Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

NEROVNOSTI PRO ZOBECNĚNÉ STUDENTOVO ROZDĚLENÍ A JEJICH POUŽITÍ

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Došlo dne 20. března 1956.) DT:519.271

Zobecnění spočívá v tom, že odhad rozptylu nemá obvyklou strukturu (1), ale složitější strukturu (2). Tak tomu bývá při zpracování k nezávislých výběrů, jejichž rozptyly se neznámým způsobem liší. V tomto článku jsou nalezeny nerovnosti uvádějící takto zobecněné Studentovo rozdělení ve vztah s obyčejnými Studentovými rozděleními. Použití se týká obvyklého testování nulové hypothesy a sestrojování intervalu spolehlivosti.

1. Úvod a shrnutí. Víme-li, že určitá statistika (náhodná veličina) x se řídí normálním rozdělením, pak k posouzení odchylky $x - \mu$ od její střední hodnoty μ stačí znát buď její rozptyl σ^2, nebo alespoň některý jeho odhad s^2. STUDENT ve své klasické práci nalezl rozdělení poměru $(x - \mu)/s$ pro případ, kdy s^2 má strukturu

$$s^2 = \sigma^2 \frac{1}{m} \chi^2(m) , \tag{1}$$

kde $\chi^2(m)$ značí náhodnou veličinu nezávislou na x a řídící se chí-kvadrát rozdělením s m stupni volnosti. Je to známé Studentovo rozdělení s m stupni volnosti. Od těch dob se statistikové nejednou zabývali problémem jak se $(x - \mu)/s$ chová za předpokladů, které — jak tomu v praxi často bývá — se poněkud liší od těch, z nichž vyšel Student. Zjistilo se ku příkladu, že rozdělení Studentova poměru $(x - \mu)/s$ není příliš citlivé na eventuální odchylky výchozího zákona rozdělení od normálního. V tomto článku se budeme zabývat jinou odchylkou od Studentových předpokladů, spočívající v tom, že s^2 má poněkud složitější strukturu, a to

$$s^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j}{m_j} \chi_j^2(m_j) , \quad \lambda_j \geqq 0 , \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 , \tag{2}$$

kde λ_j jsou neznámé konstanty a $\chi_j^2(m_j)$ jsou nezávislé jak mezi sebou tak i na x. V důsledku aditivnosti nezávislých χ^2-veličin, (2) je totožné s (1), jakmile $m_1 + \ldots + m_k = m$ a $\lambda_j/m_j = 1/m$.

K odhadu (2) docházíme při zpracování k nezávislých výběrů, jejichž rozptyly se neznámým způsobem liší. V některých případech totiž postupujeme tak, že nejprve pro každý výběr vypočteme určitou statistiku x_j a odhad s_j^2 pro její rozptyl σ_j^2; potom položíme $x = x_1 + \ldots + x_k$ a v souhlase s tím

$$s^2 = s_1^2 + \ldots + s_k^2 \,. \tag{3}$$

Má-li každé s_j^2 strukturu (1) s m_j stupni volnosti t. j. $s_j^2 = \sigma_j^2 \frac{1}{m_j} \chi_j^2(m_j)$, pak s^2 má strukturu (2), přičemž $\lambda_j = \sigma_j^2/(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)$.[1])

Klasickým příkladem tohoto druhu je rozdíl $\bar{x} - \bar{y}$ dvou výběrových průměrů, jestliže x-ová pozorování mají jiný rozptyl než y-ová. Tímto problémem se zabýval R. A. Fisher v práci [1], kde podal fiduciální řešení, které vyvolalo dosud neukončenou polemiku. Fisherovo a pozdější Welchovo řešení [2] je založeno na zjištění, že pravděpodobnost nerovnosti $x - \mu < t\, s$, kde s má strukturu (2), lze učinit nezávislou na číslech λ_j tím způsobem, že i číslo t je náhodnou veličinou — určitou funkcí podílů $s_j^2/(s_1^2 + \ldots + s_k^2)$, kde s_j^2 jsou známé složky odhadu (3). U Fishera ovšem běží o fiduciální pravděpodobnost, kdežto u L. B. Welche o pravděpodobnost v obyčejném slova smyslu. Numericky se obě řešení příliš neliší; příslušné tabulky vypracované v [3] a [4] pro $k = 2$ mají tři vchody — pro m_1, m_2 a $s_1^2/(s_1^2 + s_2^2)$. Již pro $k = 3$ by muselo být vchodů pět, což není prakticky uskutečnitelné. Proto Welch navrhl přibližné řešení, při němž t se vyhledává ze Studentova rozdělení s náhodným počtem stupňů volnosti[2])

$$m' = \frac{(s_1^2 + \ldots + s_k^2)^2}{\sum_{j=1}^{k} s_j^4 / (m_j + 2)} - 2 \,, \tag{5}$$

který nazývá *efektivním* počtem stupňů volnosti. Welch v [5] numericky ukázal, že použití efektivního počtu stupňů volnosti dává dobré výsledky i při malých počtech stupňů volnosti.

V tomto článku se předpokládá struktura (2) a dokazuje se, že pravděpodobnost toho, že $(x - \mu)/s$ padne do určitého intervalu obsahujícího nulu,

---

[1]) Odhadu $s^2{}_1 + \ldots + s^2{}_k$ však používáme jenom tehdy, jestliže poměry λ_j skutečně neznáme. Známe-li je, pak lepší je odhad

$$s^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{s^2{}_j m_j}{\lambda_j m} = (\sigma^2{}_1 + \ldots + \sigma^2{}_k) \sum_{j=1}^{k} m_j \frac{s^2{}_j}{\sigma^2{}_j} \,, \tag{4}$$

který má strukturu (1) s $m = m_1 + \ldots + m_k$ stupni volnosti. Na druhé straně, jakmile poměry $\sigma^2{}_j/(\sigma^2{}_1 + \ldots + \sigma^2{}_k)$ patřičně neznáme, odhad (4) se může stát klamným, protože potom nemusí být ani nestranný.

[2]) *Welch* váhá mezi vzorcem (5) a jednodušším vzorcem $(s^2{}_1 + \ldots + s^2{}_k)^2/(\sum_{j=1}^{k} s^4{}_j/m_j)$. Pro nepříliš malá m_j, jak tomu bývá při biologických experimentech, jsou oba vzorce rovnocenné. Mám však na mysli také aplikace při oblastních variantách výběrových šetření, kde v případě, že v každé oblasti vybíráme jen 2 jednotky, dostáváme $m_j = 1$, a potom je patrně lepší (5). Odůvodnění vzorce (5) bude podáno v odstavci 4.

je při jakýchkoliv číslech λ_j menší, než obdobná pravděpodobnost pro Studentovo rozdělení s $m = m_1 + \ldots + m_k$ stupni volnosti,[3]) že však je vždy větší než pro Studentovo rozdělení s počtem stupňů volnosti nepřesahujícím žádné z čísel m_j/λ_j, na př. rovným nejmenšímu z čísel m_j. Tento výsledek je použitelný při testování nulové hypothesy, neboť v souhlase s ním tuto hypothesu je nutno zamítnout, je-li zamítána při počtu stupňů volnosti rovném nejmenšímu z čísel m_j, a není ji nutno zamítnout, není-li zamítána při $m = m_1 + \ldots$ $\ldots + m_k$ stupních volnosti; podobně se ho dá užít při sestrojování intervalů spolehlivosti. Je to také další argument pro používání efektivního počtu stupňů volnosti.

2. Sestrojení pomocných náhodných veličin α_j. V příštím odstavci budeme potřebovat náhodné veličiny α_j, které mají předepsané střední hodnoty

$$M\alpha_j = \lambda_j\,, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \lambda_j > 0\,, \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \tag{6}$$

a současně splňují podmínku, že při každé konkretní realisaci

$$\nu \text{ z veličin } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \text{ je rovno } \frac{1}{\nu} \text{ a ostatních } m - \nu \text{ je rovno } 0\,. \tag{7}$$

Jinak řečeno, náhodné veličiny α_j musí být náhodnou permutací m čísel, mezi nimiž ν je rovno $1/\nu$ a ostatních $m - \nu$ je rovno 0, při čemž pravděpodobnosti musí být jednotlivým permutacím přiřazeny tak, aby platilo (6). To zřejmě není možno učinit pro každá čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ a ν. Na př. z podmínky (7) bezprostředně vyplývá, že maximální hodnota každé veličiny α_j je rovna $1/\nu$, a ta nemůže být menší než její střední hodnota, t. j. musí platit

$$\lambda_j \leqq \frac{1}{\nu}\,, \qquad j = 1, \ldots, m\,. \tag{8}$$

Jak si však nyní ukážeme, podmínka (8) je nejen nutná, ale i postačující k tomu, aby hledané náhodné veličiny α_j existovaly.

Rozdělme si zprava otevřený interval $\langle 0, 1)$ na m zprava otevřených intervalů s délkami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, na př. na intervaly

$$\Delta_j = \langle \lambda_1 + \ldots + \lambda_{j-1}, \lambda_1 + \ldots + \lambda_j)\,, \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{9}$$

Potom každému bodu $\omega \in \left\langle 0, \frac{1}{\nu}\right)$ přiřaďme hodnoty veličin $\alpha_j = \alpha_j(\omega)$ tak, že

$$\begin{aligned} &\alpha_j = \frac{1}{\nu}\,, \text{ když některý z bodů } \omega, \omega + \frac{1}{\nu}, \ldots, \omega + \frac{\nu - 1}{\nu} \text{ padne do intervalu } \Delta_j, \text{ a} \\ &\alpha_j = 0 \text{ v opačném případě.} \end{aligned} \tag{10}$$

[3]) Odtud plyne, že v případě, kdy λ_j známe, je odhad (4) skutečně vždy lepší než odhad (3).

Každý z ν bodů $\omega, \omega + \frac{1}{\nu}, \ldots, \omega + \frac{\nu - 1}{\nu}$ padne do jiného intervalu Δ_j, protože v souhlase s předpokladem (8) jsou vzdálenosti těchto bodů větší nebo nanejvýš rovny délkám λ_j intervalů Δ_j. To však právě znamená, že pro každý bod $\omega \in \left\langle 0, \frac{1}{\nu}\right)$ je splněna podmínka (7).

Zbývá tedy ukázat, že bodům $\omega \in \left\langle 0, \frac{1}{\nu}\right)$ lze dát takové rozdělení pravděpodobností, aby platilo (6). Tomuto požadavku však zřejmě vyhovuje rovnoměrné rozdělení, při kterém pravděpodobnost jevu $\omega \in \Delta$ pro $\Delta \subset \left\langle 0, \frac{1}{\nu}\right)$ je rovna $\nu\, d(\Delta)$, kde $d(\Delta)$ značí délku intervalu Δ. Skutečně, potom pravděpodobnost toho, že určitý z bodů $\omega + \frac{h-1}{\nu}$ padne do daného intervalu Δ_j, bude rovna ν-násobku délky společné části tohoto intervalu s oborem náhodné veličiny $\omega + \frac{h-1}{\nu}$, t. j. s intervalem $\left\langle \frac{h-1}{\nu}, \frac{h}{\nu}\right)$; symbolicky

$$P\left(\omega + \frac{h-1}{\nu} \in \Delta_j\right) = \nu d\left\{\Delta_j \cap \left\langle \frac{h-1}{\nu}, \frac{h}{\nu}\right)\right\}.$$

Jevy $\omega + \frac{h-1}{\nu} \in \Delta_j$, $h = 1, 2, \ldots, \nu$, jak již bylo výše zjištěno, se vzájemně vylučují, a proto pravděpodobnost nastoupení aspoň jednoho z nich, t. . pravděpodobnost jevu $\alpha_j = \frac{1}{\nu}$, je rovna

$$P\left(\alpha_j = \frac{1}{\nu}\right) = \nu \sum_{h=1}^{\nu} d\left\{\Delta_j \cap \left\langle \frac{h-1}{\nu}, \frac{h}{\nu}\right)\right\} =$$
$$= \nu d\{\Delta_j \cap \langle 0, 1)\} = \nu d\{\Delta_j\} = \nu\lambda_j\,, \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

Odtud plyne, že $M\alpha_j = \frac{1}{\nu} P\left(\alpha_j = \frac{1}{\nu}\right) = \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, což bylo třeba dokázat.

3. Hlavní výsledek. Důkaz hlavní věty se bude opírat o Jensenovu nerovnost, kterou lze vyslovit takto: Je-li funkce reálné proměnné f konkávní v oboru hodnot, jichž může nabývat náhodná veličina y, a značí-li M střední hodnotu, pak[4])

$$Mf(y) \leqq f(My)\,. \tag{11}$$

[4]) Viz: *Littelwood, Hardy, Pólya*: „Inequalities", str. 111. Pro konvexní funkce platí nerovnost opačná.

V našem případě půjde o funkci

$$\Phi(t\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\,. \tag{12}$$

Jelikož její derivace $\frac{\partial}{\partial y} \Phi(t\sqrt{y}) = \frac{te^{-\frac{1}{2}t^2y}}{2\sqrt{2\pi y}}$ je pro libovolné $t > 0$ klesající funkcí y v oboru $0 < y < \infty$, je tato funkce konkávní v oboru $0 < y < \infty$. K tomuto oboru můžeme zřejmě přidat i bod $y = 0$, neboť $\Phi(t\sqrt{y})$ je v bodě $y = 0$ spojitá. V souhlase s Jensenovou nerovností lze tedy pro každou nezápornou náhodnou veličinu y psát

$$M\Phi(t\sqrt{y}) \leqq \Phi(t\sqrt{My})\,. \tag{13}$$

Nyní dokažme hlavní výsledek:

Nechť x je normálně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Pro rozptyl σ^2 mějme odhad s^2, který je nezávislý na x a má strukturu (2); *zvolme libovolné hranice $t' \leqq 0 \leqq t''$. Potom pravděpodobnost jevu*

$$t' < \frac{x - \mu}{s} < t''\,, \quad t' \leqq 0 \leqq t'' \tag{14}$$

leží v mezích

$$P_\nu \leqq P \leqq P_m\,, \tag{15}$$

kde P_m resp. P_ν je pravděpodobnost jevu (14) *za předpokladu, že $(x - \mu)/s$ má Studentovo rozdělení s m resp. s ν stupni volnosti, při čemž*

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k\,, \tag{16}$$

a za ν lze vzít libovolné celé číslo

$$\nu \leqq \min_{1 \leqq j \leqq k} \frac{m_j}{\lambda_j}\,, \tag{17}$$

na př.

$$\nu = \min_{1 \leqq j \leqq k} m_j\,. \tag{18}$$

Dříve než přikročíme k vlastnímu d ů k a z u, všimněme si následujících dvou zjednodušujících okolností. Za prvé, každou náhodnou veličinu $\chi_j^2(m_j)$ můžeme rozložit na součet m_j nezávislých chí-kvadrát veličin s jedním stupněm volnosti, a v souhlase s tím strukturu (2) přepsat do tvaru

$$s^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_j^2(1)\,, \quad m = m_1 + \ldots + m_k\,, \quad \lambda_j \geqq 0\,, \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1\,. \tag{19}$$

Tento tvar nám umožňuje pustit se zřetele čísla m_j a mít na paměti jen to, že konstantám λ_j v (19) odpovídají konstanty λ_j/m_j v (2). Za druhé, jelikož rozdělení poměru $(x - \mu)/s$ ať už s obyčejným či se zobecněným s^2 je symetrické kolem nuly,[5]) stačí nerovnosti (15) dokázat jen pro pravděpodobnosti jevu

$$0 < \frac{x - \mu}{s} < t \tag{20}$$

při libovolně zvoleném $t > 0$.

Podmíněné rozdělení $(x - \mu)/s$ při pevně zvoleném s^2 je normální $(0, s^2/\sigma^2)$, takže, používajíce definice (12), můžeme podmíněnou pravděpodobnost jevu (20) napsat ve tvaru $\Phi(t\sqrt{s^2/\sigma^2})$. To však znamená, že nepodmíněná pravděpodobnost jevu (20) je rovna

$$P\left(0 < \frac{x - \mu}{s} < t\right) = E\Phi(t\sqrt{s^2/\sigma^2})\,, \tag{21}$$

kde E značí střední hodnotu přes s^2. Hodnota pravděpodobnosti (21) závisí na tom či onom tvaru odhadu s^2. Má-li odhad s^2 strukturu (1), pak dostaneme pravděpodobnost

$$P_m = E\Phi\left(t\sqrt{\frac{1}{m}\chi^2(m)}\right) \tag{22}$$

odpovídající Studentovu rozdělení s m stupni volnosti, kdežto obecné struktuře (19) odpovídá pravděpodobnost

$$P = E\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\chi_j^2(1)}\right). \tag{23}$$

Jelikož náhodné veličiny $\chi_j^2(1)$ jsou nezávislé a mají totožný zákon rozdělení, hodnota P se nezmění, nahradíme-li konstanty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ libovolnou jejich permutací $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$:

$$P = E\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \beta_j\chi_j^2(1)}\right) \text{ pro libovolnou permutaci } \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \text{ čísel } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m.$$

Platí-li tato identita pro libovolnou permutaci, platí (ve smyslu střední hodnoty) i pro náhodně vybranou permutaci $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Necháme-li pravděpodobnosti jednotlivých permutací $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ zatím blíže neurčeny a vynahradíme-li si symbol E pro střední hodnotu přes $\chi_j^2(1)$ a symbol M pro střední hodnotu přes β_j, můžeme P napsat ve tvaru následujících iterovaných středních hodnot:

$$P = ME\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_j^2(1)}\right) = EM\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_j^2(1)}\right).$$

Použijeme-li na vnitřní střední hodnotu v posledním výraze Jensenovu nerovnost (13), dostáváme, že

$$P \leqq E\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(M\beta_j)\,\chi_j^2(1)}\right). \tag{24}$$

[5]) K symetrii kolem nuly stačí jen to, aby s^2 bylo nezávislé na x.

Nyní stačí dát každé permutaci $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ stejnou pravděpodobnost $1/m!$.

Pak zřejmě je $M\beta_j = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = \frac{1}{m}$, což dosazeno do (24) dává

$$P \leqq E\Phi\left(t\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\chi_j^2(1)}\right) = E\Phi\left(t\sqrt{\frac{1}{m}\chi^2(m)}\right) = P_m .$$

Tím je dokázána nerovnost $P \leqq P_m$. Nerovnost $P_\nu \leqq P$ dokážeme obdobně pomocí náhodných veličin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sestrojených v předešlém odstavci. V souhlase s (7) vždy ν z těchto veličin je rovno $1/\nu$ a $m - \nu$ je rovno 0, takže vždy $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\chi_j^2(1) = \frac{1}{\nu}\chi^2(\nu)$, a v důsledku toho pro každou realisaci náhodných veličin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ je $P_\nu = E\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\chi_j^2(1)}\right)$, kde P_ν označuje pravděpodobnost jevu (20) za předpokladu, že $(x - \mu)/s$ má Studentovo rozdělení s ν stupni volnosti. Provedeme-li znovu tentýž řetěz úvah jako prve, a vezmeme-li v patrnost, že v souhlase s (6) platí $M\alpha_j = \lambda_j$, dostáváme, že

$$P_\nu = ME\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\chi_j^2(1)}\right) = EM\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\chi_j^2(1)}\right) \leqq$$

$$\leqq E\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(M\alpha_j)\,\chi_j^2(1)}\right) = E\Phi\left(t\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\chi_j^2(1)}\right) = P .$$

Jedinou podmínkou pro existenci náhodných veličin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ s právě použitými vlastnostmi (6) a (7) bylo splnění nerovností (8). Tyto nerovnosti jsou však totožné s nerovností (17) neboť, jak již bylo řečeno, za λ_j ve vzorci (19) je nutno vzít λ_j/m_j ze vzorce (2). Tím je důkaz skončen.

Dokázanou větu by bylo možno vyslovit také tak, že zobecněné Studentovo rozdělení je méně koncentrováno kolem nuly než obyčejné Studentovo rozdělení s $m = m_1 + \dots + m_k$ stupni volnosti, avšak na druhé straně, že je koncentrovanější než obyčejné Studentovo rozdělení s $\min_{1 \leqq j \leqq k}\{m_j\}$ stupni volnosti. Obecně lze také říci, že rozdělení odpovídající konstantám $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ve struktuře (19) je koncentrovanější kolem nuly než rozdělení odpovídající jiným konstantám $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_m$, jakmile čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ lze vyjádřit jako střední hodnoty permutace čísel $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_m$, znáhodněné pomocí vhodných pravděpodobností.

4. Použití. Ukažme si nejdříve na několika příkladech, jak lze odvozený výsledek použít k testování nulové hypotesy. Přesněji řečeno, půjde o to, pomocí t-testu prověřit hypotesu, že určitá statistika, pro jejíž rozptyl máme odhad se strukturou (2), má danou (řekněme nulovou) střední hodnotu.

Příklad 1. Pomocí obvyklého t-testu byly porovnány dva nezávislé výběrové průměry, každý z 12-ti pozorování, a vyšlo

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} = 2{,}52 .$$

(Nulová hypotesa: $\bar{x} - \bar{y}$ má střední hodnotu 0; s_1^2 a s_2^2 jsou odhady rozptylů $\bar{x}$ a $\bar{y}$.) Jelikož se pracovalo na 5% hladině významnosti a s $12 + 12 - 2 = 22$ stupni volnosti, byla tato hodnota uznána za významnou, neboť je větší než příslušná kritická hodnota $t = 2{,}09$. Později se však vyskytla námitka, že rozptyly ve obou výběrech se nezdají být stejné. Jinými slovy, vzniklo podezření, že t se řídí nikoliv obyčejným, ale zobecněným Studentovým rozdělením. Jelikož však nejmenší z čísel $m_1 = m_2 = 11$ je rovno 11 a kritická hodnota pro 11 stupňů volnosti je rovna $t = 2{,}20$, což je stále menší než 2,52, musí být $t = 2{,}52$ uznáno významným bez ohledu na stejnost či nestejnost rozptylů.

Příklad 2. Mějme stejný případ jako v příkladu 1, jen s tím rozdílem, že vyšlo $t = 2{,}16$. Tato hodnota je sice významná při 22 stupních volnosti, avšak není významná při 11 stupních volnosti. Připusťme však, že se dá předpokládat, že žádný z rozptylů σ_1^2 a σ_2^2 není víc jak třikrát tak velký než druhý, t. j. že maximální z čísel $\lambda_j = \sigma_j^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, $j = 1, 2$, není větší než $\frac{3}{4}$. Potom však

$$\min_{j=1,2} \frac{m_j}{\lambda_j} \geqq 11 \frac{4}{3} > 14 ,$$

a proto v souhlase s podmínkou (17) můžeme použít kritickou hodnotu pro 14 stupňů volnosti $t = 2{,}14$, vzhledem k níž napozorovaná hodnota $t = 2{,}16$ zůstává významnou.

V předešlých dvou příkladech jsme se zabývali nejjednodušším případem, kdy $k = 2$, $m_1 = m_2$ a $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ a tedy i $\lambda_1 = \lambda_2$. Tento případ je pozoruhodný tím, že odhady (3) a (4) jsou totožné, takže případná mýlka v předpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ($\lambda_1 = \lambda_2$) nemá vliv na nestrannost s^2, ale pouze na to, že struktura (1) přejde ve strukturu (2). Použijeme-li však odhadu (4) v situaci, kde σ_j^2 resp. m_j se navzájem liší, pak mýlka v poměrech $\lambda_j = \sigma_j^2/(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)$ má komplikovanější následky. Odhad (4), jsou-li v něm čísla λ_j zvolena libovolně, lze napsat ve tvaru

$$s^2 = (\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2) \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_j^0}{m_j} \chi_j^2(m_j) , \quad \text{kde}$$

$$\lambda_j^0 = \frac{\sigma_j^2 m_j}{\lambda_j(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)\, m} , \quad j = 1, 2, \ldots, m .$$

Neplatí-li $\lambda_j = \sigma_j^2/(\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_k^2)$, pak nemusí platit ani $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^0 = 1$, t. j. odhad

(4) nejenže nemá strukturu (1), ale není ani nestranný. Jestliže $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^0 < 1$, pak střední hodnota s^2 je posunuta směrem k nule, a tudíž nejen počet stupňů volnosti, ale i sama hodnota t je nadceněna. Zde je tedy nebezpečí ukvapeného zamítnutí nulové hypotesy největší. Jestliže $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^0 > 1$, pak střední hodnota s^2 je posunuta vzhůru, a tedy zatím co počet stupňů volnosti je nadceněn, hodnoty t jsou podceněny. Z těchto důvodů, jakmile vzniknou pochybnosti o (alespoň přibližně) správné volbě čísel λ_j, je lépe od odhadu (4) upustit a použít odhadu (3).

Příklad 3. Z dvou nezávislých výběrů o 10 a 15 pozorováních byly vypočteny průměry $\bar{x} = 213$ a $\bar{y} = 155$ a odhady jejich rozptylů $s_1^2 = 526$ a $s_2^2 = 94$. Bylo předpokládáno, že jednotlivá pozorování v obou výběrech mají stejný rozptyl, takže rozptyly výběrových průměrů jsou nepřímo úměrné počtu pozorování, z nichž byly vypočteny, t. j. $\sigma_1^2 : \sigma_2^2 = 15 : 10$ a tedy $\lambda_1 = \frac{3}{5}$ a $\lambda_2 = \frac{2}{5}$. Podle vzorce (4) byl vypočten odhad rozptylu $s^2 = \frac{s_1^2 m_1}{\lambda_1 m} + \frac{s_2^2 m_2}{\lambda_2 m} = \frac{526 \,.\, 9}{\frac{3}{5} \,.\, 23} + \frac{94 \,.\, 14}{\frac{2}{5} \,.\, 23} = 486$ a potom

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s} = \frac{213 - 155}{\sqrt{486}} = 2{,}63\,.$$

Tato hodnota je na 5%-ní hladině a při 23 stupních volnosti jasně významná. Avšak přílišná rozdílnost s_1^2 a s_2^2 vyvolala pochybnosti o správnosti domněnky, že $\sigma_1^2 : \sigma_2^2 = 15 : 10$, a proto bylo rozhodnuto odhadnout rozptyl podle (3), t. j. vzít $s^2 = s_1^2 + s_2^2 = 526 + 94 = 620$ a $t = \frac{213 - 155}{\sqrt{620}} \doteq 2{,}33$. Tato hodnota je na 5%-ní hladině významná i tehdy, použijeme-li $9 = \min\,[9, 14]$ stupňů volnosti, neboť příslušný kritický bod je $t = 2{,}26$. Lze tedy rozdíl $\bar{x} - \bar{y}$ považovat za významně velký bez ohledu na případnou nestejnost rozptylů.

Příklad 4. Mějme tentýž případ jako v příkladu 3, jen s tím rozdílem, že $\bar{y} = 165$, takže prvně vypočtená hodnota $t = \frac{48}{\sqrt{486}} \doteq 2{,}18$, což je při 23 stupních volnosti stále ještě významné. Opravená hodnota však bude $t = \frac{48}{\sqrt{620}} \doteq 1{,}93$, což při 23 stupních volnosti významné není, a proto nelze nulovou hypotesu na 5%-ní hladině zamítnout.

Nalezené nerovnosti vnukají myšlenku aproximovat zobecněné Studentovo rozdělení obyčejným Studentovým rozdělením s vhodně zvoleným počtem stupňů volnosti. Volíme-li tento počet stupňů volnosti m' tak, že s^2 se struk-