Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

STABILITA INTEGRÁLŮ SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC V KOMPLEXNÍM OBORU

OTTO VEJVODA, Praha.

(Došlo dne 9. ledna 1956.) DT: 517.925

V práci je vyšetřována stabilita triviálního integrálu soustavy n diferenciálních rovnic prvého řádu, v nichž závisle proměnné jsou komplexními funkcemi reálné proměnné t. V teorii prvého přiblížení se dokazuje, že v nekritických případech lze ljapunovské funkce, které dovolují rozhodnout o stabilitě, sestrojit jako hermitovské formy. Z kritických případů je pro autonomní soustavu úplně vyšetřen případ jednoho nulového a případ jednoho ryze imaginárního kořenu charakteristické rovnice.

0. Úvod

V této práci vyšetřuji stabilitu triviálního řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}z_j}{\mathrm{d}t} = \dot{z}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} z_k + Z_j(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{0.1}$$

kde z_j jsou komplexní funkce reálné proměnné t, c_{jk} jsou komplexní konstanty a komplexní funkce Z_j vždy vyhovují podmínkám (P):

α) Z_j jsou definovány a jsou spojité v oboru D: $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_j \leqq H^2\,(H > 0)$, $t \geqq 0$;

β) $\lim\limits_{\|z\| \to 0} \dfrac{Z_j}{\|z\|} = 0$ stejnoměrně vzhledem k t v D (P)

(odtud již plyne, že $Z_j(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0$).

Stabilitu triviálního řešení chápu v Ljapunovově smyslu a to zcela obdobně jak je definována pro reálné soustavy (viz def. 1.1).

Stabilita triviálního řešení soustavy (0.1) byla studována velmi důkladně LJAPUNOVEM, POINCARÉM a mnoha dalšími autory za předpokladu, že všechny veličiny v soustavě (0.1) jsou reálné. Přes to, že již Ljapunov a pak i jiní při vyšetřování některých speciálních („kritických") případů přecházeli k soustavám, v nichž závisle proměnné byly komplexními funkcemi reálné (nebo někdy též komplexní) proměnné t, mělo zavedení komplexních proměnných vždy pouze pomocný nebo formální charakter. U takových soustav nebylo také používáno druhé Ljapunovovy metody. Teprve v poslední době užil 2. Ljapunovovy metody LURJE [3] při vyšetřování některých speciálních případů soustavy (0.1) vyskytujících se v teorii automatické regulace, v nichž některé proměnné jsou reálné a některé po dvou komplexně sdružené. Lurje však nevyslovuje žádných obecných vět o takových soustavách.

Jako prvý se soustavou (0.1) s komplexními proměnnými soustavně zabýval PERRON ve své práci [6]. Ten pro soustavu (0.1) odvodil některé věty prvého přiblížení, t. j. věty, které dovolují o stabilitě triviálního řešení soustavy (0.1) rozhodnout na základě linearisované soustavy

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} z_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n) . \tag{0.2}$$

I u Perrona se však objevují komplexní funkce celkem náhodně a to proto, že při jeho metodě, totiž při užití vět o závislosti integrálů na počátečních podmínkách a pravých stranách rovnic, se úvahy v reálném a komplexním oboru od sebe v podstatě neliší. Perronovi šlo především o to, aby dokázal věty prvého přiblížení za co nejobecnějších předpokladů o funkcích Z_j. Také kritickými případy se vůbec nezabývá.

Cílem této práce je

1. Odvodit znovu věty z teorie prvého přiblížení (při těchže předpokladech, jaké činí Perron), a to pomocí druhé Ljapunovovy metody. To považuji za účelné proto, že některé úlohy z mechaniky jsou formulovány přirozeným způsobem pomocí komplexních proměnných a druhá Ljapunovova metoda v některých případech umožňuje dosti pohodlně určit jistou část oblasti asymptotické stability, což je pro praxi velmi závažná otázka.

2. Vyšetřit některé kritické případy, t. j. případy, kdy o stabilitě či nestabilitě triviálního řešení nemůžeme rozhodnout na základě vět prvého přiblížení. To nastane obdobně jako v reálném případě tehdy, jestliže charakteristická rovnice

$$|c_{jk} - \varrho\delta_{jk}| = |C - \varrho E| = 0 \tag{0.3}$$

má alespoň jeden kořen s nulovou reálnou částí a nemá žádný kořen s kladnou reálnou částí. V této práci vyšetřuji případ a) jednoho nulového kořenu, b) jednoho ryze imaginárního kořenu (v některém z dalších čísel tohoto časopisu uveřejním článek o případu dvou ryze imaginárních kořenů). V těchto případech předpokládám, že Z_j jsou holomorfní funkce proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nezávislé na t, začínající členy alespoň druhého stupně (stručně budeme říkat, že Z_j jsou třídy H_2 a značit $Z_j \in H_2$).

Všude v dalším předpokládáme, že čtenář je v podstatě seznámen s příslušnou teorií v reálném oboru, takže tam, kde úvahy jsou v obou oborech obdobné, uvádím je pouze ve stručné formě.

1. Základní definice a pomocné věty

Definice 1.1. *Budiž dána soustava*

$$\dot{z}_j = Z_j(t, z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{1.1}$$

kde Z_j splňují podmínky a) $Z_j(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0$, b) Z_j *jsou definovány a jsou spojité v oboru D: $\|z\| \leqq H$, $t \geqq 0$.*

Říkáme, že triviální řešení soustavy (1.1) *je stabilní, jestliže k libovolně malému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že všechna řešení $z(t) \equiv (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t))$, pro něž $\|z(0)\| < \delta$, splňují pro všechna $t \geqq 0$ nerovnost $\|z(t)\| < \varepsilon$.*

Definice 1.2. *Budiž dána soustava* (1.1), *v níž funkce Z_j opět splňují podmínky* a) *a* b) *z def.* 1.1.

Říkáme, že triviální řešení soustavy (1.1) *je asymptoticky stabilní, jestliže je stabilní a platí $\|z(t)\| \to 0$ pro $t \to \infty$, jakmile $\|z(0)\| \leqq h \leqq H$ $(h > 0)$.*

Definice 1.3. *Budiž dána soustava* (1.1) *a nechť funkce Z_j vyhovují podmínkám* a) *a* b) *z definice* 1.1.

Říkáme, že řešení je nestabilní, není-li stabilní. (To je ekvivalentní s touto definicí: *Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že ať zvolíme $\delta > 0$ jakkoliv malé, vždy z δ-okolí počátku vychází alespoň jedno řešení, pro něž $\|z(t_1)\| = \varepsilon$, $0 < t_1 < \infty$.*)

Jak je známo, k odvození vět o stabilitě triviálního řešení soustavy (1.1) pomocí druhé Ljapunovovy metody užíváme t. zv. ljapunovských funkcí V.

O ljapunovských funkcích $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ budeme předpokládat, že mají tyto vlastnosti:

1. $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ je jednoznačně definována v oboru D: $\|z\| \leqq H$, $t \geqq 0$;
2. $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ je v oboru D reálná;
3. $V(t, 0, \ldots, 0) = 0$;
4. funkce $\tilde{V}(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ definovaná vztahem $\tilde{V}(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots$ $\ldots, y_n) = V(t, z_1, \ldots, z_n)$, kde $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, je spojitě diferencovatelná vzhledem k proměnným $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Definujeme pak

$$\frac{\partial V}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_j} + \frac{1}{i}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_j} - \frac{1}{i}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial y_j}\right).$$

Definice 1.4. *O funkci $V(z_1, \ldots, z_n)$ mající vlastnosti* 1., 2., 3. *říkáme, že je*

a) *positivně (negativně) definitní, jestliže existuje h $(0 < h \leqq H)$ takové, že $V(z_1, \ldots, z_n) > 0$ $(V < 0)$ pro všechny vektory z, pro něž $\|z\| \leqq h$, kromě $z \equiv 0$;*

b) *positivně (negativně) semidefinitní, jestliže* $V \geqq 0$ $(V \leqq 0)$ *pro všechna* z, *pro něž* $\|z\| \leqq h$;

c) *indefinitní, jestliže* V *nabývá v libovolně malém okolí počátku jak kladných tak záporných hodnot.*

Definice 1.5. *O funkci* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ *říkáme, že je*

a) *positivně (negativně) definitní, jestliže existuje takové* t_0 *a taková positivně definitní funkce* $W(z_1, \ldots, z_n)$, *že* $V(t, z_1, \ldots, z_n) \geqq W(z_1, \ldots, z_n)$ $(V \leqq -W)$ *pro* $t \geqq t_0$, $\|z\| \leqq h$;

b) *positivně (negativně) semidefinitní, jestliže existuje* $t_0 \geqq 0$ *tak, že* $V \geqq 0$ $(V \leqq 0)$ *pro* $t \geqq t_0$, $\|z\| \leqq h$;

c) *indefinitní, jestliže pro všechna* $t \geqq t_0 \geqq 0$ *nabývá v libovolně malém okolí počátku jak kladných tak záporných hodnot.*

Definice 1.6. *Říkáme, že funkce* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ *je stejnoměrně malá, jestliže* $V(t, z_1, \ldots, z_n) \to 0$ *pro* $\|z\| \to 0$ *stejnoměrně vzhledem k* t.

O definitních funkcích $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ platí některé poučky zcela obdobné těm, které známe v reálném oboru. Uveďme bez důkazu alespoň jednu, kterou budeme v dalším potřebovat.

Lemma 1.1. *Jestliže* $V(z_1, \ldots, z_n)$ *je definitní a homogenní funkce m-tého stupně a funkce* $W(t, z_1, \ldots, z_n)$ *splňuje tyto předpoklady:*

a) $W(t, z_1, \ldots, z_n)$ *je definována a je reálná v oboru* $\|z\| \leqq h$, $t \geqq 0$;

b) $|W(t, z_1, \ldots, z_n)| \leqq \alpha \|z\|^m$, *kde* α *je dostatečně malé kladné číslo, pak také reálná funkce*

$$U(t, z_1, \ldots, z_n) = V(z_1, \ldots, z_n) + W(t, z_1, \ldots, z_n)$$

je definitní.

Definice 1.7. *Derivací ljapunovské funkce* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$ *podle (směrového) pole vzhledem k soustavě* (1.1) *nazýváme výraz*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} Z_j + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j \right).$$

Tuto definici derivace podle pole dostaneme zcela přirozeným způsobem podle analogie s reálným oborem, jestliže položíme $z_j = x_j + iy_j$ a utvoříme soustavu

$$\dot{x}_j = \operatorname{Re} Z_j\,, \quad \dot{y}_j = \operatorname{Im} Z_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{1.1'}$$

ekvivalentní se soustavou (1.1). Jestliže $\tilde{V}(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ je ljapunovská funkce pro soustavu (1.1'), potom platí

$$\frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_j} \operatorname{Re} Z_j + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y_j} \operatorname{Im} Z_j \right) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} Z_j + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j \right),$$

kde

$$V(t, z_1, \ldots, z_n) = \tilde{V}\left(t, \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2}, \ldots, \frac{z_n + \bar{z}_n}{2}, \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i}, \ldots, \frac{z_n - \bar{z}_n}{2i}\right).$$

Lemma 1.2. *Derivace ljapunovské funkce podle pole je opět reálná funkce.*

Důkaz je snadný.

Nyní platí tyto věty zcela podobné větám z reálného oboru. (Důkazy neuvádím, poněvadž i ty probíhají zcela obdobně jako v reálném oboru.)

Věta 1.1. *Jestliže pro soustavu* (1.1) *lze určit definitní funkci* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$, *jejíž derivací podle pole je funkce semidefinitní, opačného znaménka než funkce* V, *pak triviální řešení této soustavy je stabilní.*

Věta 1.2. *Jestliže pro soustavu* (1.1) *lze určit definitní, stejnoměrně malou funkci* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$, *jejíž derivace podle pole je definitní, opačného znaménka než* V, *pak triviální řešení této soustavy je asymptoticky stabilní.*

Věta 1.3. *Jestliže pro soustavu* (1.1) *existuje reálná stejnoměrně malá funkce* $V(t, z_1, \ldots, z_n)$, *jejíž derivace* W *podle pole je definitní a funkce* V *při hodnotách* $\|z\|$ *libovolně malých a při hodnotách* t *libovolně velkých může nabývat hodnot stejného znaménka jako funkce* W, *pak triviální řešení je nestabilní.*

Věta 1.4. *Jestliže pro soustavu* (1.1) *lze určit takovou (na čase nezávislou) funkci* $V(z_1, \ldots, z_n)$, *že její derivace podle pole má v oboru* $\|z\| \leqq h$, $t \geqq 0$ *tvar* $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \lambda V + W(t, z_1, \ldots, z_n)$, *kde* λ *je kladná konstanta a* W *je buď identicky rovna nule, nebo je to funkce semidefinitní, při čemž v tomto případě* V *není funkce semidefinitního opačného znaménka než* W, *pak triviální řešení soustavy* (1.1) *je nestabilní.*

(Větu obdobnou Četajevově větě o nestabilitě neuvádím, protože ji v dalším nepotřebuji.)

2. Teorie prvého přiblížení

Obraťme se nyní k soustavě

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} z_k + Z_j(t, z_1, \ldots, z_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{2.1}$$

kde funkce Z_j vyhovují podmínkám (P) z § 0.

V dalším budeme pro soustavu (2.1) konstruovat ljapunovské funkce velmi speciálního tvaru, totiž takové, které jsou hermitovskými formami (s koeficienty nezávislými na čase).

Definice 2.1. *Hermitovskou formou nazýváme výraz*

$$H(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{jk} z_j \bar{z}_k\,, \text{ kde } g_{jk} = \bar{g}_{kj}\,.$$

Lemma 2.1. *Derivace hermitovské formy podle pole vzhledem k soustavě*

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} z_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.2}$$

je opět hermitovská forma.

Důkaz je snadný.

Další dvě lemmata jsou základní, neboť se v nich v podstatě ukazuje, kdy pro soustavu (2.1) dovedeme určit ljapunovské funkce ve tvaru hermitovských forem.

Lemma 2.2. *Rovnice*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} c_{jk} z_k + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_{jk} \bar{z}_k \right) = \lambda V \tag{2.3}$$

má alespoň jedno netriviální řešení V typu

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{jk} z_j \bar{z}_k \,. \tag{*}$$

Všechna vlastní čísla λ_m této rovnice pro řešení typu (*) jsou dána výrazy

$$\lambda_m = \varrho_j + \bar{\varrho}_k \, (m = 1, 2, \ldots, n^2; j, k = 1, 2, \ldots, n) \,,$$

kde ϱ_j jsou kořeny charakteristické rovnice

$$|c_{jk} - \varrho \delta_{jk}| = |C - \varrho E| = 0 \,. \tag{2.4}$$

Důkaz. Vyšetřme nejprve rovnici

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial z_j} c_{jk} z_k = \varrho V \tag{2.5}$$

a to za předpokladu, že všechny kořeny charakteristické rovnice (2.4) jsou navzájem různé. Potom existuje právě n lineárně nezávislých řešení $V_1, V_2, \ldots$ $\ldots, V_n$ rovnice (2.5) tvaru $V_j = p_{j1} z_1 + \ldots + p_{jn} z_n$. (Jde v podstatě o hledání vlastních vektorů v matice C: $(C - \varrho E)\, v = 0$.)

Utvořme nyní všechny součiny $V_{lm} = V_l \bar{V}_m$ $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$. Ty jsou typu (*). Jelikož

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial V_{lm}}{\partial z_j} c_{jk} z_k + \frac{\partial V_{lm}}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_{jk} \bar{z}_k \right) = (\varrho_l + \bar{\varrho}_m)\, V_{lm} \quad (l, m = 1, 2, \ldots, n) \,,$$

jsou všechna čísla $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ vlastními čísly a výrazy V_{lm} $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$ řešeními typu (*) rovnice (2.3).

Dokažme nyní, že čísla $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$ jsou právě všechna vlastní čísla rovnice (2.3). Pro n^2 koeficientů g_{jk} formy V, jež je řešením rovnice (2.3) typu (*), dostaneme n^2 rovnic

$$\sum_{r=1}^{n} (c_{rj} g_{rk} + \bar{c}_{rk} g_{jr}) = \lambda g_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n) \,. \tag{2.6}$$

Označme matici utvořenou z koeficientů levých stran Γ. Potom rovnice $|\Gamma - \lambda E| = 0$ má n^2 kořenů a tedy soustava (2.6) má n^2 vlastních čísel (počítaných s příslušnou násobností). Jsou-li čísla $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$ navzájem různá, jsou to zřejmě právě všechna vlastní čísla rovnice (2.3). Nejsou-li všechny výrazy $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ navzájem různé, nebo nejsou-li již dokonce ϱ_j navzájem různé, postupujeme následujícím způsobem.

Najdeme regulární matici T, která podobnostní transformací převádí matici C na Jordanův kanonický tvar, t. j. $TCT^{-1} = D$, kde D je v Jordanově kanonickém tvaru (t. j., je-li $D = (d_{jk})$, $d_{jj} = \varrho_j$, $d_{j+1,j} = 0$ resp. 1 podle násobnosti příslušného elementárního dělitele a všechna ostatní $d_{jk} = 0$). Nyní konstruujme tuto posloupnost matic D_μ ($\mu = 1, 2, \ldots$): Matice D_μ mají na hlavní diagonále prvky $\varrho_1^{(\mu)}, \varrho_2^{(\mu)}, \ldots, \varrho_n^{(\mu)}$ zvolené tak, aby $\varrho_j^{(\mu)} \to \varrho_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) (při vhodném očíslování), a aby jak prvky $\varrho_j^{(\mu)}$, tak výrazy $\varrho_l^{(\mu)} + \bar{\varrho}_m^{(\mu)}$ byly pro pevné μ navzájem různé, a mají 0 resp. 1 tam, kde má 0 nebo 1 matice D. Jelikož $D_\mu \to D$, platí $C_\mu = T^{-1}D_\mu T \to C$.

Nahradíme-li nyní v soustavě (2.6) c_{jk} příslušnými prvky $c_{jk}^{(\mu)}$ matice C_μ a označíme-li Γ_μ matici koeficientů levých stran, platí zřejmě $\Gamma_\mu \to \Gamma$. Podle předcházejícího již víme, že vlastními čísly matice Γ_μ jsou čísla $\varrho_l^{(\mu)} + \bar{\varrho}_m^{(\mu)}$ ($l, m = 1, 2, \ldots, n$). Užijeme nyní této věty známé z algebry:

Nechť rovnice $x^N + p_1 x^{N-1} + \ldots + p_N = 0$ *má kořeny* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$. *Dále nechť pro posloupnost rovnic*

$$x^N + p_1^{(\mu)} x^{N-1} + \ldots + p_N^{(\mu)} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

s kořeny $\sigma_1^{(\mu)}, \sigma_2^{(\mu)}, \ldots, \sigma_N^{(\mu)}$ *platí, že* $p_k^{(\mu)} \to p_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) *pro* $\mu \to \infty$. *Potom* $\sigma_k^{(\mu)} \to \sigma_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) (*při vhodném očíslování*).

Odtud plyne, že všechna vlastní čísla matice Γ jsou dána výrazy $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ ($l, m = 1, 2, \ldots, n$), počítáme-li je s příslušnou násobností.

Není ovšem pravda, že by vždy také všechna řešení $V_l^{(\mu)} \bar{V}_m^{(\mu)}$ konvergovala k lineárně nezávislým řešením rovnice (2.3). Má-li totiž matice C vícenásobné elementární dělitele a rozpadá-li se tedy na m ($m < n$) polí, pak existuje pouze m lineárně nezávislých řešení rovnice (2.5) a o počtu řešení rovnice (2.3) bez dalšího zkoumání nemůžeme říci nic jiného než to, že jedno řešení existuje vždy (a to je pro další úvahy jedině podstatné).

Lemma 2.3. *Jestliže kořeny charakteristické rovnice* (2.4) *jsou takové, že* $\varrho_l + \bar{\varrho}_m \neq 0$ ($l, m = 1, 2, \ldots, n$), *pak pro libovolnou formu* U *typu* (*) *existuje jedno a jen jedno řešení rovnice*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} c_{jk} z_k + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_{jk} \bar{z}_k \right) = U \tag{2.7}$$

typu (*).

Toto řešení je hermitovské, je-li U *hermitovská forma.*

D ů k a z. Jestliže máme řešit rovnici (2.7), kde

$$U = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} z_j \bar{z}_k \,, \quad V = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{jk} z_j \bar{z}_k \,,$$

dostaneme pro koeficienty g_{jk} soustavu rovnic

$$\sum_{r=1}^{n} (c_{rj} g_{rk} + \bar{c}_{rk} g_{jr}) = a_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n) \,, \tag{2.8}$$

jejíž determinant soustavy je týž, jako determinant soustavy (2.6), položíme-li v ní $\lambda = 0$. Jak víme, soustava (2.8) má jedno a jen jedno řešení, jestliže determinant soustavy je různý od nuly. Avšak podmínka nutná a postačující k tomu, aby determinant soustavy (2.6) pro $\lambda = 0$ byl různý od nuly je, aby 0 nebyla vlastní číslo soustavy (2.6), a k tomu podle lemmatu 2.2 opět je nutné a stačí, aby žádný z výrazů $\varrho_l + \bar{\varrho}_m$ $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$ se nerovnal nule. Tím je dokázána prvá část lemmatu.

Předpokládejme nyní, že U je hermitovská forma. Jelikož $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$, platí také

$$\sum_{r=1}^{n} \overline{(c_{rj}g_{rk} + \bar{c}_{rk}g_{jr})} = \sum_{r=1}^{n} (c_{rk}g_{rj} + \bar{c}_{rj}g_{kr}) \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

odkud

$$\sum_{r=1}^{n} [c_{rk}(\bar{g}_{jr} - g_{rj}) + \bar{c}_{jr}(\bar{g}_{rk} - g_{kr})] = 0 . \tag{2.9}$$

Položme $\bar{g}_{jr} - g_{rj} = \xi_{jr}$; platí zřejmě $\xi_{jr} = -\bar{\xi}_{rj}$. Dosadíme-li podle těchto rovností do (2.9) a přejdeme-li k rovnicím komplexně sdruženým, dostaneme

$$\sum_{r=1}^{n} (c_{rj}\xi_{rk} + \bar{c}_{rk}\xi_{jr}) = 0 \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n) . \tag{2.9'}$$

Determinant soustavy (2.9′) je týž jako determinant soustavy (2.8), o němž jsme již dokázali, že za daných předpokladů je od nuly různý. Tudíž homogenní soustava (2.9′) má pouze triviální řešení $\xi_{jk} = \bar{\xi}_{kj} = 0$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$ a tedy $g_{jk} = \bar{g}_{kj}$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$, což bylo dokázat.

Dříve než postoupíme dále, připomeňme z elementární teorie lineárních diferenciálních rovnic toto

lemma 2.4. *Triviální řešení soustavy*

$$\dot{z}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}z_k \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.10}$$

je a) *asymptoticky stabilní, když a jen když* $\operatorname{Re}\varrho_j < 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, b) *stabilní, když a jen když* $\operatorname{Re}\varrho_j \leqq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *a pro ta* ϱ_j, *pro něž* $\operatorname{Re}\varrho_j = 0$, *jsou* $\varrho - \varrho_j$ *jednoduchými elementárními děliteli matice* $C - \varrho E$; c) *nestabilní, když a jen když buď některé* $\operatorname{Re}\varrho_j > 0$ *nebo, jestliže všechna* $\operatorname{Re}\varrho_j \leqq 0$, *existuje alespoň jedno* ϱ_j, *pro něž* $\operatorname{Re}\varrho_j = 0$ *a* $\varrho - \varrho_j$ *je alespoň dvojnásobným elementárním dělitelem matice* $C - \varrho E$.

Nyní již můžeme přejít ke konstrukci ljapunovských funkcí, a to zatím pro lineární soustavu (2.10).

Lemma 2.5. *Jestliže všechny kořeny charakteristické rovnice* (2.4) *mají záporné reálné části, pak pro libovolnou hermitovskou definitní formu* $U(z_1, z_2, \ldots, z_n)$

existuje právě jedna hermitovská forma $V(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, jejíž derivace podle pole vzhledem k rovnicím (2.10) *vyhovuje rovnici*

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} c_{jk} z_k + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_{jk} \bar{z}_k \right) = U \tag{2.11}$$

a tato forma V je nutně definitní a to opačného znaménka než je forma U.

Důkaz. Jelikož všechny kořeny ϱ_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) rovnice (2.4) mají záporné reálné části, nemůže se ani jeden výraz $\varrho_j + \bar{\varrho}_k$ ($j, k = 1, 2, \ldots, n$) rovnat nule a tedy podle lemmatu 2.3 existuje právě jedno řešení rovnice (2.11) a to hermitovské.

Máme ještě dokázat, že pro U definitní je V také definitní a to opačného znaménka. Předpokládejme pro určitost, že U je negativně definitní. Je třeba odděleně vyšetřit tyto tři případy:

1. V je indefinitní, negativně definitní, negativně semidefinitní,
2. V je positivně semidefinitní,
3. V je positivně definitní.

Prvý případ však není možný, neboť funkce V by potom vyhovovala podmínkám věty 1.3, takže triviální řešení rovnice (2.10) by bylo nestabilní, což je podle lemmatu 2.4 ve sporu s předpokladem $\mathrm{Re}\,\varrho_j < 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Druhý případ je však také vyloučen a to ať jsou kořeny rovnice (2.4) jakékoliv. Je-li totiž V pouze positivně semidefinitní, a nikoliv positivně definitní, existuje libovolně blízko počátku bod $(z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{n0}) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ takový, že $V(z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{n0}) = 0$. Vezměme nyní řešení rovnic (2.10) vycházející z bodu $(z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{n0})$. Jelikož derivace $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ je záporná, musí V klesat a tudíž nabývat záporných hodnot. To je však spor. Zbývá tedy pouze třetí možnost, že V je positivně definitní a tvrzení je dokázáno.

Lemma 2.6. *Jestliže mezi kořeny charakteristické rovnice* (2.4) *je alespoň jeden s kladnou reálnou částí a ani pro jednu dvojici ϱ_l, $\bar{\varrho}_m$ ($l, m = 1, 2, \ldots, n$) kořenů této rovnice není $\varrho_l + \bar{\varrho}_m = 0$, pak pro libovolnou definitní hermitovskou formu U existuje právě jedna hermitovská forma V vyhovující rovnici* (2.7) *a tato forma není semidefinitní (speciálně definitní) opačného znaménka než má U.*

Důkaz. Předpokládejme pro určitost, že U je negativně definitní hermitovská forma. Potom podle lemmatu 2.3 existuje právě jedna hermitovská forma V vyhovující rovnici (2.7). Máme ukázat, že tato forma nemůže být ani positivně semidefinitní, ani positivně definitní. Kdyby V byla positivně definitní, splňovala by podmínky věty 1.2 a triviální řešení soustavy (2.10) by bylo asymptoticky stabilní, což je ve sporu s lemmatem 2.4. To, že forma V nemůže být ani positivně semidefinitní, jsme již ukázali v lemmatu 2.5. Funkce V vyhovuje podmínkám věty 1.3 a je to tedy pro vyšetřovaný případ ljapunovská funkce.

Lemma 2.7. *Jestliže mezi kořeny charakteristické rovnice* (2.4) *je alespoň jeden s kladnou reálnou částí, pak pro libovolnou definitní hermitovskou formu U existuje taková hermitovská forma V a takové kladné číslo α, že derivace podle pole funkce V vyhovuje rovnici $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \alpha V + U$ a přitom forma V není semidefinitní opačného znaménka než je forma U.*

Důkaz. Zkoumejme rovnici $|C - (\varrho' + \frac{1}{2}\alpha) E| = 0$, kde α je kladná konstanta. Kořeny ϱ_j' této rovnice jsou s kořeny $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ rovnice (2.4) vázány vztahy $\varrho_j' = \varrho_j - \frac{1}{2}\alpha$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Konstantu α můžeme zřejmě zvolit tak, aby pro všechny dvojice ϱ_l', ϱ_m' $(l, m = 1, 2, \ldots, n)$ platilo $\bar{\varrho}_l' + \bar{\varrho}_m' = \varrho_l + \bar{\varrho}_m - \alpha \neq 0$ a přitom aby byla dostatečně malá, takže stále alespoň jeden kořen ϱ_j' má reálnou část kladnou.

Potom podle lemmatu 2.7 existuje právě jedna hermitovská forma V vyhovující rovnici

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial V}{\partial z_j}\left(c_{jk} - \frac{1}{2}\alpha\delta_{jk}\right) + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j}\left(\bar{c}_{jk} - \frac{1}{2}\alpha\delta_{jk}\right)\right] = U\,, \qquad (2.12)$$

kde U je libovolná definitní hermitovská forma; přitom V určitě není semidefinitní, opačného znaménka než U. Jelikož se snadno přesvědčíme, že $\sum_{j=1}^{n}\left(z_j \dfrac{\partial V}{\partial z_j} + \bar{z}_j \dfrac{\partial V}{\partial \bar{z}_j}\right) = 2V$, dostaneme z (2.12) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\partial V}{\partial z_j} c_{jk} z_k + \dfrac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_{jk}\bar{z}_k\right) = \alpha V + U$, což bylo dokázat.

Předcházející věty nám neumožňují pro soustavu (2.10) konstruovat ljapunovské funkce v případě, že charakteristická rovnice (2.4) má kořeny se zápornými reálnými částmi, alespoň jeden kořen s nulovou reálnou částí a žádný kořen s kladnou reálnou částí. Jestliže kořen ϱ_j má reálnou část nulovou, pak se buď rovná nule nebo ryze imaginárnímu číslu $i\mu$. V obou těchto případech však $\varrho_j + \bar{\varrho}_j = 0$. Případy, kdy rovnice (2.4) má vedle kořenů se zápornou reálnou částí pouze kořeny s nulovou reálnou částí, je tedy třeba vyšetřit jinak a nazýváme je „kritickými".

V ostatních případech nám právě dokázaná lemmata 2.5 až 2.7 umožňují konstruovat ljapunovské funkce pro soustavu (2.1) a můžeme vyslovit následující věty.

Věta 2.1. *Jestliže všechny kořeny charakteristické rovnice* (2.4) *soustavy prvého přiblížení* (2.10) *mají záporné reálné části, je triviální řešení soustavy* (2.1) *asymptoticky stabilní při libovolných funkcích $Z_j(t, z_1, \ldots, z_n)$ vyhovujících podmínkám* (P) *z* § 0.

Důkaz. Vezměme definitní — pro určitost třeba negativně definitní — hermitovskou formu U a najděme hermitovskou formu V vyhovující rovnici (2.7). Taková forma podle lemmatu 2.6 existuje a je positivně definitní.

Potom

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = U + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} Z_j + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j \right).$$

Nyní je třeba odhadnout velikost druhého členu na pravé straně. Jelikož $\frac{\partial V}{\partial z_j}$, $\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j}$ jsou formy prvého stupně, platí

$$\left| \frac{\partial V}{\partial z_j} \right| \leqq K \|z\|, \quad \left| \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \right| \leqq K \|z\| \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

kde konstanta K závisí pouze na koeficientech formy V. Z podmínky (P) plyne, že k libovolně malému kladnému α existuje h, $0 < h \leqq H$, tak, že $|Z_j| \leqq \alpha \|z\|$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ pro $\|z\| < h$. Platí tedy

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial z_j} Z_j + \frac{\partial V}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j \right) \right| \leqq 2n\alpha K \|z\|^2,$$

a zvolíme-li tudíž $\alpha > 0$ dostatečně malé, je funkce $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ podle lemmatu 1.1 negativně definitní. Pak jsou splněny všechny předpoklady věty 1.2 a tím je věta 2.1 dokázána.

Zcela obdobně se dokazuje

věta 2.2. *Jestliže alespoň jeden kořen rovnice* (2.4) *má reálnou část kladnou, je triviální řešení soustavy* (2.1) *nestabilní při libovolných funkcích* $Z_j(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *vyhovujících podmínkám* (P) *z* § 0.

3. Dvě pomocné věty

Lemma 3.1. *Budiž dána soustava*

$$\dot{y}_j = Y_j(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k),$$
$$\dot{x}_m = p_{m1}x_1 + \ldots + p_{mn}x_n + X_m(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \tag{3.1}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k; \quad m = 1, 2, \ldots, n),$$

kde Y_j *a* X_m *jsou ohraničené a spojité funkce* t *pro* $t \geqq 0$ *a holomorfní funkce komplexních proměnných* y_j *a* x_m *pro* $\|y_j\| \leqq h$, $\|x_m\| \leqq h$ $(j = 1, 2, \ldots, k; m = 1, 2, \ldots, n)$ *třídy* H_2. *Nechť* $Y_j(t, 0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_k) \equiv 0 \equiv X_m(t, 0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_k)$.

Nechť dále charakteristická rovnice $|p_{mr} - \varrho\delta_{mr}| = 0$ *má vesměs kořeny se zápornými reálnými částmi.*

Potom triviální řešení rovnice (3.1) *je stabilní a každý integrál počínající dostatečně blízko počátku konverguje k jednomu ze soustavy partikulárních integrálů rovnice* (3.1)

$$y_1 = c_1, \ldots, y_k = c_k, \quad x_1 = \ldots = x_n = 0. \tag{3.2}$$

Touž vlastnost jako triviální řešení má každé řešení ze soustavy (3.2), *jsou-li hodnoty parametrů c_j dostatečně malé.*

Důkaz probíhá s nepodstatnými změnami, tak jako v reálném oboru, jak je na př. proveden v Malkinově knize [4], str. 108 a nebudu jej proto provádět.

Definice 3.1. *Budiž dána soustava*

$$\dot{z}_j = Z_j^{(m)}(t, z_1, \ldots, z_n) + \ldots + Z_j^{(N)}(t, z_1, \ldots, z_n) + \varphi_j(t, z_1, \ldots, z_n) \tag{3.3}$$

definovaná v oblasti

$$t \geqq 0\,, \quad \|z\| \leqq h\,, \tag{3.4}$$

kde $Z_j^{(l)}$ jsou formy l-tého stupně v proměnných $z_1, \ldots, z_n$, jejichž koeficienty jsou spojité a ohraničené funkce t, a φ_j zahrnují zbývající členy stupně vyššího než N.

Říkáme, že triviální řešení soustavy (3.3) *je stabilní nezávisle na členech stupně vyššího než N, jestliže ke každému libovolně malému $\varepsilon > 0$ a libovolně velkému A existuje takové kladné číslo $\delta(\varepsilon, A)$, že pro všechna řešení rovnice* (3.3), *pro něž $\|z(0)\| < \delta$, je $\|z(t)\| < \varepsilon$ pro všechna $t \geqq 0$ při libovolné volbě funkcí φ_j vyhovujících v oblasti* (3.4) *podmínkám $|\varphi_j| < A\, \|z\|^{N+1}$.*

Říkáme, že triviální řešení soustavy (3.3) *je nestabilní, nezávisle na členech stupně vyššího než N, jestliže při těchže předpokladech o funkcích φ_j existuje kladné číslo $\varepsilon(A)$ takové, že uvnitř libovolně malého η-okolí počátku existuje alespoň jeden bod takový, že norma z něho vycházejícího integrálu nabude v nějakém čase hodnoty ε.*

Lemma 3.2. *Budiž dána soustava*

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= q_{j1}y_1 + \ldots + q_{jk}y_k + Y_j(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n)\,, \\ \dot{x}_m &= p_{m1}x_1 + \ldots + p_{mn}x_n + X_m(t, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n) \\ &(j = 1, 2, \ldots, k\,; \quad m = 1, 2, \ldots, n)\,, \end{aligned} \tag{3,5}$$

kde q_{jr} a p_{ms} jsou konstantní a funkce Y_j a X_m jsou v oblasti $|y_j| \leqq h$, $|x_m| \leqq h$, $t \geqq 0$ holomorfní funkce komplexních proměnných $y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_m$ třídy H_2, jejichž koeficienty jsou ohraničené a spojité funkce času t. Koeficienty p_{ms} buďte takové, že rovnice $|p_{mr} - \varrho\delta_{mr}| = 0$ má vesměs kořeny se zápornými reálnými částmi. Nechť jsou ještě splněny tyto podmínky:

P_1) *rozvoje funkcí $X_m(t, y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$ jsou třídy H_{N+1};*

P_2) *koeficienty q_{jk} vyhovují nerovnosti*

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} (q_{js}\bar{y}_j y_s + \bar{q}_{js} y_j \bar{y}_s) \leqq b^2 \|y\|^2\,, \tag{3.6}$$

při čemž konstanta b je tak malá, že hermitovská forma

$$-\sum_{m=1}^{n} x_m \bar{x}_m + 2Nb^2 V\,,$$

kde V je řešení rovnice

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_m} p_{mr} x_r + \frac{\partial V}{\partial \bar{x}_m} \bar{p}_{mr} \bar{x}_r \right) = - \sum_{m=1}^{n} x_m \bar{x}_m \tag{3.7}$$

je negativně definitní.

Utvořme soustavu

$$y'_j = q_{j1} y_1 + \ldots + q_{jk} y_k + Y_j(t, y_1, \ldots, y_k, 0, 0, \ldots, 0) = Y_j^{(0)} . \tag{3.5'}$$

Potom, jestliže triviální řešení soustavy (3.5′) *je stabilní, resp. asymptoticky stabilní, resp. nestabilní, nezávisle na členech stupně vyššího než N, má triviální řešení soustavy* (3.5) *touž vlastnost.*

Důkaz probíhá stejně jako u obdobné věty v reálném oboru (viz opět Malkinovu knihu [4], str. 374). Nebudu jej proto provádět a zastavím se jen u několika drobností, kde se situace poněkud liší. Pro jednoduchost budu na rozdíl od citované Malkinovy knihy předpokládat, že koeficienty u lineárních členů soustavy (3.5) jsou konstantní, což však není podstatné.

Existence hermitovské positivně definitní funkce V vyhovující rovnici (3.7) je zajištěna podle lemmatu 2.5.

V soustavě (3.5) proveďme substituci $x_m = r^N \xi_m$, $r = \|y\|$.

Prvá skupina rovnic (3.5) nabude tvaru

$$\dot{y}_j = Y_j^{(0)} + r^N \Psi_j(t, y_1, \ldots, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n) ,$$

kde opět $\Psi_j(t, 0, \ldots, 0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ a druhá skupina po úpravě nabude tvaru

$$\dot{\xi}_m = p_{m1} \xi_1 + \ldots + p_{mn} \xi_n - N \xi_m \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} (q_{js} \bar{y}_j y_s + \bar{q}_{js} y_j \bar{y}_s) + \Xi_m ,$$

kde opět $\Xi_m(t, 0, \ldots, 0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$.

Dále už důkaz probíhá úplně beze změny.

Povšimněme si ještě toho, že podmínka (3.6) je triviálním způsobem splněna, jestliže všechna $q_{jk} = 0$, s kterýmžto případem se setkáme v § 4.

4. Kritický případ jednoho nulového kořenu

V obou dalších paragrafech budeme vyšetřovat pouze takové soustavy, jejichž pravé strany jsou holomorfní funkce proměnných $z_1, z_2, \ldots, z_n$ a pokud nebude řečen opak, budou nezávislé na čase t.

Z obecných vět uvedených v § 2 vidíme, že zatím nedovedeme rozhodnout o stabilitě těch soustav, jejichž příslušná charakteristická rovnice má kromě kořenů se zápornou reálnou částí alespoň jeden kořen s nulovou reálnou částí a žádný kořen s kladnou reálnou částí. V tomto paragrafu vyšetříme případ, kdy charakteristická rovnice má právě jeden nulový kořen.

Jak je známo, můžeme takovou soustavu vhodnou lineární substitucí proměnných (s konstantními koeficienty) převést na kanonický tvar

$$\dot{z} = Z(z, z_1, \ldots, z_n)\,,$$
$$\dot{z}_s = \varrho_s z_s + \alpha_s z_{s-1} + Z_s(z, z_1, \ldots, z_n) \tag{4.1}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n\,; \quad \alpha_1 = 0)\,,$$

kde $\operatorname{Re}\varrho_s < 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, po případě ještě některá další $\alpha_s = 0$ a funkce $Z, Z_1, \ldots, Z_n$ patří do H_2.

Zkoumejme nejprve rovnici

$$\dot{z} = c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \ldots = Z(z) \quad (k \geqq 2)\,. \tag{4.2}$$

O té dokážeme toto

lemma 4.1. *Triviální řešení rovnice* (4.2) *je stabilní, jestliže všechna* $c_m = 0$ $(m = k, k + 1, \ldots)$ *a je nestabilní, jestliže* $c_k \neq 0$.

Důkaz. Prvá část tvrzení je evidentní.

Budiž nyní $c_k \neq 0$. Integrál zkrácené rovnice

$$\dot{z} = c_k z^k \tag{4.3}$$

snadno najdeme:

$$z = z_0[1 + (1 - k)\, c_k z_0^{k-1} t]^{-\frac{1}{k-1}}\,. \tag{4.4}$$

Odtud je však okamžitě patrné, že triviální integrál zkrácené rovnice (4.3) je nestabilní, neboť položíme-li v (4.4)

$$z_0 = \left(\frac{1}{k-1}\, \bar{c}_k \delta\right)^{\frac{1}{k-1}}, \tag{4.5}$$

kde δ je libovolně malé kladné reálné číslo (můžeme vzít libovolný z $k - 1$ kořenů), nabude integrál (4.4) v čase $t_1 = (\delta|c_k|^2)^{-1}$ nekonečně velké hodnoty a to tedy znamená, že libovolně blízko počátku začínají řešení, která opustí libovolné předem dané ε-okolí počátku. Poznamenejme, že integrály, pro něž je splněn vztah (4.5), ústí pro $t \to -\infty$ do počátku.

Nyní ukážeme, že z nestability triviálního řešení rovnice (4.3) již plyne také nestabilita triviálního řešení rovnice (4.2). K tomu užijeme Frommerovy teorie známé z kvalitativní teorie diferenciálních rovnic. To je sice způsob poněkud těžkopádný, za to nás však částečně poučí o topologickém chování trajektorií v rovině z. Rovnice (4.2) je ekvivalentní se soustavou dvou reálných diferenciálních rovnic

$$\dot{x} = \operatorname{Re} Z(z) = Q(x, y)\,, \quad \dot{y} = \operatorname{Im} Z(z) = P(x, y) \tag{4.2'}$$

Rovnice (4.5) definuje v podstatě pro tuto soustavu $k - 1$ „význačných směrů" (podle Frommerovy terminologie; viz [1], [5]), v nichž mohou integrální čáry buď pro $t \to -\infty$ nebo $t \to \infty$ vstupovat s určitou směrnicí do počátku.

Z (4.4) je okamžitě patrno, že podél polopaprsků OP_m, $O = (0,0)$, $P_m = (\alpha_m, \beta_m)$, kde P_m je definováno vztahem

$$\alpha_m + i\beta_m = \bar{c}_k^{\frac{1}{k-1}} \quad (m = 1, 2, \ldots, k-1)\,, \tag{4.6$_1$}$$

vstupují integrály do počátku O pro $t \to -\infty$ a podél polopaprsků OQ_m, $Q_m = (\gamma_m, \delta_m)$, kde Q_m je definováno vztahem

$$\gamma_m + i\delta_m = (-\bar{c}_k)^{\frac{1}{k-1}}\,, \tag{4.6$_2$}$$

vstupují integrály do počátku pro $t \to \infty$. Tak dostáváme celkem $2k - 2$ význačných polopaprsků. V případě lichého k svírají spolu vždy dva polopaprsky téže kategorie, v případě sudého k vždy jeden polopaprsek jedné a jeden druhé kategorie úhel π. Poněvadž dva takové polopaprsky svírající spolu úhel π definují jediný význačný směr, dostáváme celkem $k - 1$ význačných směrů. Jak víme z Frommerovy teorie, mohou mít rovnice (4,2′) maximálně $k + 1$ význačných směrů $y = \varkappa_j x$, jejichž směrnice jsou definovány rovnicí $P(1, \varkappa) - \varkappa Q(1, \varkappa) = 0$. Všechna řešení této rovnice ovšem nemusí být reálná a ani podél reálných význačných směrů nemusí vždy skutečně vstupovat integrály do singulárního bodu (t. j. v našem případě počátku). Avšak $k - 1$ význačných směrů definovaných rovnicemi (4.6$_1$) a (4.6$_2$) má tu vlastnost, že podél nich integrální čáry do počátku vskutku vstupují, a že jsou to právě všechny takové směry. To plyne z toho, že pro zkrácenou soustavu jsou význačné směry současně integrálními čarami a všechny pohyby na nich počínající musí buď pro $t \to \infty$ nebo pro $t \to -\infty$ ubíhat do nekonečna. Snadno nahlédneme, že je to možné právě jen tehdy, leží-li počáteční bod na některém z $k - 1$ význačných směrů dříve uvedených, neboť součin $c_k z_0^{k-1}$ musí být v tom případě reálný a to je možné právě jen v případech, určených rovnicí (4.5), kde δ je libovolné reálné číslo.

Bylo by možné ještě podrobněji topologicky popsat okolí singulárního bodu soustavy (4.2′), nebudeme se však u toho zdržovat. Zdůrazněme už pouze pro nás důležitou okolnost, že všechny význačné směry jsou, jak plyne z hořejšího, jednoduché, a že jsou tedy vyloučeny normální oblasti třetího typu podle Frommera.

Dokažme nyní, že triviální řešení soustavy (4.2′) je nestabilní. Zatím jsme dokázali, že soustava (4.2′) má $k - 1$ význačných polopaprsků, podél nichž ústí integrální čáry pro $t \to -\infty$ do počátku a tedy pro $t \to \infty$ se od něho vzdalují. Z Frommerovy teorie odtud plyne, že můžeme sestrojit takovou kruhovou výseč se středem v počátku o dostatečně malém středovém úhlu a dostatečně malého poloměru ε, jež je jedním z těchto význačných polopaprsků půlena, a jejíž „zadní" (kruhová) stěna je integrálními čarami protínána pod úhly, které s radiusvektory nesvírají úhly větší než $\frac{1}{4}\pi$ a přitom se vzrůstajícím t protínají tuto stěnu z vnitřku ven. Vzhledem k tomu, že vyšetřujeme analytický případ, musí opět podle Frommerovy teorie v této výseči (ať už tvoří normální oblast prvního nebo druhého druhu) existovat aspoň jedna integrální křivka, která pro $t \to -\infty$ ústí do počátku. Zvolíme-li počáteční bod na této křivce libovolně blízko počátku, opustí trajektorie z něho vycházející po konečném čase uvažovanou kruhovou výseč a to zadní stěnou. Odtud okamžitě plyne, že triviální řešení je nestabilní.

Zkoumejme nyní úplnou soustavu (4.1). Proveďme substituci

$$z_s = \zeta_s + u_s(z) \quad (s = 1, 2, \dots, n)\,, \tag{4.7}$$

kde u_s jsou holomorfní řešení soustavy rovnic

$$\varrho_s u_s + \alpha_s u_{s-1} + Z_s(z, u_1, \dots, u_n) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n;\ \alpha_1 = 0)\,.$$

Jelikož funkcionální determinant této soustavy se pro $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$ rovná $\varrho_1\varrho_2 \dots \varrho_n \neq 0$, řešení $u_s(z)$ pro dostatečně malá z skutečně existují a, jak je ihned patrno, rozvoje

$$u_s(z) = A_{s1}z + A_{s2}z^2 + \dots \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

začínají členy alespoň druhého stupně.

Dosadíme-li do (4.1) podle (4.7), dostaneme soustavu

$$\dot z = \tilde Z(z, \zeta_1, \dots, \zeta_n) = Z(z, \zeta_1 + u_1(z), \dots, \zeta_n + u_n(z))\,,$$

$$\dot\zeta_s = \varrho_s\zeta_s + \alpha_s\zeta_{s-1} + \tilde Z_s(z, \zeta_1, \dots, \zeta_n) =$$

$$= \varrho_s\zeta_s + \alpha_s\zeta_{s-1} + Z_s(z, \zeta_1 + u_1, \dots, \zeta_n + u_n) - Z_s(z, u_1, \dots, u_n) - \frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}z} Z$$

$$(s = 1, 2, \dots, n;\ \alpha_1 = 0)\,.$$

Všimněme si toho, že začíná-li rozvoj funkce $\tilde Z(z, 0, 0, \dots, 0)$ členem stupně m-tého ($m \geqq 2$), pak rozvoje funkcí $\tilde Z_s(z, 0, 0, \dots, 0)$ začínají členem stupně alespoň $m + 1$.

Nyní již můžeme vysloviti větu:

Věta 4.1. *Jestliže $\tilde Z(z, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0$, pak triviální řešení soustavy (4.1) je stabilní, existuje jednoparametrická soustava řešení*

$$z = c, \quad z_s = u_s(c) \quad (s = 1, 2, \dots, n) \tag{4.8}$$

a každé řešení počínající dostatečně blízko počátku konverguje k jednomu z těchto řešení.

Jestliže $\tilde Z(z, 0, 0, \dots, 0) \neq 0$, pak triviální řešení soustavy (4.1) je nestabilní.

Důkaz. Jestliže $\tilde Z(z, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0$, pak také $\tilde Z_s(z, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0$ a jsou zřejmě splněny všechny podmínky lemmatu 3.1 a prvá část tvrzení věty odtud okamžitě plyne.

Jestliže $\tilde Z(z, 0, 0, \dots, 0) \neq 0$, pak (jak víme podle lemmatu 4.1) je triviální řešení zkrácené soustavy $\dot z = \tilde Z(z, 0, 0, \dots, 0)$ vždy nestabilní. Jelikož, jak jsme již uvedli, rozvoje funkcí $\tilde Z_s(z, 0, 0, \dots, 0)$ začínají členem stupně alespoň

$m + 1$, začíná-li rozvoj funkce $\tilde{Z}(z, 0, 0, \ldots, 0)$ členem stupně m, jsou splněny všechny předpoklady lemmatu 3.2. Odtud plyne druhá část našeho tvrzení.

Poznámka. Obdobnou větu by šlo dokázat i v případě, že $\tilde{Z}$, $\tilde{Z}_s$ závisí na čase, při čemž funkce $\tilde{Z}(z, 0, 0, \ldots, 0)$ by měla tvar $\tilde{Z}(t, z, 0, 0, \ldots, 0) = c_k z^k + c_{k+1}(t)\, z^{k+1} + \ldots$, kde c_k je konstanta různá od nuly.

5. Případ jednoho ryze imaginárního kořenu

V tomto případě lze lineární substitucí s konstantními koeficienty dosíci toho, že soustava má tvar

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\mu z + Z(z, z_1, \ldots, z_n)\,, \\ \dot{z}_s &= \varrho_s z_s + \alpha_s z_{s-1} + Z_s(z, z_1, \ldots, z_n) \\ &(s = 1, 2, \ldots, n\,;\quad \alpha_1 = 0)\,, \end{aligned} \tag{5.1}$$

kde μ je reálné číslo, všechna ϱ_s mají záporné reálné části a holomorfní funkce $Z, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ jsou třídy H_2. Zkoumejme nejprve soustavu prvého řádu

$$\dot{z} = i\mu z + i\mu \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k = i\mu z[1 + zh(z)]\,. \tag{5.2}$$

(Je zřejmé, že tato forma zápisu není na újmu obecnosti.) Dokážeme

lemma 5.1. *Triviální řešení rovnice* (5.2) *je stabilní a všechna řešení počínající dostatečně blízko počátku jsou periodická a mají touž periodu* $\dfrac{2\pi}{\mu}$.

Tvrzení lemmatu bychom nejsnáze dokázali tak, že bychom známou metodou majorantních řad ukázali, že rovnici (5.1) lze převést v dostatečně malém okolí počátku na rovnici

$$\dot{\mathfrak{z}} = i\mu\mathfrak{z}\,, \tag{5.2'}$$

při čemž $\mathfrak{z} = z + P(z)$, resp. $z = \mathfrak{z} + Q(\mathfrak{z})$, kde P a Q patří do H_2, takže triviální řešení soustav (5.2) a (5.2') mají vůči stabilitě stejný charakter i si zachovávají svou periodu; tvrzení lemmatu 5.1 je totiž pro rovnici (5.2') zřejmé.

Uvedu zde však důkaz jiný, který podstatným způsobem užívá teorie funkcí komplexní proměnné.

Důkaz. Existuje kružnice K poloměru R, v níž funkce $1 + zh(z)$ nemá nulové body; její vnitřek označme G. Jelikož počátek může být pro soustavu (5.2) v rovině $z = (x, y)$ pouze typu centr nebo typu fokus, zjistíme snadno, že existuje takové okolí počátku G_1 ležící uvnitř K, že všechny integrály počínající v okolí G_1 protnou při $t \to \infty$ po prvé radiusvektor, na němž leží počáteční bod, opět uvnitř kružnice K. Sestrojme kružnici k o poloměru r, ležící úplně v G_1, a označme její vnitřek g.

Vezměme nyní integrál $z(t)$ počínající v nějakém bodu $z_0 \in g$ a dokažme, že po čase $\tau = \dfrac{2\pi}{\mu}$ nabude opět hodnoty z_0, což bude znamenat, že trajektorie je uzavřená a tedy pohyb je periodický.

Integrací rovnice (5.2) dostaneme

$$i\mu t = \int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta[1 + \zeta h(\zeta)]} = \int_{z_0}^{z} \left[\frac{1}{\zeta} - \frac{h(\zeta)}{1 + \zeta h(\zeta)}\right] d\zeta =$$

$$= \lg \frac{z}{z_0} - \int_{z_0}^{z} \frac{h(\zeta)}{1 + \zeta h(\zeta)} d\zeta = \lg \frac{z}{z_0} - \int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta$$

a odtud

$$z - z_0 e^{i\mu t} e^{\int_{z_0}^{z} H(\zeta) d\zeta} = 0 .$$

Položíme-li $t = \dfrac{2\pi}{\mu}$, dostaneme pro příslušnou hodnotu $z_1 = z\left(\dfrac{2\pi}{\mu}\right)$ rovnici:

$$z_1 - z_0 \exp \int_{z_0}^{z_1} H(\zeta)\, d\zeta = 0 .$$

Tato rovnice má jedno zřejmé řešení, totiž $z_1 = z_0$. Dokážeme-li, že toto řešení je v kruhu K jediné, bude vše dokázáno.

K důkazu této okolnosti užijeme Rouchéovy věty. Funkce z a funkce $-z_0 \exp \int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta$ jsou zřejmě holomorfní a jednoznačné uvnitř i na kružnici K. Na obvodu této kružnice je $|z| = R$ a

$$\left|- z_0 \exp \int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta\right| \leqq r \exp \zeta\, |z - z_0| \max |H(z)| \leqq r \exp \{(r + R)\, M\} ,$$

kde jsme položili $\max\limits_{z \in G} |H(z)| = M < \infty$; délku integrační cesty při odhadu integrálu $\int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta$ můžeme odhadnout veličinou $|z - z_0|$, neboť funkce $H(z)$ je v G holomorfní a hodnota integrálu při integraci po libovolné cestě je táž, jako když integrujeme po úsečce spojující body z a z_0. Nyní stačí zvolit, je-li to nutné, $r' < r$ tak, aby platilo $r' \exp \{(r' + R)\, M\} < R$, aby byla ještě splněna podmínka, že na kružnici K je $|z| > |-z_0 \exp \int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta|$ pro všechna z_0, pro něž $|z_0| \leqq r'$. Jelikož funkce z má v G jediný nulový bod, má podle Rouchéovy věty také funkce $z - z_0 \exp \{\int_{z_0}^{z} H(\zeta)\, d\zeta\}$ v G jediný nulový bod a tím je $z = z_0$. Tím jsme tedy dokázali, že všechny integrály počínající uvnitř kružnice s dostatečně malým poloměrem r' jsou periodické a mají touž periodu $\dfrac{2\pi}{\mu}$, q. e. d.