B_1). Opak však vede pro B_0 k typu d) (spor). Je-li $k = 3$, musí být ξ rozvětvovací v kontrakci B_1, jinak by B_0 nebyl ireducibilní. Je-li rozvětvovací, je $\nu(B_1) = 2$ (spor s větou 5). Důkaz je podán.

Obr. 4 ukazuje, že existuje neseparabilní base B se sudým počtem uzlů, pro niž $\nu(B) = 3$.

Je tedy též zřejmá existence neseparabilní base B' o lichém počtu uzlů tak, že $\nu(B') = 4$ (provedeme v obr. 4 půlení některé hrany). Nyní platí

Věta 7. *Budiž B ireducibilní neseparabilní base o n uzlech (n sudé). Nechť $\nu(B) = 3$. Pak B má strukturu z obr.* 4a) *nebo* 4b).

Důkaz. Zvolme v B cyklus Z_ν s nerozvětvovacím uzlem. Ten nemůže obsahovat dva nerozvětvovací uzly z B, neboť pak by konktrace ${}_1B = B(Z_\nu)$ měla $\nu({}_1B) = 2$, uzel ξ by v ní byl nerozvětvovací, tedy Z_ν by byl čtyrúhelník; ${}_1B$ by byla neseparabilní, tedy by měla sudý počet uzlů (věta 5). Avšak ${}_1B$ má $n - 3$ uzly, což je liché číslo (spor).

Nechť Z_ν má jen jeden nerozvětvovací uzel (k je počet hran v Z_ν).

Je-li ${}_1B$ separabilní, je jeho jedinou artikulací uzel ξ (lemma 3), který je tedy v ${}_1B$ rozvětvovací (poznámka 2). Je tudíž $\nu({}_1B) = 2$ a z úvahy o nerozvětvovacích uzlech ve článcích grafu ${}_1B$ vidíme, že ${}_1B$ má dva články; jsou to dvojúhelníky, tedy $n - k + 1 = 3$. Artikulace ξ je v ${}_1B$ uzel 4. stupně, tedy $k \leqq 5$ (a ovšem $k \geqq 3$). Tomu vyhovuje jen $n = 6$, $k = 4$ a B má pak zřejmě strukturu z obr. 4a) nebo 4b).

Je-li ${}_1B$ neseparabilní, je uzel ξ rozvětvovací (jinak by B nebyla ireducibilní), tedy $\nu({}_1B) = 2$. Podle věty 5 má tedy ${}_1B$ sudý počet uzlů, jeho strukturu proto udává obr. 2c). Nacházíme, že $k \leqq 4$ a $n - k + 1 = 4$, čemuž vyhovují jen $n = 6$, $k = 3$. Docházíme opět ke grafům z obr. 4a)b).

Lemma 5. *Budiž B neseparabilní base o n uzlech (n liché); nechť $\nu(B) = 4$. Pak v B existuje cyklus Z_ν obsahující právě jeden nerozvětvovací uzel grafu B.*

Důkaz. Nechť každý cyklus Z_ν, který prochází nerozvětvovacím uzlem grafu B, obsahuje buď dva nebo tři nerozvětvovací uzly (všechny obsahovat nemůže). Existuje-li Z_ν se třemi nerozvětvovacími uzly, označme Z'_ν cyklus procházející zbývajícím nerozvětvovacím uzlem grafu B. Jsou-li Z_ν, Z'_ν disjunktní, pak Z'_ν obsahuje jen jeden nerozvětvovací uzel grafu B (spor). Cykly Z_ν, Z'_ν nemohou však mít společný uzel. Odtud totiž plyne existence dobře orientovaného grafu H, vlastního to podgrafu v B, který obsahuje všechny nerozvětvovací uzly z B (spor s důsledkem věty 4).

Má-li každý cyklus, procházející nerozvětvovacím uzlem grafu B, po dvou nerozvětvovacích uzlech, nemůže zase existovat graf H popsaných vlastností. Existují tedy v B dva disjunktní cykly ${}_iZ_\nu$ ($i = 1; 2$) a v každém z nich dva nerozvětvovací uzly. Kdyby aspoň jeden z cyklů měl aspoň 5 hran, pak dvěma kontrakcemi dojdeme ke grafu G, kde $\nu(G) < 2$. Tedy ${}_iZ_\nu$ jsou oba čtyrúhelníkové a s každým incidují dvě hrany. Provedeme kontrakce

$${}_1G = B({}_1Z_\nu)\,, \quad {}_2G = {}_1G({}_2Z_\nu)$$

a vidíme, že ${}_2G$ má $n - 6$ (lichý počet) uzlů, při čemž $\nu({}_2G) = 2$. Podle věty 5 je tedy ${}_2G$ separabilní, podle lemmatu 3 má za artikulace nejvýše uzly ${}_i\xi$; ale ty jsou tam nerozvětvovací (spor). Důkaz je podán.

Než přistoupíme k hlavní větě této kapitoly, zavedeme toto označení: Součet stupňů rozvětvovacích uzlů grafu G označíme $\sigma(G)$. Podle obr. 1 je zřejmé, že pro nerovinný graf G platí $\sigma(G) \geqq 18$.

Věta 8. *Budiž B neseparabilní base o n uzlech; je-li $\nu(B) \leqq \varrho_n + 1$, pak B je rovinný graf. Existuje neseparabilní base $\bar{B}$, která není rovinná a pro niž platí $\nu(\bar{B}) = \varrho_n + 2$.*

Důkaz. Věta 6 podává přehled ireducibilních neseparabilních basí B, pro něž $\nu(B) = \varrho_n$. Z těchto grafů dostaneme každou neseparabilní basi B' splňující vztah $\nu(B') = \varrho_n$ tím, že v některém z těchto grafů případně nahradíme některé nerozvětvovací uzly zobecněnými nerozvětvovacími uzly. Předpoklad $\nu(B) = \varrho_n$ znamená tedy, že B je rovinná. Podobně při n sudém a $\nu(B) = 3$ (věta 7).

Budiž nyní n liché, $\nu(B) = 4$. Z předpokladu, že existuje nerovinná neseparabilní base těchto vlastností, dojdeme ke sporu takto:

Sestrojíme redukovanou basi ${}^1B$, která je pak rovněž nerovinná neseparabilní a $\nu({}^1B) = 4$. V ní zvolíme cyklus Z_ν podle lemmatu 5; ať má k hran. Sestrojme kontrakci ${}^2B = {}^1B(Z_\nu)$; platí $\nu({}^2B) = 3$ a uzel ξ je v kontrakci ${}^2B$ rozvětvovací.

I. Je-li ${}^2B$ separabilní, má nejvýše tři články (vzhledem k tomu, že $\nu({}^2B) = 3$) a artikulací je uzel ξ.

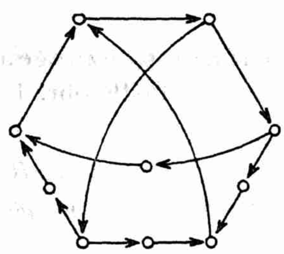
Má-li ${}^2B$ tři články, má zřejmě každý z nich sudý počet uzlů a v každém článku je ξ nerozvětvovacím uzlem. Kontrakce ${}^2B$ je ireducibilní, tedy články jsou dvojúhelníky. Počet uzlů v ${}^2B$ je $n - k + 1 = 4$ čili k je sudé. Zřejmě je $k \leqq 6$ a dostáváme $\sigma({}^1B) \leqq 16$ (spor).

Má-li ${}^2B$ dva články a je-li k liché ($n - k + 1$ liché), nemůže mít jeden článek sudý počet uzlů a druhý lichý. Oba počty uzlů však nemohou být liché, neboť pro každý článek G by bylo $\nu(G) \geqq 3$, tedy $\nu({}^2B) \geqq 4$ (rovnost by znamenala, že artikulace ξ je 4. stupně v ${}^2B$).

Jsou-li oba počty uzlů sudé, uvědomíme si, že v jednom článku G_1 leží jeden nerozvětvovací uzel z ${}^2B$ a ve zbývajícím článku G_2 dva. Článek G_1 má pak artikulaci ξ grafu ${}^2B$ za svůj nerozvětvovací uzel, je to tedy dvojúhelník (jak plyne z ireducibilnosti grafu ${}^2B$).

Má-li G_2 strukturu z obr. 2c), je artikulace ξ v kontrakci ${}^2B$ uzel 5. stupně, tedy $k \leqq 6$ a tedy (vzhledem k paritě k) je $k \leqq 5$. Dostáváme $\sigma({}^1B) \leqq 13$ (spor).

Má-li G_2 svůj redukovaný graf na obr. 4, pak artikulace ξ kontrakce ${}^2B$ je v G_2 (a ovšem i v G_1) nerozvětvovacím uzlem. Odstraňme z G_2 uzel ξ a hrany $\overrightarrow{u\xi}$, $\overrightarrow{\xi v}$. Vznikne dobře orientovaný[10]) graf H a kontrakce $G_2(H)$ je dvojúhelník. Graf H je podgrafem také v ${}^1B$. Provedeme-li kontrakci ${}^1B(H)$, vznikne neseparabilní graf ${}^3B$ mající $\nu({}^3B) = 3$. Graf ${}^3B$ není rovinný a stejné vlastnosti má též příslušný redukovaný graf ${}^4B$. Podle obr. 3 však víme, že ${}^4B$ je rovinný (spor).



Obr. 5.

Je-li k sudé ($n - k + 1$ sudé), mají oba články různou paritu počtu svých uzlů. V tom článku, který má lichý (sudý) počet uzlů, leží dva (jeden) nerozvětvovací uzly grafu ${}^2B$ a artikulace ξ je v ${}^2B$ uzel 4. stupně. Je tedy $k = 4$. Článek se sudým počtem uzlů je pak dvojúhelník a redukovaný graf druhého článku je na obr. 3. Podobně jako prve v G_2 najdeme v tomto článku dobře orientovaný podgraf H', který je podgrafem i v ${}^1B$. Sestrojíme kontrakci ${}^5B = {}^1B(H')$ mající $\nu({}^5B) = 3$. Graf ${}^5B$ je rovněž nerovinný, avšak $\sigma({}^5B) \leqq 10$ (spor).

II. Je-li ${}^2B$ neseparabilní s lichým počtem uzlů (čemuž odpovídá liché k), pak (vzhledem k tomu, že ξ je zde rozvětvovací) má ${}^2B$ strukturu z obr. 3b),c),d).

Má-li strukturu b), je $k = 3$ a tedy $\sigma({}^1B) \leqq 10$, při c) je $k \leqq 5$ a tedy $\sigma({}^1B) \leqq$ $\leqq 16$, při d) je $k = 3$ a tedy $\sigma({}^1B) \leqq 16$. Došli jsme tedy vždy ke sporu.

Má-li ${}^2B$ sudý počet uzlů (čemuž odpovídá sudé k), má ${}^2B$ strukturu z obr. 4a) b), tedy $k = 4$ čili $\sigma({}^1B) \leqq 16$ (spor).

Obr. 5 ukazuje nerovinnou basi B^* s 10 uzly, pro níž $\nu(B^*) = 4$. Půlením hrany dostaneme odtud basi B^{**} s 11 uzly mající $\nu(B^{**}) = 5$. Důkaz je podán[11]).

III. Dobře orientované grafy

Pojem dobře orientovaného grafu souvisí s pojmem nerozložitelné matice.[12]) Čtvercová matice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ se nazývá *rozložitelná*, existuje-li rozklad množiny indexů $1, 2, 3, \ldots, n$ na dvě skupiny

$$M = \{i_1, i_2, \ldots, i_\mu\}\,, \quad N = \{k_1, k_2, \ldots, k_\nu\}\,, \quad (\mu + \nu = n)$$

tak, že pro každé $i_\alpha \in M$, $k_\beta \in N$ platí $a_{i_\alpha k_\beta} = 0$. Jinak je matice *nerozložitelná*.

[10]) Připojíme-li k H hranu $\overrightarrow{uv}$, vidíme, že v H je $u \to v$.

[11]) V práci [3] není správné tvrzení, že každá base hran je rovinný graf, jak upozornil W. T. Tutte v Math. Reviews, Vol. *16*, No 1, 1955, str. 58.

[12]) Viz např. Ф. Р. Гантмахер: Теория матриц, Москва 1953, str. 321.

Souvislost s dobře orientovanými grafy nahlédneme, když ke každé čtvercové matici $A = \|a_{ik}\|_1^n$ přiřadíme graf G_A (v širším smyslu), který má n uzlů u_1, $u_2, \ldots, u_n$ a jeho hrany jsou dány touto ekvivalencí:

$$\overrightarrow{u_i u_k} \in G_A \iff a_{ik} \neq 0 \,. \tag{1}$$

Věta 9. *Čtvercová matice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ je nerozložitelná právě tehdy, je-li graf G_A dobře orientovaný.*

Důkaz. Nechť A je rozložitelná a G_A dobře orientovaný. Existují dva uzly u_i a u_k tak, že $i \in M$, $k \in N$ a platí $u_i \to u_k$. Na této dráze existují zřejmě dva po sobě jdoucí uzly $u_{i'}$ a $u_{k'}$ tak, že $i' \in M$, $k' \in \dot{N}$, je tedy $a_{i'k'} \neq 0$, což je spor.

Nechť A je nerozložitelná a G_A není dobře orientovaný. Existují tedy dva uzly x, y, pro něž neplatí $x \to y$. Budiž M^* množina těch x', pro něž $x \to x'$, a N^* nechť tvoří zbývající uzly grafu G_A. Je $M^* \neq \emptyset \neq N^*$. Množinám M^*, N^* odpovídá jistý rozklad indexů $1, 2, \ldots, n$ na dvě třídy M, N tak, že pro každé $i \in M$, $k \in N$ platí $a_{ik} = 0$, což je spor s nerozložitelností matice A. Důkaz je podán.

Věta 10. *Neseparabilní dobře orientovaný graf G, který není právě cyklus, obsahuje dvojdráhu.*

Důkaz. Je-li $\nu(G) = 0$, obsahuje G skorocyklus (věta 4), tedy i dvojdráhu. Předpokládejme existenci neseparabilního dobře orientovaného grafu $G_{\min}$ s rozvětvovacím uzlem, který neobsahuje žádnou dvojdráhu a má ze všech grafů vypsaných vlastností nejmenší počet nerozvětvovacích uzlů. Jeden z těchto uzlů označme x a buďtež u, v jeho sousedé, t. j. $\overrightarrow{ux} \in G_{\min}$, $\overrightarrow{xv} \in G_{\min}$. Je $u \neq v$ (neseparabilita) a $\overrightarrow{uv}$ non $\in G_{\min}$. Místo $\overrightarrow{ux}$, $\overrightarrow{xv}$ zaveďme hranu $\overrightarrow{uv}$ a zrušme uzel x. Vznikne neseparabilní graf G' mající rozvětvovací uzel a nemající dvojdráhu a platí $\nu(G') < \nu(G_{\min})$, což je spor.[13])

Věta 11. *Dobře orientovaný graf G o h hranách a u uzlech má aspoň μ cyklů (kde $\mu = h - u + 1$).*

Důkaz. a) Nejprve dokážeme tvrzení: Je-li každý článek našeho grafu G cyklus, má G právě μ cyklů. Důkaz provedeme indukcí podle počtu r článků.

Je-li $r = 1$, je tvrzení zřejmé. Budiž tedy $r > 1$ a ať věta platí pro grafy s $r - 1$ články. Uvažujeme dobře orientovaný graf G_r s r články a budiž T jeden jeho koncový článek o t hranách. Odstraňme z G_r všechny regulární uzly článku T a všechny hrany tohoto článku. Vznikne dobře orientovaný graf G_{r-1} o $h - t$ hranách, o $u - t + 1$ uzlech a $r - 1$ článcích, který podle indukčního předpokladu má počet cyklů $(h - t) - (u - t + 1) + 1 = h - u$. Tedy G_r má μ cyklů.

b) Vlastní důkaz podáme indukcí podle μ.

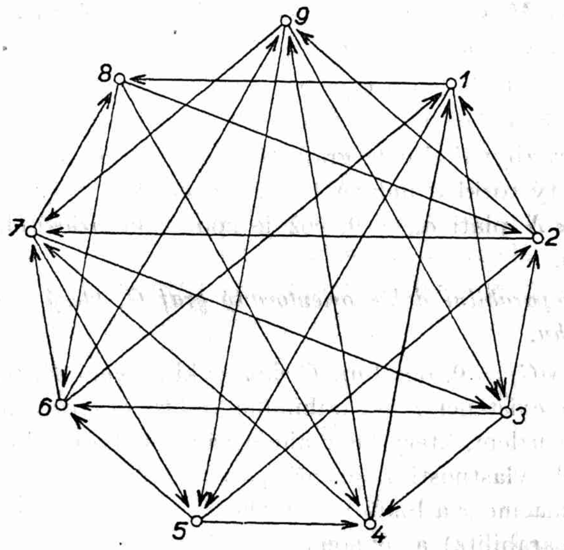
---

[13]) Věta 10 ukazuje, že není možné zavést pojem jakéhosi „úsporně“ orientovaného grafu, v němž by ke každé dvojici různých uzlů u, v existovala jediná dráha vedoucí z u do v.

Nechť $\overline{G}$ má $\mu = 1$. Označíme-li ϱ_i počet uzlů i-tého stupně v $\overline{G}$, platí[14]) $2h = \sum_{i=2}^{\infty} i\varrho_i$ a dále

$$2h = 2\sum_{i=2}^{\infty} \varrho_i + \sum_{i=3}^{\infty} (i-2)\, \varrho_i = 2u + \sum_{i=3}^{\infty} (i-2)\, \varrho_i\,.$$

Odtud plyne $\varrho_i = 0$ pro každé $i \geqq 3$. Je tedy $\overline{G}$ cyklus a tvrzení platí.



Obr. 6.

Budiž nyní $\mu > 1$. Učiňme indukční předpoklad a uvažujme graf G o h hranách a u uzlech, při čemž $h - u + 1 = \mu$. Jsou-li všechny jeho články cykly, je tvrzení zřejmé podle a). V opačném případě budiž G_0 jeden článek, který není cyklus. Je to neseparabilní dobře orientovaný graf a podle věty 10 existuje tedy v G_0 dvojdráha s obloukem L. Bez újmy obecnosti se dá předpokládat, že L je obloukem i v G. Budiž α počet vnitřních (nerozvětvovacích) uzlů oblouku L; tedy $\alpha + 1$ je počet hran oblouku L. Vynechme v G oblouk L (ponechávajíce ovšem jeho počáteční uzel x a koncový y). Vznikne dobře orientovaný graf G' mající $h - (\alpha + 1)$ hran a $u - \alpha$ uzlů. Podle indukčního předpokladu má aspoň $h - u$ cyklů a dále v něm platí $y \rightarrow x$. Tedy G má aspoň μ cyklů.

P o z n á m k a 4. Číslo μ vystupuje v theorii konečných grafů častěji. König ([1], str. 53) je nazývá *Zusammenhangszahl*, Whitney ([5], str. 340) uvádí tři názvy: *nullity, cyclomatic number, first Betti number*. V souvislosti s větou 11

[14]) Viz [1], str. 21.

zůstává otevřena otázka, zda každý dobře orientovaný graf bez dvojúhelníků lze změnou orientace některých hran převést na dobře orientovaný graf mající právě μ cyklů.

Příklad 3. Jako aplikaci rozhodneme, zda daná matice je rozložitelná.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Sestrojíme-li graf G_A (obr. 6) a určíme v něm basi hran. Vidíme, že takovou basi tvoří na př. cyklus po řadě s uzly 1329567841; je tedy G_A dobře orientovaný a matice A nerozložitelná.

IV. Acyklické grafy

Neumann a Morgenstern [2] zavádějí na str. 591 pojem *acyklické* relace. Použijeme jej k této definici: *Acyklický graf* je graf, který neobsahuje jako podgraf žádný cyklus.

Zřejmě každý podgraf acyklického grafu je acyklický. *Pramenem* grafu nazveme uzel, který není koncový pro žádnou hranu grafu. V acyklickém grafu existuje zřejmě aspoň jeden pramen (z opaku plyne totiž při konečnosti grafu existence cyklu).

Věta 12. *Graf G je acyklický právě tehdy, lze-li jeho uzly očíslovat čísly* 1, 2, 3, ..., *n tak, že $\vec{ij} \in K\{G\} \Rightarrow i < j$.*

Důkaz. Existuje-li popsané očíslování, nemůže v G existovat cyklus s uzly $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Pak by totiž bylo $i_1 < i_2 < \ldots < i_r < i_1$, čili $i_1 < i_1$.

Je-li obráceně G_1 acyklický, zvolme v něm jeden pramen a označme jej 1. Odstraníme-li z G_1 uzel 1 a hrany z něho vycházející, vznikne acyklický graf G_2. Jeden z pramenů grafu G_2 označme 2 a proces opakujme. Z konečnosti grafu G_1 plyne existence žádaného očíslování.

Poznámka 5. Dané čtvercové matici A přiřaďme podle (1) graf G_A. Z věty 12 plyne, že G_A je acyklický právě tehdy, existuje-li taková permutace sloupců a řádků matice A, která převádí A v matici mající „pod hlavní diagonálou" jen nuly.

König [1] uvádí na str. 93 pojem *transitivní* graf. Je to graf, v němž definující relace je transitivní. Ukazuje se[15]), že transitivní graf bez dvojúhelníků má jedinou basi hran. Snadno však nahlédneme, že transitivní graf bez dvojúhelníků je zvláštním případem acyklického grafu. Větu z poznámky [15]) zobecníme nyní takto:

Věta 13. *Acyklický graf G má jedinou basi hran. Její hrany jsou právě ty hrany grafu G, nad nimiž neexistuje v G skorocyklus.*

Důkaz. Uzly grafu G nechť jsou očíslovány podle věty 12. Označme $\mathfrak{M}$ množinu hran grafu G, nad nimiž neexistuje skorocyklus, a nechť B je jistá base hran grafu G. Je zřejmé $\mathfrak{M} \subset K\{B\}$. Dokážeme též inklusi $K\{B\} \subset \mathfrak{M}$. Zvolme $\overrightarrow{ij} \in K\{B\}$ (tedy $i < j$) a nechť $\overrightarrow{ij}$ non $\in \mathfrak{M}$. Tedy nad $\overrightarrow{ij}$ existuje v G skorocyklus; mezi všemi těmito skorocykly označme S ten, který má maximální počet hran. Kdyby existovala hrana $\overrightarrow{i'j'} \in S$ $(i \leqq i' < j' \leqq j)$ neležící v B, nebyl by S zřejmě maximální nad $\overrightarrow{ij}$. Je tedy $K\{S\} \subset K\{B\}$, což je spor s definicí base hran. Unicita je tím též dokázána.

Je známa tato úloha: Postavte na šachovnici nejmenší možný počet dam (královen) tak, aby každé neobsazené pole — a jen takové pole — bylo napadeno některou dámou. König interpretuje úlohy tohoto typu pomocí grafů a zavádí při tom pojmy *base uzlů* a *řešení* daného grafu[16]). *Basí uzlů* grafu G rozumíme množinu $U \subset \Pi\{G\}$ mající dvě vlastnosti:

1. Ke každému x non $\in U$ existuje $y \in U$ tak, že $y \rightarrow x$.
2. Pro žádnou dvojici $y_1 \neq y_2$ z U není $y_1 \rightarrow y_2$.

Dá se dokázat, že v každém grafu existuje aspoň jedna base uzlů; snadno sestrojíme graf, který má více než jednu basi uzlů.

Řešením grafu G nazýváme množinu $R \subset \Pi\{G\}$ o těchto dvou vlastnostech:

1. Ke každému x non $\in R$ existuje $y \in R$ tak, že $\overrightarrow{yx} \in K\{G\}$.
2. Pro žádnou dvojici $y_1 \neq y_2$ z R není $\overrightarrow{y_1y_2} \in K\{G\}$.

V některých grafech neexistuje řešení. Neumann a Morgenstern ([2], str. 597) však dokazují, že každý acyklický graf má jediné řešení[17]).

Věta 14. *Acyklický graf G má jedinou basi uzlů. Tvoří ji množina všech pramenů.*

Důkaz. Uzly grafu G nechť jsou očíslovány podle věty 12. Označme $\mathfrak{M}$ množinu všech pramenů grafu G a nechť U je jistá base uzlů grafu G. Je zřejmě $\mathfrak{M} \subset U$. Dokážeme inklusi $U \subset \mathfrak{M}$. Zvolme $i \in U$ a nechť i non $\in \mathfrak{M}$. Existuje tedy v G hrana $\overrightarrow{ji}$ (kde $j < i$), proto j non $\in U$. Existuje tedy dále uzel $j' \in U$

[15]) [1], str. 94, věta 9.

[16]) *König* [1] užívá pro basi uzlů názvu *Punktbasis* (str. 89), pro řešení pak *Punktbasis 2. Art* (str. 90). Neumann a Morgenstern [2] nazývají řešení *solution* (str. 588).

[17]) Formulováno ovšem v naší terminologii. V citované knize se totiž pojem grafu výslovně nevyskytuje.

tak, že v G platí $j' \to j$ (odtud $j' < j$). Z toho plyne $j' \to i$, což je spor s definicí base uzlů. Pro každé $i \in U$ je tedy $i \in \mathfrak{M}$. Unicita je tím též dokázána.

V souvislosti s acyklickými grafy je snad zajímavá poznámka k jednomu Rédeiovu výsledku (uvedená ve větě 15). Zaveďme však nejprve dva pojmy. Graf, který s každými dvěma různými uzly x, y obsahuje právě jednu z hran $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{yx}$, se nazývá *úplný*. Existuje-li v grafu G dráha, která prochází všemi jeho uzly, nazveme ji *osou* grafu G. L. Rédei dokázal[18]), že počet os v úplném grafu je lichý. Dá se též dokázat

Věta 15. *Úplný graf obsahuje jedinou osu právě tehdy, je-li acyklický.*

Důkaz. Uvažujeme úplný graf G o n uzlech. Je-li G acyklický, je každá jeho osa basí hran a tedy existuje jediná (věta 13). Nechť nyní G není acyklický. Zvolme v něm jednu osu a označme její uzly po řadě $1, 2, 3, \ldots, n$. Jsou tedy označeny všechny uzly z G. Protože G není acyklický, existují uzly i, k ($i + 1 < k$) tak, že $\overrightarrow{ki} \in G$. Ze všech existujících dvojic $(i; k)$ této vlastnosti zvolme ty s nejmenším i a z těchto tu dvojici s největším k. Následuje schema, které ukazuje existenci další osy v G.

	Uzly další osy
$i = 1,\ k = n$	$2, 3, 4, \ldots, n-1, n, 1$
$i = 1,\ k = n-1$	$2, 3, 4, \ldots, n-2, n-1, 1, n$
$i = 1,\ k < n-1$	$2, 3, 4, \ldots, k-1, k, 1, k+1, k+2, \ldots, n-1, n$
$i = 2,\ k = n$	$1, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, 2$
$i = 2,\ k = n-1$	$1, 3, 4, 5, \ldots, n-2, n-1, 2, n$
$i = 2,\ k < n-1$	$1, 3, 4, 5, \ldots, k-1, k, 2, k+1, k+2, \ldots, n-1, n$
$i > 2,\ k = n$	$1, 2, 3, \ldots, i-1, i+1, i+2, \ldots, n-1, n, i$
$i > 2,\ k = n-1$	$1, 2, 3, \ldots, i-1, i+1, i+2, \ldots, n-2, n-1, i, n$
$i > 2,\ k < n-1$	$1, 2, 3, \ldots, i-1, i+1, i+2, \ldots, k-1, k, i, k+1, k+2, \ldots$ $\ldots, n$

Důkaz je podán.

Je-li dán graf G, zaveďme v $\Pi\{G\}$ relaci ϱ takto: Kladme $x\varrho y$ právě tehdy, platí-li současně $x \to y$, $y \to x$. Relace ϱ je zřejmě reflexivní a symetrická.

[18]) Jeho maďarsky psaná práce je u nás nedosažitelná. Informaci o ní podává [1], str. 20.