Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

ZÁKLADNÍ VĚTY CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 12. března 1956.) DT:515.69

V článku je zobecněna základní věta centrální axonometrie, pocházející od E. KRUPPY a N. F. ČETVERUCHINA, dále je uvedena základní věta Stiefelova a konečně je odvozena věta 6, která umožňuje pohodlnou volbu průmětu souřadnicové konfigurace. V závěru je podán přehled o pracích, týkajících se základních vět centrální axonometrie.

Budeme vyšetřovat (reálný resp. komplexní) rozšířený eukleidovský prostor. Nejprve uvedeme několik definic.

Definice 1. Posloupnost bodů $O', A', B', C', A'_n, B'_n, C'_n$ nazveme souřadnicovou konfigurací, jestliže platí tyto podmínky: O', A', B', C', jsou navzájem různé vlastní body; úsečky $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ jsou navzájem kolmé a stejně dlouhé; A'_n, B'_n, resp. C'_n je nevlastní bod přímky $O'A'$, $O'B'$, resp. $O'C'$.

Definice 2. Posloupnost bodů $O, A, B, C, A_n, B_n, C_n$, ležících v téže vlastní rovině nazveme d-konfigurací, když každá trojice O, A, A_n; O, B, B_n; O, C, C_n obsahuje různé kolineární body a když přímky OA, OB, OC současně nesplývají. Nejsou-li (resp. jsou-li) body A_n, B_n, C_n kolineární, pak d-konfiguraci nazveme d_1-konfigurací (resp. d_2-konfigurací).

Dodatek k definici 2. Nejsou-li ani body A_n, B_n, C_n, ani body A, B, C kolineární, pak označme p osu perspektivity obou „trojúhelníků“[1]) ABC, $A_nB_nC_n$. (Tato osa perspektivity existuje podle věty Desarguesovy, užité na oba „trojúhelníky“ ABC, $A_nB_nC_n$, perspektivní podle středu O). Jsou-li body A, B, C dané d_1-konfigurace kolineární, pak označme p přímku, na níž tyto body leží. Nechť dále P je harmonický pól přímky p vzhledem k „trojúhelníku“ $A_nB_nC_n$. Pak označme k imaginární kuželosečku (elipsu nebo kružnici), která je jednoznačně určena polárním „trojúhelníkem“ $A_nB_nC_n$ a pólem P s polárou p. Není-li k kružnicí, pak označme a, b délky poloos elipsy $\bar{k}$, která reálně zastupuje k.

[1]) „Trojúhelníkem“ rozumíme trojici nekolineárních bodů (z nichž některý může být nevlastní).

Definice 3. Existuje-li bod S a souřadnicová konfigurace $(O', A', B', C', A'_n, B'_n, C'_n)$, promítající se z centra S do dané d-konfigurace $(O, A, B, C, A_n, B_n, C_n)$, — a to tak, že bod O je průmětem bodu O', bod A průmětem bodu A' atd., pak tuto danou d-konfiguraci prohlásíme za konfiguraci typu T (vzhledem k S).

Věta 1. a) *Každá d-konfigurace typu T vzhledem k vlastnímu bodu S je d_1-konfigurací.* b) *Každá d-konfigurace typu T vzhledem k nevlastnímu bodu S je d_2-konfigurací.* c) *Má-li d_2-konfigurace typ T vzhledem k bodu S, pak bod S je nevlastní.*

Důkaz. a) Průměty nevlastních bodů souřadnicové konfigurace z vlastního středu S do vlastní roviny π jsou body neležící na téže přímce.

b) Průměty nevlastních bodů souřadnicové konfigurace z nevlastního středu S do roviny π jsou nevlastní body; tyto průměty jsou tedy kolineární.

c) Důkaz plyne bezprostředně z tvrzení a).

Věta 2 (první základní věta). *Daná d_1-konfigurace je typu T právě tehdy, když kuželosečka k je imaginární kružnicí.*

Důkaz. 1. Nechť $(O', A', B', C', A'_n, B'_n, C'_n)$ je souřadnicová konfigurace, která se ze středu S promítá do roviny π do dané d_1-konfigurace $(O, A, B, C, A_n, B_n, C_n)$. Přitom platí vztahy $SA_n \perp SB_nC_n$, $SB_n \perp SA_nC_n$, $SC_n \perp SA_nB_n$. Dokážeme, že platí též $SP \perp Sp$. (Bod P a přímka p jsou definovány v dodatku k definici 2.) Proložme přímkou $O'C'$ rovinu $\gamma \perp A'B'$. Pak nevlastní přímka roviny γ promítá se do přímky C_nP. (Bodem O' veďme přímku $c_1 \parallel A'B'$ a přímku c_2 půlící úsečku $A'B'$. Přímky $c_1, c_2, c_3 = O'A'$, $c_4 = O'B'$ tvoří harmonickou čtveřinu; nevlastní body přímek c_1, c_2, c_3, c_4 promítají se tedy též do harmonické čtveřiny bodů $A_nB_n \cap p$, $A_nB_n \cap C_nP$, A_n, B_n. Tedy přímka C_nP je průmětem nevlastní přímky roviny γ.)

Obdobně určíme roviny α, β, jejichž nevlastní přímky promítají se do přímek A_nP, B_nP. Tedy bod P je průmětem nevlastního bodu přímky $m = \alpha \cap \beta \cap \gamma$. Poněvadž ale přímka p je průmětem nevlastní přímky roviny $A'B'C'$, plyne z relace $m \perp A'B'C'$ též relace $SP \perp Sp$.

Kuželosečka k je základní kuželosečkou polarity $\mathfrak{P}$ v rovině π; polarita $\mathfrak{P}$ promítá se z bodu S prostorovou polaritou $\mathfrak{P}'$. V polaritě $\mathfrak{P}'$ odpovídají přímkám SA_n, SB_n, SC_n, resp. SP roviny $SB_nC_n, SA_nC_n, SA_nB_n$, resp. Sp. Poněvadž platí $SA_n \perp SB_nC_n$, $SB_n \perp SA_nC_n$, $SC_n \perp SA_nB_n$, $SP \perp Sp$, je polarita $\mathfrak{P}'$ pravoúhlá, a tedy kuželosečka k je imaginární kružnicí.

2. Nechť pro danou d_1-konfiguraci $(O, A, B, C, A_n, B_n, C_n)$, ležící v rovině π, je kuželosečka k imaginární kružnicí. Zvolme jeden z Laguerrových bodů kružnice k, označme jej S a prohlašme jej za střed promítání do průmětny π. Rovinná polarita $\mathfrak{P}$ o základní kuželosečce k promítá se z bodu S pravoúhlou prostorovou polaritou $\mathfrak{P}'$. Bodu P odpovídá v polaritě $\mathfrak{P}$ přímka p, takže

přímce SP odpovídá v polaritě $\mathfrak{P}'$ rovina $Sp \perp SP$. Na přímce SO zvolme libovolný bod O' tak, aby byl vlastní a aby nesplýval s bodem S. Bodem O' veďme přímky $a \parallel SA_n$, $b \parallel Sb_n$, $c \parallel SC_n$; zřejmě přímky a, b, c jsou navzájem kolmé. Sestrojme body $A' = SA \cap a$, $B' = SB \cap b$, $C' = SC \cap c$. Body A', B', C' jsou vlastní. (Je-li ku př. bod A' nevlastní, pak $SA \parallel SA_n$, a tedy $A = A_n$, což odporuje definici d-konfigurace.)

($^+$) Přímka p je průmětem nevlastní přímky roviny $A'B'C'$; bod P je průmětem nevlastního bodu přímky m, jdoucí bodem O' kolmo k rovině $A'B'C'$.[2])

($^{++}$) Přímka C_nP je průmětem nevlastní přímky roviny γ, jdoucí přímkou $O'C'$ a půlící úsečku $A'B'$. (Body $A_nB_n \cap p$, $A_nB_n \cap C_nP$, A_n, B_n tvoří harmonickou čtveřinu; jsou to průměty promítacích přímek $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$, $\bar{c}_4$. Proložme bodem O' přímky $c_i \parallel \bar{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Pak platí tyto vztahy: $c_1 \parallel A'B'$, c_2 půlí úsečku $A'B'$, $c_3 = O'A'$, $c_4 = O'B'$. Poněvadž C_n je průmětem nevlastního bodu přímky $O'C'$, je tím tvrzení dokázáno.)

Obdobně bychom zavedli roviny α, resp. β a dokázali, že přímka A_nP je průmětem nevlastní přímky roviny α a že přímka B_nP je průmětem nevlastní přímky roviny β. Z tvrzení ($^+$), ($^{++}$) plyne relace $m = \alpha \cap \beta \cap \gamma$, a tedy trojúhelník $A'B'C'$ je rovnostranný. Tedy úsečky $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ jsou kolmé a mají touž délku, což bylo dokázat.

P o z n á m k a. V druhé části předchozího důkazu bylo možno bod O' volit kdekoliv na přímce SO s výjimkou bodu S a bodu nevlastního. Každé takové volbě bodu O' odpovídaly body A', B', C'; doplněním nevlastních bodů A'_n, B'_n, resp. C_n přímek $O'A'$, $O'B'$, resp. $O'C'$ získáme souřadnicovou konfiguraci $(O', A', B', C', A'_n, B'_n, C'_n)$. Označme $\mathfrak{M}$ množinu všech těchto souřadnicových konfigurací. Zřejmě každé dvě konfigurace z $\mathfrak{M}$ jsou homothetické podle středu S. Ke každému kladnému číslu c existují v $\mathfrak{M}$ dvě konfigurace, pro něž úsečka $O'A'$ má délku c.

Věta 3. *Nechť $\mathfrak{S}$ je souřadnicová konfigurace a nechť je dále dána d-konfigurace ϑ ležící v rovině ϱ. Pak lze sestrojit rovinu π, d-konfiguraci ϑ_π v rovině π, bod S* non $\in \pi$ *a lineární transformaci l mezi rovinami π, ϱ tak, že ϑ_π je průmětem konfigurace $\mathfrak{S}$ ze středu S a že $l(\vartheta_\pi) = \vartheta$.*

Věta 4 (druhá základní věta). *Ke každé d-konfiguraci ϑ v rovině ϱ lze sestrojit rovinu π, d-konfiguraci ϑ_π typu T v rovině π a lineární transformaci l mezi rovinami π, ϱ tak, že $l(\vartheta_\pi) = \vartheta$.*

D o k á ž e m e, že věty 3, 4 jsou ekvivalentní: Zřejmě z věty 3 plyne věta 4 Nechť nyní platí věta 4. Poněvadž ϑ_π je typu T, existuje pro ni množina $\mathfrak{M}$ určená podle poznámky za větou 2. V $\mathfrak{M}$ vybereme tu konfiguraci γ^*, která je shodná s konfigurací $\mathfrak{S}$ z věty 3. Existuje právě jedna lineární transformace L prostoru, pro niž platí $L(\mathfrak{S}^*) = \mathfrak{S}$. Konfigurace $L(\vartheta_\pi)$ je průmětem konfigurace

[2]) Důkaz je snadný.

$\mathfrak{S}$ a dále platí $lL^{-1}(L(\vartheta_\pi)) = \vartheta$. Věta 3 je tím dokázána (symboly l, ϑ_π, π ve větě 3 nahradíme ovšem symboly lL^{-1}, $L(\vartheta_\pi)$, $L(\pi)$).

Nyní dokážeme větu 4. Označme $(O, A, B, C, A_n, B_n, C_n)$ danou konfiguraci $\vartheta \subset \varrho$ a bez omezení obecnosti předpokládejme, že přímky OA, OB nesplývají. Zvolme libovolnou vlastní rovinu $\pi^\bullet$ a vyberme v ní kterýkoliv pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník $O^\bullet A^\bullet B^\bullet$ (s rameny $O^\bullet A^\bullet$, $O^\bullet B^\bullet$). Označme $A_n^\bullet B_n^\bullet$ nevlastní body přímek $O^\bullet A^\bullet$, resp. $O^\bullet B^\bullet$. Existuje právě jedna lineární transformace t mezi rovinami $\pi^\bullet$, ϱ, pro niž $t(A^\bullet) = A$, $t(B^\bullet) = B$, $t(A_n^\bullet) = A_n$, $t(B_n^\bullet) = B_n$; zřejmě jest též $t(O^\bullet) = O$. Označme ještě $C^+ = t^{-1}(C)$, $C_n^+ = t^{-1}(C_n)$. V transformaci t odpovídá tedy konfiguraci $\vartheta_{\pi^\bullet} = (O^\bullet, A^\bullet, B^\bullet, C^+, A_n^\bullet, B_n^\bullet, C_n^+)$ daná konfigurace ϑ.

Ukážeme, že $\vartheta_{\pi^\bullet}$ je typu T. Stanovme vlastní bod $C^\bullet \neq O^\bullet$ tak, aby $C^\bullet O^\bullet \perp \pi^\bullet$ a aby úsečky $O^\bullet C^\bullet$, $O^\bullet A^\bullet$ měly touž délku; bod $C^\bullet$ je určen dvojznačně. Dále označme $C_n^\bullet$ nevlastní bod přímky $O^\bullet C^\bullet$. Souřadnicová konfigurace $\mathfrak{S}^\bullet = (O^\bullet, A^\bullet, B^\bullet, C^\bullet, A_n^\bullet, B_n^\bullet, C_n^\bullet)$ promítá se z bodu $S = C^\bullet C^+ \cap C_n^\bullet C_n^+$ do konfigurace $\vartheta_{\pi^\bullet}$. Věta je dokázána (symboly l, π nahradíme ovšem symboly t, $\pi^\bullet$).

Věta 5. *Ke každé d_1-konfiguraci ϑ v rovině ϱ lze sestrojit rovinu π, d_1-konfiguraci ϑ_π typu T v rovině π a afinitu l*[3]*) mezi rovinami π, ϱ tak, že $l(\vartheta_\pi) = \vartheta$.*

Důkaz. Navážeme na důkaz věty 4. Je-li ve větě 4 konfigurace ϑ d_1-konfigurací, pak bod S (určený v důkazu věty 4) je podle věty 1 vlastním bodem. Je-li n_ϱ nevlastní přímka roviny ϱ, pak položme $n^+ = t^{-1}(n_\varrho)$. Zvolme libovolnou rovinu π tak, aby neprocházela bodem S a aby byla rovnoběžná s rovinou Sn^+. Promítáním ze středu S je mezi rovinami π, $\pi^\bullet$ zprostředkována lineární transformace h_π tak, že $h_\pi^{-1}(\vartheta_{\pi^\bullet}) = \vartheta_\pi$ je též průmětem konfigurace $\mathfrak{S}^\bullet$ ze středu S (do roviny π). Dále je $h^{-1}(n^+)$ nevlastní přímka n_π roviny π. Tedy v transformaci th_π odpovídá konfiguraci ϑ_π konfigurace ϑ a přímce n_π odpovídá přímka n_ϱ. Položíme-li $l = th_\pi$, je tím důkaz proveden.

Nechť A je afinita (v rovině π), v níž trojúhelníku o jednotkovém obsahu odpovídá trojúhelník o obsahu m; číslo m nazývá se modulem afinity A.

Pomocná věta. *Nechť k je reálná elipsa v rovině π, při čemž $a > b$ jsou délky jejích poloos. Pak existuje perspektivní afinita A_1, jejímž modulem je libovolné číslo z intervalu $\left\langle \frac{b}{a}, \frac{a}{b} \right\rangle$, perspektivní afinita A_2 o libovolné ose (resp. libovolném směru), kolmá afinita A_3 a elace A_4 tak, že $A_i^{-1}(k)$ je kružnice ($i = 1, 2, 3, 4$).*[4])

Věta 6. *Ke každé d_1-konfiguraci ϑ, která leží v rovině π a není typu T, existuje perspektivní afinita l v rovině π tak, že konfigurace $l^{-1}(\vartheta)$ je typu T; tato perspek-*

---

[3]) Afinitou rozumíme lineární transformaci mezi dvěma rovinami, která převádí nevlastní přímku jedné roviny v nevlastní přímku druhé roviny.

[4]) Elementární důkaz nebudeme uvádět.