Poznámka 1. Předpoklad, že všechna c_k ($k = 2, 3, \ldots$) jsou konstantní, je podstatný, neboť jsou-li některá c_k funkcí času t (byť i libovolně malá), může být stabilita pohybu porušena. Na př. rovnice $\dot{z} = iz + \varepsilon e^{-it} z^2$ má řešení $z = z_0 e^{it}(1 + \varepsilon z_0 t)^{-1}$ a triviální řešení je zřejmě nestabilní, ať zvolíme $|\varepsilon|$ jakkoli malé.

Vraťme se nyní k soustavě (5.1). Nyní již můžeme vyslovit větu:

Věta 5.1. *Triviální řešení soustavy* (5.1) *je stabilní.*

Důkaz plyne okamžitě z té okolnosti, že problém stability rovnice (5.2) se řeší konečným počtem členů — totiž prvním — a jsou tedy zřejmě splněny všechny podmínky lemmatu 3.2, z něhož tvrzení věty okamžitě plyne.

Poznámka 2. Případ jednoho ryze imaginárního kořenu je tedy „kritický" pouze v tom smyslu, že o stabilitě triviálního řešení nedovedeme rozhodnout na základě známých vět teorie prvého přiblížení, a nikoliv v tom smyslu, jak o „kritických" případech zpravidla mluvíme v reálném oboru, že bychom totiž vhodnou volbou nelineárních členů mohli dosáhnout podle libosti jak stability tak nestability.

LITERATURA

[1] *E. T. Frommer:* Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen, Math. Annalen *99* (1928), 222—272.

[2] *А. М. Ляпунов:* Общая задача об устойчивосто движения, 1892.

[3] *А. И. Лурье:* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Москва 1951.

[4] *И. Г. Малкин:* Теория устойчивости движения, Москва 1952.

[5] *В. В. Немыцкий-В. В. Степанов:* Качественная теория дифференциальных уравнений, Москва 1949.

[6] *O. Perron:* Ueber Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen, Math. Zeitschrift *29* (1929), 129—160.

[7] *O. Perron:* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, Math. Zeitschrift *32* (1930), 703—728.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

ОТТО ВЕЙВОДА (Otto Vejvoda), Прага.

(Поступило в редакцию 9/I 1956 г.)

В работе исследуется устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений (0.1), где z_j — комплексные функции действительного переменного, c_{jk} — комплексные постоянные и функции

$Z_j(t, z_1, \ldots, z_n)$ удовлетворяют определенным предположениям, которые будут указаны в дальнейшем.

В § 1 введены фундаментальные определения и общие теоремы об устойчивости прямого метода Ляпунова, очень схожие с соответствующими определениями и теоремами, хорошо знакомыми из действительной области.

В § 2 доказываются теоремы первого приближения для системы (0.1), причем функции Z_j подчинены следующим условиям: а) Z_j определены и непрерывны в области $\|z\| \leqq H$, $t \geqq 0$, б) $\lim\limits_{\|z\| \to 0} \dfrac{Z_j}{\|z\|} = 0$ равномерно относительно t. Эти теоремы при тех же самых предположениях были доказаны Перроном с помощью теорем о непрерывной зависимости решений от начальных значений и от правых частей уравнений. В настоящей работе они доказываются прямым методом Ляпунова, дающим лучшую возможность оценить область асимптотической устойчивости, чем метод Перрона.

Для теорем устойчивости по первому приближению являются основными две леммы:

Лемма 2.2. *Уравнение* (2.3) *имеет по крайней мере одно решение типа* (*). *Все собственные значения* λ_m *этого уравнения для решений типа* (*) *даются выражениями* $\lambda_m = \varrho_j + \bar{\varrho}_k$ $(m = 1, 2, \ldots, n^2;\ j,\ k = 1, 2, \ldots, n)$, *где* ϱ_j — *корни характеристического уравнения* (2.4).

Лемма 2.3. *Если* $\varrho_j + \bar{\varrho}_k \neq 0$ *для всех* $j,\ k = 1, 2, \ldots, n$, *то для произвольной формы* U *типа* (*) *существует одно и только одно решение уравнения* (2.7). *Это решение будет формой Эрмита, если* U — *форма Эрмита.*

Тогда в случае, когда характеристическое уравнение (2.4) имеет а) только корни с отрицательными действительными частями, б) по крайней мере один корень с положительной действительной частью, то получим теорему об а) асимптотической устойчивости, б) неустойчивости тривиального решения, аналогичные соответствующим теоремам в действительной области. Функции Ляпунова, использованные для доказательства этих теорем, возможно всегда выбрать как формы Эрмита.

В случае, когда характеристическое уравнение (2.4) имеет по крайней мере один корень с действительной частью, равной 0, и не имеет ни одного корня с положительной действительной частью, мы не умеем построить функции Ляпунова и по этому должны воспользоваться другими методами, чтобы обнаружить, устойчиво ли тривиальное решение или нет. Эти случаи мы называем критическими.

В § 4 и 5 из этих критических случаев рассматриваются самые простые, а то при условии что Z_j — голоморфные функции от переменных, начинающиеся в своих разложениях с членов не ниже второго порядка и не зависящие от t.