Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O ZÁKLADNÍ VĚTĚ CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

LADISLAV DRS, Praha.

(Došlo dne 12. března 1956.) DT: 515.69

V článku je dokázána první fundamentální věta centrální axonometrie a jsou vyšetřeny některé konstruktivní důsledky, týkající se vhodné volby elementů určujících axonometrii.

Věty obsažené v této práci mají pro centrální axonometrii podobný význam jako věta Pohlkeova pro rovnoběžnou axonometrii. Z těchto vět jsou odvozeny konstrukce pro volbu elementů určujících centrální axonometrii. Úvahy jsou vázány na reálný, resp. komplexní eukleidovský prostor rozšířený o nevlastní rovinu.

1. V tomto odstavci bude dokázána základní věta centrální axonometrie. Předmětem našich úvah bude průmět pravoúhlé souřadnicové soustavy (O', A', B', C'), (kde platí $O'A' \perp O'B' \perp O'C' \perp O'A'$, $\overline{O'A'} = \overline{O'B'} = \overline{O'C'} \neq 0$[1])). Nevlastní body přímek $O'A', O'B', O'C'$ označíme A'_u, B'_u, C'_u. Průměty označíme stejným písmenem jako útvary v prostoru bez připojené čárky.

Definice 1a. Body $O, A, B, C, A_u, B_u, C_u$ ve vlastní rovině nazveme δ-konfigurací, když platí: I. $A \neq A_u$, $B \neq B_u$, $C \neq C_u$.

II. Přímky AA_u, BB_u, CC_u procházejí bodem O různým od ostatních šesti bodů.

III. Body A, B, C neleží současně na přímce.

IV. Body A_u, B_u, C_u neleží současně na přímce.

Definice 1b. Jsou-li v dané δ-konfiguraci body $O, A, B, C, A_u, B_u, C_u$ po řadě středovými průměty bodů $O', A', B', C', A'_u, B'_u, C'_u$ souřadnicové soustavy (O', A', B', C') z bodu S, nazveme ji δ-konfigurací typu S.

D o d a t e k k d e f i n i c i 1. Trojúhelníky[2]) ABC; $A_uB_uC_u$ jsou perspektivní (podle Desarguesovy věty). Osou perspektivy je přímka o.

---

[1]) Pruhem označujeme vzdálenost.

[2]) „Trojúhelník“ může mít jeden nebo dva nevlastní body.

Dále označíme H_u harmonický pól přímky o vzhledem k trojúhelníku $A_uB_uC_u$ a k_u kuželosečku určenou polárním trojúhelníkem $A_uB_uC_u$ a pólem H_u s polárou o.

Poznámka 1. Z definice 1b je patrný geometrický význam δ-konfigurace typu S. Definicí 1a vylučujeme některé průměty souřadnicové soustavy:

1. S neleží na žádné z přímek $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$. Kdyby na příklad platilo $S \in O'A'$, pak by splývaly body A, A_u.

2. S neleží v rovině $A'B'C'$. Kdyby $S \in (A'B'C')$, pak by průměty A, B, C ležely na přímce.

3. S není nevlastní. Kdyby byl nevlastní, ležely by body A_u, B_u, C_u na nevlastní přímce.

Případ, kdy neplatí 1, by bylo nutno vyšetřovati zvlášť, ale nemá praktický význam. Případy kdy neplatí 2, 3, vyšetřuje V. Havel v práci [4]. Splňuje-li konfigurace z definice 1a jen podmínky I, II, III, získáme d_1-konfiguraci, platí-li jen I, II, získáme d_2-konfiguraci definovanou v této práci [4].

Uveďme bez důkazu pomocnou větu a některé pojmy známé z projektivní geometrie.

Pomocná věta. *Polarita Π v rovině α se promítá ze středu S* non $\in \alpha$ *jako pravoúhlá prostorová polarita Π' tehdy a jen tehdy, když základní kuželosečka polarity je imaginární kružnice a když bod S je Laguerrův bod této kružnice.*

Pravoúhlá polarita Π' má za svou řídící kvadriku minimální kuželovou plochu. Průnik této plochy s rovinou α je imaginární kružnice, (reálný) vrchol kuželové plochy je od roviny α vzdálen o absolutní hodnotu poloměru této kružnice a promítá se kolmo do roviny α do jejího středu. Vrchol nazýváme Laguerrovým bodem této kružnice.

Nyní již můžeme vyslovit základní větu centrální axonometrie.

Věta 1. *δ-konfigurace je typu S právě tehdy, když kuželosečka k_u je imaginární kružnice.*

Důkaz. Nechť δ-konfigurace je centrálním průmětem souřadnicové soustavy $(O'; A', B', C')$ ze středu S. Máme dokázat, že k_u je imaginární kružnice. Přímka o je průmět nevlastní přímky roviny $A'B'C'$. Budiž T' těžiště rovnostranného trojúhelníka $A'B'C'$ (a zároveň tedy jeho orthocentrum). Je zřejmé, že průmět T bodu T' je harmonický pól přímky o vzhledem k trojúhelníku ABC a dále, že průmět T_u nevlastního bodu přímky $O'T'$ je harmonický pól přímky o vzhledem k trojúhelníku $A_uB_uC_u$, čili $T_u = H_u$. Uvažujme prostorovou polaritu Π', která vznikne promítnutím rovinné polarity Π o základní kuželosečce k_u z bodu S. Pak platí $SA_u \| O'A'$, $SB_u \| O'B'$, $SC_u \| O'C'$; tři páry polárně sdružených elementů SA_u, SB_uC_u; SB_u, SA_uC_u; SC_u, SA_uB_u jsou navzájem kolmé. Dále platí $SH_u \parallel O'T'$, $So \parallel A'B'C'$. Protože je $O'T' \perp$ $\perp A'B'C'$, je také $SH_u \perp So$ a v polaritě existuje čtvrtý pár kolmých polárně sdružených elementů. Polarita Π' je pravoúhlá a kuželosečka k_u je imaginární kružnice. Důkaz nutné podmínky je proveden.

Nechť pro danou δ-konfiguraci je kuželosečka k_u imaginární kružnicí. Máme dokázat, že konfiguraci lze pokládat za centrální průmět jisté souřadnicové soustavy (O', A', B', C'). Zvolme za střed promítání S Laguerrův bod kružnice k_u. Rovinná polarita Π přechází spojením s bodem S v pravoúhlou prostorovou polaritu Π'. Zvolme na přímce SO vlastní bod $O' \neq S$. Sestrojme přímky $O' \in x' \parallel SA_u$, $O' \in y' \parallel SB_u$, $O' \in z' \parallel SC_u$. Ty jsou navzájem kolmé, neboť páry A_u, B_uC_u; B_u, A_uC_u; C_u, A_uB_u jsou sdružené v polaritě Π. Budiž $A' = x' \cap SA$, $B' = y' \cap SB$, $C' = z' \cap SC$. Zbývá dokázat rovnice $\overline{O'A'} = \overline{O'B'} = \overline{O'C'} \neq 0$. Nechť je H harmonický pól přímky o k trojúhelníku ABC. Pak je H_u průmět nevlastního bodu přímky $O'H'$, to jest $O'H' \parallel S'H_u$ a $H' = O'H \cap A'B'C'$ je těžištěm trojúhelníka $A'B'C'$. Přímka H_uC_u (průmět nevlastní přímky roviny $O'H'C'$) a průmět $o \cap AB = o \cap A_uB_u$ nevlastního bodu přímky $A'B'$ jsou polárně sdružené v Π, neboť k bodu H_u je polárně sdružena přímka o a k bodu C_u přímka A_uB_u. Proto platí $C'H' \perp A'B'$ a podobně $A'H' \perp B'C'$, $B'H' \perp A'C'$. Bod H' je tedy zároveň průsečíkem výšek a proto $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'} \neq 0$ (nerovnost platí proto, že body A, B, C jsou různé). Z těchto rovnic a ze vzájemné kolmosti přímek $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ již plyne $\overline{O'A'} = \overline{O'B'} = \overline{O'C'} \neq 0$. Důkaz postačitelné podmínky je proveden a věta 1 je tím dokázána.

Poznámka 2. Tuto větu dokázal E. KRUPPA v práci [5]. Jeho důkaz zjednodušil N. M. BESKIN [2]. S ním se důkaz zde provedený v podstatě shoduje.

2. Vyšetříme podmínky, které splňuje pár o, H_u v δ-konfiguraci typu S.

Úmluva. Místo imaginární kružnice k_u budeme dále uvažovat kružnici k, která kružnici k_u reálně zastupuje (t. j. kružnici, pro niž je trojúhelník $A_uB_uC_u$ antipolárním). Podle věty 1 je v δ-konfiguraci typu S pár o, H_u vzhledem ke kružnici k antipolárně sdružen.

Dále vyjádříme podrobněji podmínky nutné k tomu, aby daná δ-konfigurace mohla být typu S.

a) Nechť body A_u, B_u, C_u dané δ-konfigurace v rovině α, (o které chceme zjistit, je-li typu S) jsou vlastní. Pak musí být: 1a) trojúhelník $A_uB_uC_u$ ostroúhlý (je průnikem pravoúhlého trojhranu SA_u, SB_u, SC_u s rovinou α).

Nechť kružnice k má poloměr r a střed S^0 (S^0 je orthocentrum trojúhelníka $A_uB_uC_u$; označíme-li V průsečík jeho výšky z bodu A_u se stranou B_uC_u, je $r = \sqrt{\overline{S^0A_u} \cdot \overline{S^0V}}$). Sestrojme $H_u \in n \perp o$, $n \cap o = N$. Jsou-li o, H_u antipolárně sdružené, pak platí: 2a) $S^0 \in n$, 3a) $\sqrt{\overline{S^0N} \cdot \overline{S^0H_u}} = r$.

b) Jsou-li v dané δ-konfiguraci body A_u, B_u vlastní a bod C_u nevlastní, pak: 1b) směr určující bod C_u musí být kolmý k přímce A_uB_u, 2b) $S^0 \in A_uB_u$.

Sestrojme body N, S^0 podle vztahů $H_u \in n \perp O$, $n \cap O = N$, $n \cap A_uB_u =$ $= S^0$. Páry N_u, o; A_u, B_uC_u; B_u, A_uC_u jsou pak antipolárně sdružené ke kružnici k se středem S^0 a poloměrem $r = \sqrt{\overline{S^0N} \cdot \overline{S^0H_u}}$, platí-li rovnice: 3b) $\overline{S^0N} \cdot \overline{S^0H_u} = \overline{S^0A_u} \cdot \overline{S^0B_u}$.

c) Jsou-li v dané δ-konfiguraci body B_uC_u nevlastní, je nutné, aby: 1c) $A_uB_u \perp A_uC_u$. 2c) $S^0 = A_u$.

Sestrojíme přímku $H_u \in n \perp o$. Aby pár H_u, o byl antipolárně sdružen vzhledem ke kružnici k, musí platit: 3c) $S^0 \in n$.

Podmínky 1, 2, 3 jsou v případech a, b, c nutné a postačující k tomu, aby daná δ-konfigurace byla typu S.

Zformulujeme větu 1 ještě jinak.

Věta 2. *Nechť je v rovině α dána kružnice k a její antipolární trojúhelník $A_uB_uC_u$. Budiž $H_u \in \alpha$ libovolný bod, h s ním harmonicky sdružená přímka vzhledem k trojúhelníku $A_uB_uC_u$ a přímka a antipolára bodu H_u vzhledem ke kružnici k. Potom je δ konfigurace v rovině α typu S, právě když existuje bod $H_u \in \alpha$ takový, že platí $h = a = o$.*

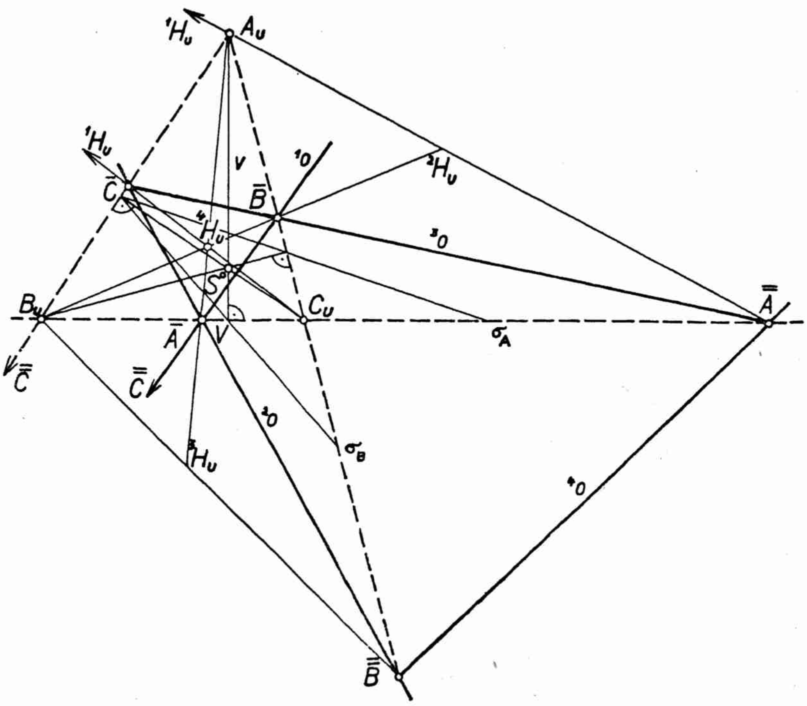
Věta 2. je ekvivalentní s větou 1.

3. Uvedeme konstrukci přímky o a δ-konfigurace typu S.

a) Nechť žádná strana antipolárního trojúhelníka $A_uB_uC_u$ kružnice k neprochází jejím středem S^0. Body A_u, B_u, C_u jsou vlastní. Antipoláry bodů přímky $p \in A_u$ tvoří svazek, jehož střed ${}^pI_a$ leží na antipoláře B_uC_u bodu A_u vzhledem ke kružnici k, je tedy společným bodem antipoláry bodu ${}^pI = p \cap$ $\cap B_uC_u$ a přímky B_uC_u. Páry ${}^pI, {}^pI_a$, tvoří (vzhledem k proměnné přímce $p \ni A_u$) involuci J_a na přímce B_uC_u. Harmonické poláry bodů přímky p vzhledem k trojúhelníku $A_uB_uC_u$ tvoří svazek se středem ${}^pI_h \in B_uC_u$, při čemž platí $({}^pI, {}^pI_h, B_u, C_u) = -1$. Dvojice ${}^pI, {}^pI_h$ vytvářejí (při proměnné přímce $p \in A_u$) involuci J_h na přímce B_uC_u. Proto též dvojice ${}^pI_a, {}^pI_h$ tvoří involuci, kterou označíme J. Sestrojme přímku v a bod V podle vztahů $A_u \in v \perp B_uC_u$, $v \cap B_uC_u = V$ (obr. 1).

Bodu V odpovídá v involuci J_a nevlastní bod přímky B_uC_u, takže pro střed σ_A involuce J platí relace $(V, \sigma_A, B_u, C_u) = -1$. Body B, C, tvoří zajisté pár involuce J, jejíž mocnost je tedy $\overline{\sigma_AB_u} \cdot \overline{\sigma_AC_u}$ a lze sestrojit samodružné body $\bar{A}$, $\bar{\bar{A}}$ této involuce (podle rovnic $\overline{\sigma_A\bar{A}} = \overline{\bar{\bar{A}}\sigma_A} = \sqrt{\overline{\sigma_AB_u} \cdot \overline{\sigma_AC_u}}$). Protože antipolární trojúhelník kružnice k je ostroúhlý, leží V uvnitř úsečky $\overline{B_uC_u}$ a bod σ_A vně této úsečky. Involuce J je hyperbolická a samodružné body $\bar{A}$, $\bar{\bar{A}}$ jsou tudíž reálné. Antipoláry bodů přímky $A_u\bar{A}(A_u\bar{\bar{A}})$ procházejí bodem $\bar{\bar{A}}$ $(\bar{A})$ a týmž bodem jdou i harmonické poláry bodů přímky $A_u\bar{A}$ $(A_u\bar{\bar{A}})$. Existuje-li tedy hledaná přímka o, pak je to některá z přímek svazku se středem $\bar{A}$ $(\bar{\bar{A}})$.

Obdobným způsobem určíme body $\bar{B}$, $\bar{\bar{B}}$ na přímce A_uC_u. Přímky $\bar{A}\bar{B}$, $\bar{A}\bar{\bar{B}}$, $\bar{\bar{A}}\bar{B}$, resp. $\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}$ poskytují čtyři alternativy pro hledanou přímku o. Bod H_u ke každé příslušející je určen vztahem $A_u\bar{\bar{A}} \cap B_u\bar{\bar{B}}$, $A_u\bar{\bar{A}} \cap B_u\bar{B}$, $A_u\bar{A} \cap B_u\bar{\bar{B}}$, resp. $A_u\bar{\bar{A}} \cap B_u\bar{\bar{B}}$.

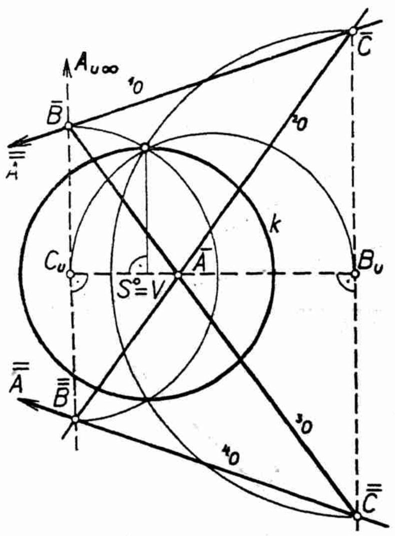


Obr. 1.

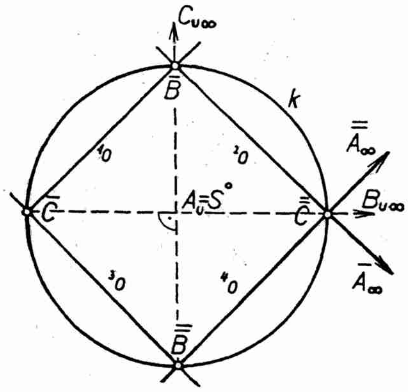
Podobně sestrojené body $\bar{C}$, $\bar{\bar{C}}$ leží na přímkách o. Důkaz plyne na příklad z harmonických vlastností čtyřrohu $\bar{A}\bar{\bar{A}}\bar{B}\bar{\bar{B}}$, jehož diagonální trojúhelník jest $A_uB_uC_u$.

Abychom získali δ-konfiguraci typu S, zvolíme tedy kromě trojúhelníka $A_uB_uC_u$ body O, A tak, aby platilo $A_u \in OA$, $O \neq A \neq A_u \neq O$. Konstrukce zbývajících bodů B, C je již zřejmá.

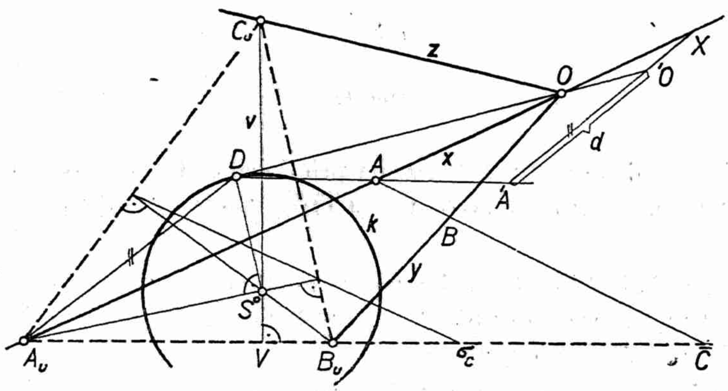
b) Nechť jedna strana (na př. B_uC_u) antipolárního trojúhelníka $A_uB_uC_u$ dané kružnice k prochází jejím středem S^0 (obr. 2). Pak A_u je nevlastní bod přímky kolmé k přímce B_uC_u. Samodružné body $\bar{A}$, $\bar{\bar{A}}$ involuce J na přímce B_uC_u sestrojíme stejně jako v a). Bod V splývá s bodem S^0. Na přímce A_uB_u (A_uC_u) je středem involuce J bod B_u (C_u) a konstrukce samodružných bodů $\bar{C}$, $\bar{\bar{C}}$ ($\bar{B}$, $\bar{\bar{B}}$) se zjednoduší: $\overline{B_u\bar{C}} = \overline{\bar{\bar{C}}B_u} = \overline{B_uS}$ ($\overline{C_u\bar{\bar{B}}} = \overline{\bar{\bar{B}}C_u} = \overline{C_uS}$). Podle konstrukce totiž platí $S\bar{C} \perp S\bar{\bar{C}}$ $(S\bar{B} \perp S\bar{\bar{B}})$; je tedy $\bar{C}$, $\bar{\bar{C}}$ $(\bar{B}, \bar{\bar{B}})$ pár odpovídajících si bodů involuce J_a a dále je $\overline{B_u\bar{C}} = \overline{\bar{\bar{C}}B_u}$, $(\overline{C_u\bar{B}} = \overline{C_u\bar{\bar{B}}})$, takže pár $\bar{C}$, $\bar{\bar{C}}$ $(\bar{B}, \bar{\bar{B}})$ je párem bodů involuce J_h. Přímky o jsou tím stanoveny a δ-konfiguraci typu S lze po volbě bodů O, A (s vlastnostmi jako v a)) snadno doplnit i zbývajícími body B, C.



Obr. 2.



Obr. 3.

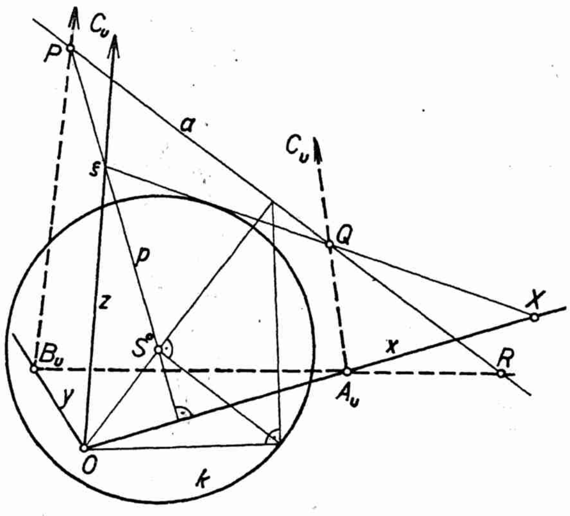


Obr. 4.

c) Nechť je dána kružnice k a nechť jeden bod antipolárního trojúhelníka $A_uB_uC_u$, na příklad bod A_u, splývá se středem S^0 kružnice k (obr. 3). Pak body B_u, C_u jsou nevlastní body k sobě kolmých průměrů kružnice k. Samodružné body $\bar{B}$, $\bar{\bar{B}}$ $(\bar{C}, \bar{\bar{C}})$ na přímce A_uC_u (A_uB_u) jsou průsečíky přímky A_uC_u (A_uB_u)

s kružnicí k a určují čtyři přímky, jejichž nevlastní body jsou $\overline{A}$, $\overline{\overline{A}}$. Doplnění δ-konfigurace typu S (když jsme zvolili body O, A jako v a)) nečiní již obtíže.

Poznámka 3. Je-li známa délka úsečky $\overline{O'A'} = d$, lze ještě sestrojit stopníky X, Y, Z přímek $x' = O'A'$, $y' = O'B'$, $z' = O'C'$ podle pravidel centrálního promítání a tím určiti též souřadnicovou soustavu (O', A', B', C') (obr. 4). Sestrojíme dělicí bod D přímky x ($D \in k$, $DS^0 \perp A_uS^0$) a na přímkách DA, DO najdeme body $'A$, $'O$, pro něž platí relace $'A'O \parallel DA_u$, $\overline{'A'O} = d$. Pro bod X pak platí: $X = 'A'O \cap A_uO$. Pro body Y, Z pak platí: $XY \parallel A_uB_u$, $XZ \parallel A_uC_u$ ($YZ \parallel B_uC_u$).



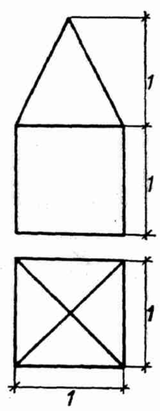
Obr. 5.

4. Vyřešíme některé úlohy centrální axonometrie.

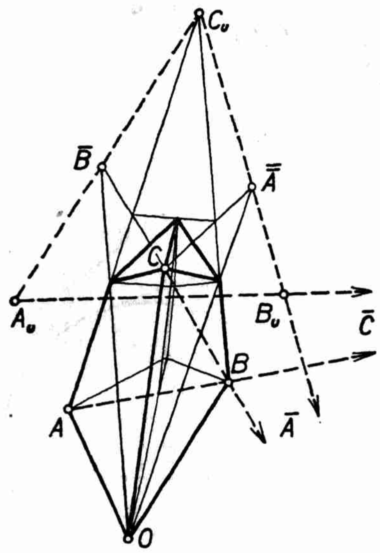
Příklad 1. V rovině α zvolme současně nesplývající přímky x, y, z jdoucí týmž bodem O, na přímkách x, y ($x \neq y$) zvolme po dvou bodech A, A_u, resp. B, B_u tak, že body O, A, A_u; O, B, B_u jsou od sebe různé a body A_u, B_u jsou vlastní. Jest nalézti body $C \in z$, $C_u \in z$ tak, aby vznikla δ-konfigurace typu S (obr. 4).

Řešení. Označme $AB \cap A_uB_u = \overline{C}$ a stanovme $\overline{\overline{C}}$ podle vztahu $(\overline{C}, \overline{\overline{C}}, A_u, B_u) = -1$ (na obr. 4 není sestrojen). Body $\overline{C}$, $\overline{\overline{C}}$ jsou samodružné body involuce J na přímce A_uB_u; střed σ_c úsečky $\overline{\overline{C}\,\overline{\overline{C}}}$ je středem involuce J; bod V určený podle vztahu $(\sigma_c, V, A_u, B_u) = -1$ je patou kolmice, vedené bodem C_u k přímce A_uB_u. Je-li bod C_u vlastní, je kružnice k určena antipolárním trojúhelníkem $A_uB_uC_u$. Je-li C_u nevlastní, je $S^0 \in A_uB_u$ a pár A_u, B_u antipolární vzhledem ke kružnici k. Lze tedy určit střed promítání S a bod $C \in z$ buď podle pravidel centrálního promítání (z rovnic $\overline{O'C'} = \overline{O'A'} = \overline{O'B'}$), nebo na základě perspektivity trojúhelníků ABC, $A_uB_uC_u$ vzhledem k ose o.

Příklad 2. V rovině α jsou dány různé přímky x, y, z, jdoucí bodem O a kružnice k o středu S^0 ($S^0 \neq O$). Sestrojit body $A \in x$, $A_u \in x$, $B \in y$, $B_u \in y$, $C \in z$, $C_u \in z$ takové, aby δ-konfigurace $(O, A, B, C, A_u, B_u, C_u)$ byla typu S (obr. 5).



Obr. 6.



Obr. 7.

Řešení. Protože je trojúhelník $A_uB_uC_u$ vzhledem ke k antipolární, procházejí jeho strany antipóly P, Q, R přímek x, y, z ke kružnici k. Tyto body leží na antipoláře a bodu O. Zvolíme-li libovolný bod $'X \in x$ a sestrojíme jeho antipoláru $p \ni P$ ke kružnici k a body $\zeta = z \cap p$, $X = x \cap \zeta Q$, pak páry $'X$, X tvoří na přímce x involuci J, jejíž každý samodružný bod je hledaným bodem A_u. Párem involuce J je O, $(a \cap x)$. Je-li $'X$ nevlastní bod přímky x, pak $p = PS^0 \perp x$ a přímka ζQ ($\zeta = z \cap p$) protne přímku x ve středu X involuce J. Má-li být úloha řešitelná, musí být J hyperbolická, t. j. osa z uvnitř úhlu POQ. Hledané body ${}^1A_u$, ${}^2A_u$ sestrojíme podle rovnic $\overline{X{}^1A_u} = \overline{{}^2A_uX} = \sqrt{\overline{X(o \cap x)}\,.\,\overline{XO}}$. Stejně bychom sestrojili body $B_u \in y$, $C_u \in z$. Zvolíme-li dále libovolný bod $A \in x$ a sestrojíme-li osu o a body $B \in y$, $C \in z$ tak, aby trojúhelníky ABC, $A_uB_uC_u$ byly perspektivní pro osu o, sestrojili jsme δ-konfiguraci typu S. Tuto úlohu řešil N. F. Četveruchin [3]. Jeho řešení je zde zjednodušeno.

Příklad 3. Sestrojit centrální axonometrii tělesa daného podle obr. 6. a) Zvolíme vlastní body A_u, B_u, C_u, O, A a podle odst. 3a) sestrojíme body