ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

1

82

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

1-4. T.J. 82 8° J. Mat. 248

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 82 • Č. 1 • STR. 1—128 • PRAHA 30. III. 1957

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky“*)

SVAZEK 82 (1957)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Vedoucí redaktor:

J. Kurzweil

Redakční rada:

I. Babuška, I. Černý, V. Fabian, M. Fiedler, J. Mařík, L. Mišík, Z. Nádeník, L. Rieger, K. Svoboda, O. Vejvoda, F. Vyčichlo, K. Winkelbauer a J. Holubář (výkonný redaktor)

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd
Praha II, Žitná 25

OBSAH

Články:

Různé:

Referáty:

Recense:

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 82 * PRAHA, 30. III. 1957 * ČÍSLO I

STUDIE ZE ZÁKLADŮ GEOMETRIE
I. ÚTVARY NEORIENTOVANÉ

BORIS GRUBER, Poděbrady.
(Došlo dne 3. října 1955.) DT: 513,01

Práce je věnována axiomatickému budování základů trojrozměrné euklidovské geometrie. Tato první část studuje vlastnosti incidenční, rovnoběžnost, kolmost a důsledky pátého Euklidova postulátu o rovnoběžkách. Primitivní pojmy jsou *bod, zaměření* (ve smyslu neorientovaný směr) a *kolmý*, pro něž je vysloveno devět axiomů. Definují se zejména pojmy přímka a rovina jako jisté množiny bodů.

Primitivní pojmy jsou *bod, zaměření* a *kolmý*. Body značíme $A, B, C, \ldots$, zaměření $z, z', z_1, z_2, \ldots$ Každé dvojici různých bodů A, B je přiřazeno zaměření, které značíme $\zeta(AB)$. Jsou-li z_1, z_2 zaměření, pak jsou buď kolmá (znak $z_1 \perp z_2$) nebo nejsou kolmá (znak z_1 non $\perp z_2$). Množinu všech bodů nazýváme prostorem a označujeme **P**. Tyto pojmy mají následující vlastnosti:

I. *Existuje aspoň jeden bod a aspoň jedno zaměření.*

II. $A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BA)$.

III. $\zeta(AB) = \zeta(AC), B \neq C \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BC)$.

IV. *Je-li dán bod A a zaměření z, pak existují body B, C tak, že $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) \neq z$.*

V. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_2 \perp z_1$.

VI. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_1 \neq z_2$.

VII. *Je-li $z_1 \neq z_2$, pak existuje právě jedno zaměření z, pro něž platí $z_1 \perp z \perp z_2$.*

VIII. $\zeta(AB) \perp z, \zeta(AC) \perp z, B \neq C \Rightarrow \zeta(BC) \perp z$.

IX. *Je-li $A \neq B$ a z_1 non $\perp z_2$, pak existuje bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$.*[1])

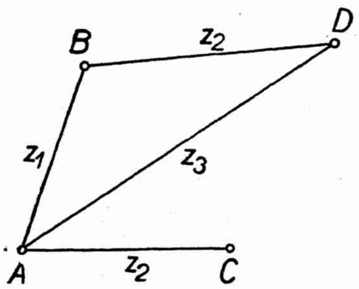
[1]) Nezávislost uvedeného systému axiomů zde nebudeme zkoumat. Že je bezesporný, ukazuje na př. model trojrozměrného euklidovského prostoru. Rozumějme bodem uspořádanou trojici $[a, b, c]$ reálných čísel a zaměřením poměr $p : q : r$ tří reálných čísel. (To je uspořádaná trojice reálných čísel, z nichž aspoň jedno je různé od nuly; přitom poměry $p_1 : q_1 : r_1$, $p_2 : q_2 : r_2$ považujeme za totožné, existuje-li číslo $k \neq 0$ tak, že je $p_1 = kp_2$, $q_1 = kq_2$, $r_1 = kr_2$.) Jsou-li body $[a_1, b_1, c_1]$, $[a_2, b_2, c_2]$ různé, přiřadíme jim zaměření $(a_1 - a_2) : (b_1 - b_2) : (c_1 - c_2)$. Zaměření $p_1 : q_1 : r_1$, $p_2 : q_2 : r_2$ považujeme za kolmá, je-li $p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$. Axiomy I až IX jsou pak zřejmě splněny.

1. Přímka

Zde zkoumáme důsledky axiomů I až IV.

1.1. *Existují aspoň čtyři různé body a tři různá zaměření.*

Důkaz. Podle I existuje bod A a zaměření z_1. Podle IV existují body B, C tak, že $\zeta(AB) = z_1$, $\zeta(AC) \neq z_1$ (obr. 1). Označme $\zeta(AC) = z_2$, takže $z_1 \neq z_2$. Jest $B \neq A \neq C$, ježto symboly $\zeta(AB)$, $\zeta(AC)$ mají smysl, a $B \neq C$, ježto $z_1 \neq z_2$. Podle IV existuje bod D tak, že platí $\zeta(BD) = z_2$; tedy jest $B \neq D$. Rovněž jest $A \neq D$; jinak by totiž podle II bylo $z_2 = \zeta(BD) = \zeta(BA) = \zeta(AB) = z_1$ proti předpokladu. Označme $z_3 = \zeta(AD)$. Tvrdíme, že je $z_1 \neq z_3 \neq z_2$. Kdyby bylo $z_1 = z_3$, bylo by $\zeta(AB) = \zeta(AD)$ a z toho podle III $\zeta(AB) = \zeta(BD)$ čili $z_1 = z_2$ — spor. Kdyby bylo $z_2 = z_3$, bylo by $\zeta(DB) = \zeta(DA)$, z toho podle III $\zeta(DB) = \zeta(BA)$, to jest $z_2 = z_1$ — opět spor. Konečně jest $D \neq C$, neboť jinak by bylo $z_2 = z_3$.



Obr. 1.

1.2. Definice. *Množinu $M \subset \mathbf{P}$ nazýváme maximální množinou o vlastnosti V, jestliže*

1. *M má vlastnost V,*
2. *je-li $M \subset M_1 \subset \mathbf{P}$, $M \neq M_1$, pak M_1 nemá vlastnost V.*

1.3. Definice. *Množinu $p \subset \mathbf{P}$ nazýváme přímkou, jestliže*

1. *obsahuje aspoň dva různé body,*
2. *je to maximální množina této vlastnosti:*

$$A, B, C, D \in p,\ A \neq B,\ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD)\,. \tag{1}$$

1.4. Definice. *Zaměřením přímky p rozumíme zaměření $\zeta(AB)$, je-li $A, B \in p$, $A \neq B$. Zaměření přímky p značíme $\zeta(p)$.*

1.5. *Jestliže pro přímky p, p_1 platí $p \subset p_1$, jest $p = p_1$.*

Důkaz. Platí (1) a

$$A, B, C, D \in p_1,\ A \neq B,\ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD)\,. \tag{2}$$

Kdyby bylo $p \neq p_1$, nebyla by p maximální množina vlastnosti (1) — spor s definicí 1.3.

1.6. *Buďiž A bod, z zaměření. Potom množina všech bodů X, pro něž platí*

$$\textit{buď } X = A \quad \textit{nebo} \quad \zeta(AX) = z\,, \tag{3}$$

je přímka o zaměření z obsahující bod A.

Důkaz. Označme p množinu všech bodů X, pro něž platí (3). Jest $A \in p$. Podle IV existuje bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z$. Tedy $B \in p$, $B \neq A$, takže p obsahuje aspoň dva různé body. Zvolme v množině p body C, D, E, F tak, aby $C \neq D$, $E \neq F$. Je-li $C = A$ nebo $D = A$, jest $\zeta(CD) = z$ (užíváme II). Je-li $C \neq A \neq D$, jest $\zeta(AC) = z$, $\zeta(AD) = z$; z III pak plyne $\zeta(CD) = z$. Stejně se dokáže $\zeta(EF) = z$, takže $\zeta(CD) = \zeta(EF)$. Tedy p má vlastnost (1). Budiž konečně $p \subset p_1 \subset \mathbf{P}$, $p \neq p_1$, takže existuje bod G patřící do p_1, nikoli však do p. Podle definice množiny p je $G \neq A$, $\zeta(AG) \neq z$. V množině p_1 vezměme body A, B, A, G, takže $A \neq B$, $A \neq G$. Podle předcházejícího je $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AG) \neq z$, což znamená, že p_1 nemá vlastnost (2). Tedy p je maximální množina o vlastnosti (1), tedy přímka. Obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(p) = \zeta(AB) = z$.

1.7. *Budiž A bod, z zaměření. Pak existuje právě jedna přímka, která obsahuje bod A a má zaměření z. Je to množina všech bodů X splňujících* (3).

Důkaz. Označme p množinu všech bodů X, pro něž platí (3). Podle 1.6 je množina p přímka, která obsahuje bod A a má zaměření z. Budiž p_1 přímka o zaměření z, obsahující bod A. Pro každý bod X přímky p_1 platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) = z$, takže $p_1 \subset p$. Z 1.5 plyne $p_1 = p$.

1.8. *Nechť přímka p obsahuje bod A a má zaměření z. Potom p je množina všech bodů X, pro něž platí* (3).

Důkaz plyne z 1.7.

1.9. *Existuje aspoň jedna přímka.*

Důkaz plyne z I a 1.7.

1.10. *Ke každé přímce existuje bod, který na ní neleží. Ke každému bodu existuje přímka, která jím neprochází.*

Důkaz. 1. Budiž p libovolná přímka. Zvolme bod $A \in p$ a označme $z = \zeta(p)$. Podle IV existuje bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) \neq z$; tedy C non $\in p$.

2. Budiž A libovolný bod. Podle 1.1 existují zaměření $z_1 \neq z_2$ a podle IV lze najít bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z_1$, takže $A \neq B$. Podle 1.7 existuje přímka p, která obsahuje bod B a má zaměření z_2. Je to množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = B$ nebo $\zeta(BX) = z_2$. Ježto $\zeta(BA) = z_1 \neq z_2$, neprochází přímka p bodem A.

1.11. *Budiž $A \neq B$. Pak existuje právě jedna přímka, která obsahuje body A, B.*

Důkaz. Označme $z = \zeta(AB)$. Z 1.7 plyne, že existuje přímka p, která obsahuje bod A a má zaměření z, a že je $B \in p$. Za druhé nechť každá z přímek p_1, p_2 obsahuje body A, B. Pak každá z nich obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(A, B)$, takže jest podle 1.7 $p_1 = p_2$.

1.12. *Nechť body A, B, C neleží v přímce. Potom jsou tyto body navzájem různé a rovněž zaměření $\zeta(AB)$, $\zeta(AC)$, $\zeta(BC)$ jsou navzájem různá.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve $A = B = C$. Podle I existuje zaměření z a podle 1.7 přímka, která má zaměření z a obsahuje bod A a tedy i body B, C. To je však spor s předpokladem. Za druhé předpokládejme $A = B \neq C$. Podle 1.11 existuje přímka, která obsahuje body B, C, tedy i bod A, opět spor. Stejně v případech $A \neq B = C$, $A = C \neq B$. Tedy body A, B, C jsou navzájem různé. Konečně předpokládejme, že platí $\zeta(AB) = \zeta(AC)$ a označme toto zaměření z. Z 1.7 plyne, že existuje přímka, která obsahuje bod A a má zaměření z a že tato přímka obsahuje též body B, C, neboť platí $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) = z$. To však je spor. Tedy $\zeta(AB) \neq \zeta(AC)$ a stejně v ostatních dvou případech.

1.13. *Existují tři (navzájem různé) body, které neleží v přímce.*

Důkaz. Podle I existuje bod A a zaměření z a podle IV body B, C, pro něž platí $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) \neq z$. Body A, B, C nemohou ležet na žádné přímce, neboť pak by muselo být $\zeta(AB) = \zeta(AC)$.

1.14. Definice. *Přímky p, q nazýváme rovnoběžné,* je-li $\zeta(p) = \zeta(q)$.

1.15. *Jsou-li přímky p, q rovnoběžné, jsou buď disjunktní nebo totožné.*

Důkaz. Nechť přímky p, q mají zaměření z. Nejsou-li disjunktní, označme A některý jejich společný bod. Z 1.7 plyne $p = q$.

1.16. *Existují dvě rovnoběžné disjunktní přímky.*

Důkaz. Podle 1.9 existuje přímka; označme ji p. Podle 1.10 existuje bod A, který neleží na p. Podle 1.7 existuje přímka, která obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(p)$; označme ji q. Přímky p, q jsou rovnoběžné. Nemohou být totožné, neboť A neleží na p. Tedy jsou podle 1.15 disjunktní.

1.17. *Nechť p, q jsou přímky. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, q jsou disjunktní,*
2. *p, q mají společný právě jeden bod,*
3. *p, q jsou totožné.*

Důkaz. Protože každá přímka obsahuje aspoň dva různé body, nemohou nastat zároveň žádné dva z uvedených tří případů. Nejsou-li přímky p, q disjunktní, mají společný aspoň jeden bod. Mají-li společný více než jeden bod, jsou podle 1.11 totožné.

1.18. Definice. *Přímky p, q nazýváme různoběžné, mají-li společný právě jeden bod.*

1.19. *Jsou-li přímky p, q různoběžné, jsou navzájem různé a jest $\zeta(p) \neq \zeta(q)$.*

Důkaz. Kdyby různoběžné přímky p, q byly totožné, nastávaly by zároveň případy 2, 3 z věty 1.17, což tato věta vylučuje. Kdyby bylo $\zeta(p) = \zeta(q)$, byly by p, q rovnoběžné. Protože nejsou totožné, byly by podle 1.15 disjunktní, takže by nastávaly zároveň případy 2 a 1 z věty 1.17, což není možné.

1.20. *Existují dvě různoběžné přímky.*

Důkaz. Podle 1.1. existují bod A a zaměření $z_1 \neq z_2$. Podle 1.7 existuje přímka p_1, která obsahuje bod A a má zaměření z_1, a přímka p_2, která obsahuje bod A a má zaměření z_2. Kdyby přímky p_1, p_2 měly kromě bodu A společný ještě nějaký jiný bod, byly by podle 1.11 totožné, takže by bylo $z_1 = z_2$ — spor.

1.21. *Existují přímky p, q, pro něž nastává případ 1 z věty 1.17. Existují přímky p, q, pro něž nastává případ 2 z věty 1.17. Existují přímky p, q, pro něž nastává případ 3 z věty 1.17.*

Důkaz plyne z 1.16, 1.20 a 1.9.

2. Rovina

Zde vyvozujeme důsledky z axiomů I až VIII.

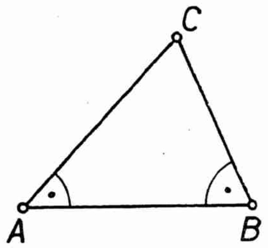
2.1. *Ke každému zaměření existuje zaměření kolmé.*

Důkaz. Budiž z_1 libovolné zaměření. Podle 1.1 existuje zaměření $z_2 \neq z_1$ a podle VII existuje zaměření $z \perp z_1$.

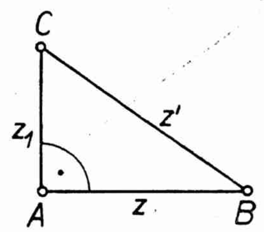
2.2. *Nechť A, B, C jsou tři různé body. Pak neplatí zároveň*

$$\zeta(AB) \perp \zeta(AC)\,, \qquad \zeta(AB) \perp \zeta(BC)\,.$$

Důkaz. Předpokládejme, že uvedené vztahy platí, a označme $\zeta(AB) = z$, takže $\zeta(CA) \perp z$, $\zeta(CB) \perp z$, $A \neq B$ (obr. 2). Z VIII plyne $\zeta(AB) \perp z$, t. j. $z \perp z$, což je spor s VI.



Obr. 2.



Obr. 3.

2.3. *Ke každému zaměření z existuje zaměření z', pro něž platí $z' \neq z$, z' non $\perp z$.*

Důkaz. Budiž z libovolné zaměření. Podle 2.1 existuje zaměření $z_1 \perp z$ a podle I bod A (obr. 3). Najděme podle IV body B a C tak, aby platilo

$$\zeta(AB) = z\,, \qquad \zeta(AC) = z_1\,.$$

Jest $B \neq C$, neboť jinak by bylo $z = z_1$ a to není podle VI možné. Označme $z' = \zeta(BC)$. Kdyby bylo $z = z'$, to jest $\zeta(BA) = \zeta(BC)$, plynulo by z III $\zeta(BA) = \zeta(AC)$, to jest $z = z_1$, což není možné. Tedy je $z' \neq z$. Ježto platí $z \perp z_1$, to jest $\zeta(AB) \perp \zeta(AC)$, nemůže podle 2.2 platit $\zeta(AB) \perp \zeta(BC)$, to jest $z \perp z'$. Tedy z' non $\perp z$.

2.4. *Existují zaměření z_1, z_2, z_3, pro něž platí $z_1 \perp z_2$, $z_1 \perp z_3$, $z_2 \perp z_3$.*

Důkaz. Podle I existuje zaměření z_1 a podle 2.1 zaměření $z_2 \perp z_1$. Podle VI je $z_1 \neq z_2$, takže podle VII existuje zaměření z_3, pro něž platí $z_1 \perp z_3 \perp z_2$.

2.5. *Budiž $n \geqq 4$, buďtež $z_1, z_2, \dots, z_n$ zaměření. Potom existují taková i, j ($1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$), že z_i non $\perp z_j$.*

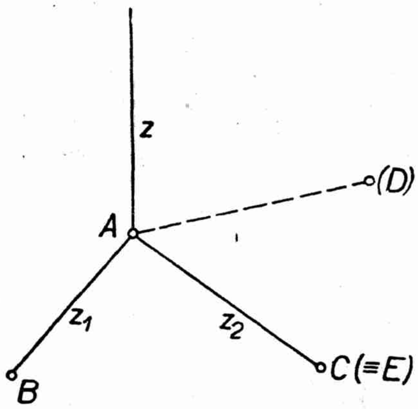
Důkaz. Předpokládejme naopak, že platí $z_i \perp z_j$ pro všechna i, j ($1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$). Platí tedy $z_1 \perp z_3 \perp z_2$, $z_1 \perp z_4 \perp z_2$. Podle VI je $z_1 \neq z_2$ a podle VII $z_3 = z_4$, což je spor s předpokladem $z_3 \perp z_4$.

2.6 Definice. *Množinu $\tau \subset \mathbf{P}$ nazýváme rovinou, jestliže*

1. *obsahuje aspoň dva různé body,*
2. *existuje takové zaměření z, že τ je maximální množina této vlastnosti:*

$$A, B \in \tau\,,\ A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z\,. \tag{1}$$

2.7. *Každá rovina obsahuje tři body, které neleží v přímce.*



Obr. 4.

Důkaz. Mějme libovolnou rovinu τ. Podle 2.6 existují body $A \neq B$, které leží v τ. Dále existuje takové zaměření z, že τ je maximální množina vlastnosti (1). Označme $z_1 = \zeta(AB)$. Ježto τ má vlastnost (1), jest $z_1 \perp z$ a tedy $z_1 \neq z$. Podle VII existuje zaměření z_2, pro něž platí $z_1 \perp z_2 \perp z$ (obr. 4), a podle IV můžeme nalézt bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) = z_2$. Protože $z_2 \perp z_1$, je $z_2 \neq z_1$, takže body A, B, C neleží v přímce. Předpokládejme, že bod C neleží v τ, a označme $\tau_1 = \tau \cup \{C\}$, takže $\tau \subset \tau_1 \subset \mathbf{P}$, $\tau \neq \tau_1$. Dokážeme implikaci

$$D, E \in \tau_1\,,\ D \neq E \Rightarrow \zeta(DE) \perp z\,. \tag{2}$$

Zvolme libovolně body $D, E \in \tau_1$, $D \neq E$. Je-li $D \neq C \neq E$, patří body D, E do τ a (2) plyne z (1). Nechť je tedy třeba $E = C$, takže $D \in \tau$. Je-li $D = A$, jest $\zeta(DE) = \zeta(AC) = z_2 \perp z$. Je-li $D \neq A$, jest $\zeta(AD) \perp z$, neboť $D \in \tau$, a $\zeta(AE) = \zeta(AC) = z_2 \perp z$. Z toho pode VIII je $\zeta(DE) \perp z$. Tím je správnost implikace (2) dokázána. To však znamená, že τ není maximální množina vlastnosti (1), což je spor. Nebyl tedy správný předpoklad, že C neleží v τ. Tedy v τ leží body A, B, C, které neleží v přímce.

2.8. *Žádná množina není zároveň přímkou a rovinou.*

Důkaz plyne z 2.7.

2.9. *Nechť τ je rovina a nechť platí implikace* (1) *a implikace*

$$A, B \in \tau, A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z' . \tag{3}$$

Potom jest $z = z'$.

Důkaz. Podle 2.7 existují v rovině τ body C, D, E, které neleží v přímce. Podle 1.12 jsou tyto body navzájem různé a platí $\zeta(CD) \neq \zeta(CE)$. Protože platí (1), jest $\zeta(CD) \perp z \perp \zeta(CE)$, a protože platí (3), jest $\zeta(CD) \perp z' \perp \zeta(CE)$. Ze VII plyne $z = z'$.

2.10. *Nechť τ jest rovina. Potom existuje právě jedno zaměření z tak, že τ je maximální množinou vlastnosti* (1). *Toto zaměření z nazýváme zaměřením kolmým k rovině τ nebo krátce zaměřením roviny τ a označujeme $\zeta(\tau)$.*[2])

Důkaz. Aspoň jedno takové zaměření z existuje podle 2.6. Předpokládejme, že pro zaměření z' platí, že τ je maximální množina vlastnosti (3). Potom tedy platí jak implikace (1), tak implikace (3), a z 2.9 dostáváme $z = z'$.

2.11. *Nechť τ je rovina a nechť platí implikace* (1). *Potom z jest zaměřením roviny τ.*

Důkaz. Označme z' zaměření roviny τ. To znamená, že τ je maximální množina vlastnosti (3). Tedy τ má vlastnost (3), t. j. platí implikace (3) a podle předpokladu implikace (1). Z 2.9 plyne $z = z'$.

2.12. *Jestliže pro roviny τ, τ_1 platí $\tau \subset \tau_1$, jest $\tau = \tau_1$.*

Důkaz. Označíme-li $z = \zeta(\tau)$, $z_1 = \zeta(\tau_1)$, platí (1) a

$$A, B \in \tau_1, A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z_1 . \tag{4}$$

Je-li $A, B \in \tau$, je také $A, B \in \tau_1$, neboť $\tau \subset \tau_1$, takže

$$A, B \in \tau, A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z_1 . \tag{5}$$

Z (1) a (5) podle 2.9 plyne $z = z_1$. Kdyby bylo $\tau \neq \tau_1$, plynulo by z (1) a (4), že τ není maximální množinou vlastnosti (1) — spor.

2.13. *Budiž A bod, z zaměření. Potom množina všech bodů X, pro něž platí*

$$\text{buď } X = A \text{ nebo } \zeta(AX) \perp z , \tag{6}$$

je rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z.

Důkaz. Označme τ množinu všech bodů X, pro něž platí (6). Podle 2.1 existuje zaměření $z_1 \perp z$ a podle IV bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z_1$. Tedy $B \in \tau$, takže τ obsahuje dva různé body. Za druhé zvolme libovolně body C, $D \in \tau$, $C \neq D$. Je-li $C = A$ nebo $D = A$, jest podle (6) $\zeta(CD) \perp z$. Je-li $C \neq A \neq D$, plyne ze vztahů $\zeta(AC) \perp z$, $\zeta(AD) \perp z$ podle VIII $\zeta(CD) \perp z$. Je tedy správná

[2]) Zaměření $\zeta(\tau)$ znamená zřejmě zaměření přímky kolmé k rovině τ (viz definici 3.30). Název „zaměření roviny" není sice běžný, ale je zcela důsledný. Přímka i rovina určují jednoznačně jisté zaměření. Nazýváme-li je v prvním případě „zaměření přímky", je přirozené nazývat je v druhém případě „zaměřením roviny".

implikace (1). Konečně vezměme libovolnou množinu τ_1, pro niž platí $\tau \subset \tau_1 \subset \subset \mathbf{P}$, $\tau \neq \tau_1$. Existuje bod E, který patří do τ_1, nikoli však do τ, takže je $E \neq A$, $\zeta(AE)$ non $\perp z$. Protože τ_1 obsahuje bod $E \neq A$, pro nějž neplatí $\zeta(AE) \perp z$, jest τ maximální množinou vlastnosti (1), tedy rovinou. Tato rovina obsahuje bod A a platí pro ni implikace (1), takže podle 2.11 je jejím zaměřením zaměření z.

2.14. *Budiž A bod, z zaměření. Potom existuje právě jedna rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z. Je to množina všech bodů X, splňujících* (6).

Důkaz. Označme τ množinu všech bodů X, které splňují (6). Podle 2.13 je τ rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z. Je-li τ_1 rovina, která obsahuje bod A a má zaměření z, pak τ_1 je maximální množinou vlastnosti (2). Z toho plyne, že pro každý bod X množiny τ_1 platí (6), takže $\tau_1 \subset \tau$. Z 2.12 plyne $\tau_1 = \tau$.

2.15. *Nechť rovina τ obsahuje bod A a má zaměření z. Potom τ je množina všech bodů X, splňujících* (6).

Důkaz plyne z 2.14.

2.16. *Existuje aspoň jedna rovina.*

Důkaz plyne z I a 2.14.

2.17. *Ke každé rovině existuje bod, který na ní neleží. Ke každému bodu existuje rovina, která jím neprochází.*

Důkaz. 1. Budiž τ rovina; označme $z = \zeta(\tau)$ a zvolme $A \in \tau$. Podle IV existuje bod B, pro který platí $\zeta(AB) = z$, tedy vzhledem k VI $\zeta(AB)$ non $\perp z$. Z 2.15 pak plyne B non $\in \tau$.

2. Budiž A libovolný bod. Podle I existuje zaměření z a podle IV bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z$. Podle 2.14 existuje rovina τ, která obsahuje bod B a má zaměření z. Je to množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = B$ nebo $\zeta(BX) \perp z$. Bod A neleží v τ, neboť není ani $A = B$ ani $\zeta(BA) \perp z$.

2.18. *Třemi body, které neleží v přímce, prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť body A, B, C neleží v přímce. Podle 1.12 jsou navzájem různé a platí $\zeta(AB) \neq \zeta(AC)$. Podle VII existuje zaměření z, pro něž platí

$$\zeta(AB) \perp z \perp \zeta(AC). \tag{7}$$

Z 2.14 plyne, že existuje rovina τ, která obsahuje bod A a má zaměření z, a že tato rovina — vzhledem k (7) — obsahuje též body B, C. Za druhé předpokládejme, že rovina τ_1 obsahuje body A, B, C. Pak tedy platí $\zeta(AB) \perp \perp \zeta(\tau_1) \perp \zeta(AC)$. Odtud a ze (7) plyne podle VII $\zeta(\tau_1) = z$. Každá z rovin τ, τ_1 obsahuje tedy bod A a má zaměření z, takže $\tau = \tau_1$ podle 2.14.

2.19. Definice. *Roviny τ_1, τ_2 nazýváme rovnoběžné, je-li $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$.*

2.20. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 rovnoběžné, pak jsou buď disjunktní nebo totožné.*

Důkaz. Nechť roviny τ_1, τ_2 mají zaměření z. Nejsou-li disjunktní, označme A některý jejich společný bod a užijme 2.14.

2.21. *Existují dvě rovnoběžné disjunktní roviny.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina; označme ji τ. Podle 2.17 existuje bod A, který neleží v τ, a podle 2.14 existuje rovina, která obsahuje bod A a má zaměření $\zeta(\tau)$. Označme ji τ_1. Roviny τ, τ_1 jsou rovnoběžné. Nejsou totožné, ježto A leží v τ_1 a neleží v τ. Tedy jsou podle 2.20 disjunktní.

2.22. *Budiž τ rovina, A bod. Pak existuje právě jedna rovina, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ.*

Důkaz. Hledaná rovina musí obsahovat bod A a mít zaměření $\zeta(\tau)$. Podle 2.14 taková rovina existuje, a to právě jedna.

2.23. *Budiž τ rovina a A bod, který neleží v τ. Pak existuje aspoň jedna rovina, která prochází bodem A a je disjunktní s rovinou τ.*

Důkaz. Podle 2.22 existuje rovina τ_1, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ. Roviny τ, τ_1 nejsou totožné, neboť A leží v τ_1 a neleží v τ. Tedy jsou podle 2.20 disjunktní.

2.24. *Jestliže roviny τ_1, τ_2 mají společný bod, pak mají společnou přímku.*

Důkaz. Nechť roviny τ_1, τ_2 mají společný bod A. Označme $z_1 = \zeta(\tau_1)$, $z_2 = \zeta(\tau_2)$. Ze VII nebo 2.1 plyne existence zaměření z, pro něž platí $z_1 \perp \perp z \perp z_2$. Podle 1.7 existuje přímka p, která obsahuje bod A a má zaměření z. Podle 2.15 je τ_1 množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp \perp z_1$, a τ_2 množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp z_2$. Je-li $X \in p$, je podle 1.8 buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) = z$, to jest buď $X = A$ nebo $z_1 \perp \zeta(AX) \perp z_2$, takže $X \in \tau_1$ i $X \in \tau_2$. Tedy přímka p leží v rovině τ_1 i v rovině τ_2.

2.25. *Nechť τ_1, τ_2 jsou roviny. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *τ_1, τ_2 jsou disjunktní,*
2. *τ_1, τ_2 se protínají v přímce,*[3]
3. *τ_1, τ_2 jsou totožné.*

Důkaz. Zřejmě nemůže nastat zároveň případ 1 a některý z případů 2, 3. Že nemohou nastat zároveň ani případy 2, 3 plyne z 2.8. Nejsou-li roviny τ_1, τ_2 disjunktní, mají podle 2.24 společnou přímku p. Mají-li společný ještě bod A, který neleží v p, zvolme na p body $B \neq C$. Body A, B, C neleží v přímce. Kdyby totiž nějaká přímka tyto body obsahovala, byla by podle 1.11 totožná s p, a to není možné, protože A neleží na p. Z 2.18 plyne, že roviny τ_1, τ_2 jsou totožné, neboť každá z nich obsahuje body A, B, C.

2.26. Definice. *Roviny τ_1, τ_2 nazýváme různoběžné, protínají-li se v přímce.*

2.27. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 různoběžné, jsou navzájem různé a jest $\zeta(\tau_1) \neq \zeta(\tau_2)$.*

Důkaz. Kdyby různoběžné roviny τ_1, τ_2 byly totožné, nastávaly by zároveň případy 2, 3 z věty 2.25, což však tato věta nepřipouští. Kdyby bylo $\zeta(\tau_1) =$

[3]) Tím rozumíme, že průnik množin τ_1, τ_2 je přímka.

$= \zeta(\tau_2)$, byly by τ_1, τ_2 rovnoběžné. Jelikož nejsou totožné, byly by podle 2.20 disjunktní, takže by nastávaly zároveň případy 2, 1 z věty 2.25. To však není možné.

2.28. *Existují dvě různoběžné roviny.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina. Označme ji τ_1 a zvolme na ní bod A. Podle 1.1 existuje zaměření $z_2 \neq \zeta(\tau_1)$ a podle 2.14 existuje rovina τ_2, která obsahuje bod A a má zaměření z_2. Roviny τ_1, τ_2 nejsou disjunktní, neboť obě obsahují bod A, a nejsou totožné, neboť mají různá zaměření. Z 2.25 plyne, že jsou různoběžné.

2.29. *Existují roviny τ_1, τ_2, pro něž nastává případ 1 z věty 2.25. Existují roviny τ_1, τ_2, pro něž nastává případ 2 z věty 2.25. Existují roviny τ_1, τ_2, pro něž nastává případ 3 z věty 2.25.*

Důkaz plyne z 2.21, 2.28 a 2.16.

2.30. Definice. *Roviny τ_1, τ_2 nazýváme kolmé, je-li $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$.*

2.31. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 kolmé, pak nejsou rovnoběžné a tedy jsou navzájem různé.*

Důkaz plyne z VI.

2.32. *Existují tři roviny, z nichž každé dvě jsou kolmé.*

Důkaz plyne z 2.4, I a 2.14.

2.33. *Jsou-li dány více než tři roviny, pak mezi nimi existují dvě, které nejsou kolmé.*

Důkaz plyne z 2.5.

3. Rovina a přímka

Stále předpokládáme platnost axiomů I až VIII.

3.1. *Nechť přímka p má s rovinou τ společný aspoň jeden bod. Potom p leží v τ tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau)\,. \tag{1}$$

Důkaz. 1. Nechť p leží v τ. Zvolíme-li na přímce p body $A \neq B$, jest $\zeta(p) = \zeta(AB) \perp \zeta(\tau)$.

2. Nechť přímka p má s rovinou τ společný bod A a nechť platí (1). Označme $z_1 = \zeta(p)$, $z_2 = \zeta(\tau)$, takže $z_1 \perp z_2$. Rovina τ je podle 2.15 množina všech bodů X, pro něž platí buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp z_2$. Je-li $X \in p$, jest podle 1.8 buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) = z_1$, tedy buď $X = A$ nebo $\zeta(AX) \perp z_2$, takže $X \in \tau$. Tedy $p \subset \tau$.

3.2. *Leží-li přímka p v rovině τ, platí* (1).

Důkaz plyne z 3.1.

3.3. *Nechť přímka p a bod A leží v rovině τ. Potom existuje v rovině τ právě jedna přímka, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p.*

Důkaz. Podle 3.2 jest $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Hledaná přímka musí procházet bodem A a mít zaměření $\zeta(p)$. Podle 1.7 taková přímka existuje, a to právě jedna. Z 3.1 pak plyne, že tato přímka leží v rovině τ.

3.4. *Nechť přímka p a bod A leží v rovině τ, nechť A neleží na p. Potom existuje v rovině τ aspoň jedna přímka, která prochází bodem A a je disjunktní s p.*

Důkaz. Podle 3.3 existuje v rovině τ přímka q, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p. Přímky p, q nejsou totožné, neboť A neleží na p. Tedy jsou podle 1.15 disjunktní.

3.5. *V každé rovině leží dvě různoběžné přímky.*

Důkaz. Nechť τ je rovina. Podle 2.1 existuje zaměření $z_1 \perp \zeta(\tau)$, takže $z_1 \neq \zeta(\tau)$. Podle VII existuje zaměření z_2, pro něž platí $z_1 \perp z_2 \perp \zeta(\tau)$, tedy $z_1 \neq z_2$. Zvolme v rovině τ bod A a označme p_i $(i = 1, 2)$ přímku procházející bodem A, která má zaměření z_i. Přímky p_1, p_2 existují podle 1.7. Nejsou disjunktní, neboť obě procházejí bodem A, a nejsou totožné, neboť mají různá zaměření. Tedy jsou podle 1.17 různoběžné. Každá z přímek p_i $(i = 1, 2)$ má s rovinou τ společný bod A a platí $\zeta(p_i) = z_i \perp \zeta(\tau)$ pro $i = 1, 2$. Z 3.1 plyne, že přímky p_1, p_2 leží v τ.

3.6. *Budiž τ rovina. Potom platí:*

1. *V τ existují přímky p, q, které jsou disjunktní.*
2. *V τ existují přímky p, q, které jsou různoběžné.*
3. *V τ existují přímky p, q, které jsou totožné.*

Důkaz. Druhé tvrzení je věta 3.5, třetí tvrzení plyne z druhého. Podle třetího tvrzení existuje v τ přímka p a podle 2.8 existuje v τ bod A, který neleží na p. Z 3.4 plyne existence přímky q, která leží v τ a je disjunktní s p. Tím je dokázáno i první tvrzení.

3.7. *Má-li přímka s rovinou společné dva různé body, leží v rovině celá.*

Důkaz. Nechť přímka p má s rovinou τ společné body A, B $(A \neq B)$. Potom jest $\zeta(p) = \zeta(AB) \perp \zeta(\tau)$. Z 3.1 plyne, že p leží v τ.

3.8. *Přímkou a bodem, který na té přímce neleží, prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť bod A neleží na přímce p. Zvolme na p body $B \neq C$. Body A, B, C neleží v přímce. Kdyby totiž nějaká přímka tyto body obsahovala, byla by podle 1.11 totožná s p, což není možné, neboť A neleží na p. Podle 2.18 existuje rovina τ, která obsahuje body A, B, C a podle 3.7 leží p v τ. Jestliže rovina τ_1 prochází bodem A a přímkou p, pak obsahuje body A, B, C a je podle 2.18 totožná s τ.

3.9. *Nechť p je přímka a z zaměření, nechť*

$$z \neq \zeta(p) \,. \tag{2}$$

Pak existuje právě jedna rovina, která obsahuje přímku p a jejíž zaměření je kolmé k zaměření z.

Důkaz. Na přímce p zvolme bod A. Podle IV existuje bod B, pro nějž platí $\zeta(AB) = z$, tedy $\zeta(AB) \neq \zeta(p)$, takže B neleží na přímce p. Podle 3.8 existuje rovina τ, která obsahuje přímku p a bod B. Užitím 3.2 máme

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau) \perp \zeta(AB) = z\,. \tag{3}$$

Jestliže za druhé rovina τ_1 obsahuje přímku p a má zaměření kolmé k zaměření z, jest

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1) \perp z\,. \tag{4}$$

Z (2), (3), (4) plyne podle VII, že roviny τ, τ_1 mají stejná zaměření. Ježto obě obsahují bod A, jsou podle 2.14 totožné.

3.10. *Dvěma různoběžkami prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť p, q jsou různoběžky a A jejich společný bod. Podle 1.19 je $\zeta(p) \neq \zeta(q)$, takže existuje zaměření z, pro něž platí

$$\zeta(p) \perp z \perp \zeta(q)\,. \tag{5}$$

Podle 2.14 existuje rovina τ, která prochází bodem A a má zaměření z. Z 3.1 plyne, že přímky p, q leží v τ. Jestliže rovina τ_1 obsahuje přímky p, q, jest podle 3.2

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1) \perp \zeta(q)\,. \tag{6}$$

Z (5) a (6) plyne podle VII $\zeta(\tau_1) = z$. Rovina τ_1 obsahuje tedy bod A a má zaměření z, takže podle 2.14 je totožná s τ.

3.11. *Dvěma různými rovnoběžnými přímkami prochází právě jedna rovina.*

Důkaz. Nechť přímky p, q jsou různé a mají obě totéž zaměření. Zvolme na q bod A. Podle 1.15 jsou p, q disjunktní, takže A neleží na p. Podle 3.8 existuje rovina τ, která prochází přímkou p a bodem A. Z 3.2 plyne $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Ježto $\zeta(p) = \zeta(q)$, jest také $\zeta(q) \perp \zeta(\tau)$, a užijeme-li 3.1, dostaneme, že q leží v τ. Prochází-li rovina τ_1 přímkami p, q, prochází přímkou p a bodem A, a z 3.8 plyne $\tau_1 = \tau$.

3.12. *Jestliže body A, B, C, D neleží v rovině, pak jsou navzájem různé a žádné tři z nich neleží v přímce.*

Důkaz. Předpokládejme, že na př. body A, B, C leží na přímce p. Jestliže D neleží na p, označme τ rovinu, která prochází přímkou p a bodem D. Taková rovina τ existuje podle 3.8. Jestliže bod D leží na p, existuje podle 1.10 bod E, který neleží na p. Označme pak τ rovinu, která prochází přímkou p a bodem E. Rovina τ v obou případech obsahuje body A, B, C, D, což je spor s předpokladem. Tedy žádné tři z bodů A, B, C, D neleží v přímce. Nyní užijeme věty 1.12 na trojice A, B, C, A, B, D, B, C, D.

3.13. *Existují čtyři body, které neleží v rovině.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina; označme ji τ. Podle 2.7 obsahuje τ body A, B, C, které neleží v přímce, a podle 2.17 existuje bod D, který neleží v τ.

Kdyby nějaká rovina τ_1 obsahovala body A, B, C, D, byla by podle 2.18 totožná s τ. To však není možné, neboť D neleží v τ.

3.14. Definice. *Pravíme, že přímka p a rovina τ jsou rovnoběžné, je-li* $\zeta(p) \perp \perp \zeta(\tau)$.

3.15. *Leží-li přímka p v rovině τ, pak p a τ jsou rovnoběžné.*

Důkaz plyne z 3.2.

3.16. *Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou τ, pak buď p leží v τ nebo p a τ jsou disjunktní.*

Důkaz. Podle předpokladu jest $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Nejsou-li p, τ disjunktní, plyne z 3.1, že p leží v τ.

3.17. *Existují přímka a rovina, které jsou disjunktní rovnoběžné.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina τ a podle 2.17 existuje bod A, který neleží v τ. Podle 2.1 existuje zaměření $z \perp \zeta(\tau)$ a podle 1.7 existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření z. Přímka p je rovnoběžná s τ, avšak neleží v τ, neboť bod A neleží v τ. Z 3.16 plyne, že p, τ jsou disjunktní.

3.18. *Nechť p je přímka, τ rovina. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, τ jsou disjunktní,*
2. *p, τ mají společný právě jeden bod,*
3. *p leží v τ.*

Důkaz. Protože každá přímka obsahuje aspoň dva různé body, nemohou nastat zároveň žádné dva z uvedených tří případů. Nejsou-li p, τ disjunktní, mají společný aspoň jeden bod. Mají-li společný více než jeden bod, leží p v τ podle 3.7.

3.19 Definice. *Pravíme, že přímka p a rovina τ jsou různoběžné, mají-li společný právě jeden bod.*

3.20. *Jsou-li přímka p a rovina τ různoběžné, pak p neleží v τ a jest* $\zeta(p)$ non $\perp \perp \zeta(\tau)$.

Důkaz. Kdyby p ležela v τ, nastávaly by zároveň případy 2, 3 z věty 3.18, což tato věta nepřipouští. Kdyby bylo $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, byly by p, τ rovnoběžné. Ježto p neleží v τ, byly by podle 3.16 p a τ disjunktní, takže by nastávaly zároveň případy 2, 1 z věty 3.18. To však není možné.

3.21. *Existují přímka p a rovina τ, které jsou různoběžné.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina. Označme ji τ a zvolme na ní libovolný bod A. Podle 1.7 existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(\tau)$. Kdyby p ležela v τ, bylo by podle 3.2 $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, to jest $\zeta(\tau) \perp \zeta(\tau)$, což by byl spor s VI. Z 3.18 plyne, že p, τ jsou různoběžné.

3.22. *Existují přímka p a rovina τ, pro něž nastává případ* 1 *z věty* 3.18. *Existují přímka p a rovina τ, pro něž nastává případ* 2 *z věty* 3.18. *Existují přímka p a rovina τ, pro něž nastává případ* 3 *z věty* 3.18.

Důkaz. První dvě tvrzení plynou z 3.17 a 3.21. Třetí plyne z druhého tvrzení věty 2.29.

3.23. *Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou τ_1 a rovina τ_1 rovnoběžná s rovinou τ_2, je p rovnoběžná s τ_2.*

Důkaz. Podle předpokladu je $\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1)$ a $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$. Tedy je $\zeta(p) \perp$. $\perp \zeta(\tau_2)$.

3.24. *Přímka p je rovnoběžná s rovinou τ tehdy a jen tehdy, je-li rovnoběžná aspoň s jednou přímkou roviny τ.*

Důkaz. 1. Je-li p rovnoběžná s přímkou q, která leží v τ, jest podle 3.2 $\zeta(p) = \zeta(q) \perp \zeta(\tau)$, takže p a τ jsou rovnoběžné.

2. Nechť p je rovnoběžná s τ, takže platí $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. V rovině τ zvolme bod A a označme q přímku, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(p)$. Taková přímka existuje podle 1.7. Přímky p, q jsou rovnoběžné a z 3.1 plyne, že q leží v τ.

3.25. *Rovina τ_1 je rovnoběžná s rovinou τ_2 tehdy a jen tehdy, obsahuje-li dvě různoběžky, které jsou obě rovnoběžné s τ_2.*

Důkaz. 1. Nechť τ_1 obsahuje různoběžné přímky p, q, z nichž každá je rovnoběžná s rovinou τ_2. Označíme-li $z_1 = \zeta(p_1)$, $z_2 = \zeta(q)$, jest podle předpokladu $z_1 \perp \zeta(\tau_2) \perp z_2$, podle 1.19 $z_1 \neq z_2$ a podle 3.2 $z_1 \perp \zeta(\tau_1) \perp z_2$. Z toho plyne podle VII $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$, takže τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné.

2. Nechť roviny τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné. Podle 3.5 obsahuje τ_1 dvě různoběžné přímky p, q a podle 3.2 platí

$$\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)\,, \qquad \zeta(q) \perp \zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)\,,$$

takže p, q jsou rovnoběžné s τ_2.

3.26. *Nechť přímka p je rovnoběžná s rovinami τ_1, τ_2, nechť roviny τ_1, τ_2 jsou různoběžné. Potom p je rovnoběžná s průsečnicí rovin τ_1, τ_2.*

Důkaz. Podle předpokladu jest $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(p) \perp \zeta(\tau_2)$ a podle 2.27 $\zeta(\tau_1) \neq$ $\neq \zeta(\tau_2)$. Označíme-li q průsečnici rovin τ_1, τ_2, plyne z 3.2 $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(q) \perp \zeta(\tau_2)$. Odtud podle VII $\zeta(p) = \zeta(q)$, takže p, q jsou rovnoběžné.

3.27. *Nechť roviny τ_1, τ_2 jsou různoběžné, nechť přímka p leží v τ_1 a je rovnoběžná s τ_2. Potom p je rovnoběžná s průsečnicí rovin τ_1, τ_2.*

Důkaz. Podle 3.15 je p rovnoběžná s τ_1, takže podle 3.26 platí 3.27.

3.28. *Nechť rovina τ je různoběžná s rovinami τ_1, τ_2, nechť roviny τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné. Potom průsečnice rovin τ, τ_1 je rovnoběžná s průsečnicí rovin τ, τ_2.*

Důkaz. Označme p_i $(i = 1, 2)$ průsečnici rovin τ, τ_i. Přímka p_1 leží v rovině τ i v rovině τ_1. Podle 3.15 je rovnoběžná s τ_1 a podle 3.23 rovnoběžná s τ_2. Vezmeme-li ve větě 3.27 p_1, τ, τ_2 místo p, τ_1, τ_2, dostáváme, že p_1 je rovnoběžná s p_2.

3.29. *Nechť τ je rovina, A bod. Potom sjednocení všech přímek, které procházejí bodem A a jsou rovnoběžné s rovinou τ, je rovina, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ.*

Důkaz. Označme τ_1 sjednocení všech přímek, které procházejí bodem A a jsou rovnoběžné s rovinou τ. Podle 1.7 existuje aspoň jedna taková přímka, neboť podle 2.1 existuje zaměření $z \perp \zeta(\tau)$. Speciálně tedy bod A patří do množiny τ_1. Dále označme τ_2 rovinu, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ. Podle 2.22 existuje právě jedna taková rovina; z 2.15 plyne, že to je množina všech bodů X, pro něž platí

$$\text{buď } X = A \text{ nebo } \zeta(AX) \perp \zeta(\tau) . \tag{7}$$

Ježto bod A patří do množiny τ_1 i do množiny τ_2, budeme dále uvažovat jen body $X \neq A$. 1. Budiž $X \in \tau_1$, $X \neq A$. Pak existuje přímka p tak, že platí $A \in p$, $X \in p$, $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Tedy jest $\zeta(AX) = \zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, takže $X \in \tau_2$ (viz (7)). 2. Budiž $X \in \tau_2$, $X \neq A$. Označíme-li p přímku, procházející body A, X, jest vzhledem k (7) $\zeta(p) = \zeta(AX) \perp \zeta(\tau)$, takže p je rovnoběžná s rovinou τ a prochází bodem A. Tedy $X \in \tau_1$.

3.30. Definice. *Pravíme, že přímka p je kolmá k rovině τ, platí-li $\zeta(p) = \zeta(\tau)$.*

3.31. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ, pak p neleží v τ a není s τ rovnoběžná.*

Důkaz. Z VI plyne, že je-li p kolmá k τ, nemůže být rovnoběžná s τ. Podle 3.15 pak p nemůže ležet v τ.

3.32. *Existují přímka p a rovina τ tak, že p je kolmá k τ.*

Důkaz. Podle 2.16 existuje rovina — označme ji τ — a podle I bod A. Z 1.7 plyne, že existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(\tau)$. Tedy p je kolmá k τ.

3.33. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ_1 a k rovině τ_2, pak roviny τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné.*

Důkaz. Podle předpokladu je $\zeta(p) = \zeta(\tau_1)$ a $\zeta(p) = \zeta(\tau_2)$, takže $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$.

3.34. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ_1 a rovina τ_1 rovnoběžná s rovinou τ_2, je přímka p kolmá k rovině τ_2.*

Důkaz. Podle předpokladu je $\zeta(p) = \zeta(\tau_1)$ a $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$, takže je $\zeta(p) = \zeta(\tau_2)$.

3.35. *Nechť přímka p není kolmá k rovině τ. Pak existuje právě jedna rovina, která obsahuje přímku p a je kolmá k rovině τ.*

Důkaz. Podle předpokladu jest $\zeta(p) \neq \zeta(\tau)$. Že rovina τ_1 obsahuje přímku p a je kolmá k rovině τ, znamená totéž, jako že τ_1 obsahuje přímku p a její zaměření je kolmé k zaměření $\zeta(\tau)$. Taková rovina τ_1 existuje podle 3.9, a to právě jedna.

3.36. *Je-li rovina τ kolmá ke dvěma různoběžným rovinám τ_1, τ_2, je kolmá i k jejich průsečnici.*

Důkaz. Podle předpokladu jest $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau) \perp \zeta(\tau_2)$ a podle 2.27 $\zeta(\tau_1) \neq \zeta(\tau_2)$. Označíme-li q průsečnici rovin τ_1, τ_2, plyne z 3.2 $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(q) \perp \zeta(\tau_2)$. Odtud podle VII $\zeta(\tau) = \zeta(q)$, což znamená, že přímka q je kolmá k rovině τ.

3.37 Definice. *Přímky p, q nazýváme kolmé, platí-li $\zeta(p) \perp \zeta(q)$.*

3.38. *Jsou-li přímky p, q kolmé, pak nejsou totožné ani rovnoběžné.*

Důkaz plyne z VI.

3.39. *Existují dvě kolmé přímky.*

Důkaz. Podle I existuje bod A a zaměření z_1. Podle 2.1 existuje zaměření $z_2 \perp z_1$. Z 1.7 plyne existence přímek p_i $(i = 1, 2)$, z nichž každá prochází bodem A a má zaměření z_i.

3.40. *Je-li přímka p kolmá k rovině τ, pak je kolmá ke každé přímce, která leží v τ.*

Důkaz. Nechť přímka q leží v τ. Potom jest podle předpokladu a podle 3.2 $\zeta(p) = \zeta(\tau) \perp \zeta(q)$, takže p, q jsou kolmé.

3.41. *Přímka p je kolmá k rovině τ tehdy a jen tehdy, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám ležícím v τ.*

Důkaz. 1. Nechť p je kolmá k různoběžným přímkám q_1, q_2, které leží v τ. Platí tedy $\zeta(q_1) \perp \zeta(p) \perp \zeta(q_2)$, dále podle 1.19 $\zeta(q_1) \neq \zeta(q_2)$ a podle 3.2 $\zeta(q_1) \perp \zeta(\tau) \perp \zeta(q_2)$. Odtud plyne podle VII $\zeta(p) = \zeta(\tau)$, takže p je kolmá k τ. 2. Nechť p je kolmá k τ. Podle 3.5 obsahuje τ dvě různoběžky a podle 3.40 je p ke každé z těchto různoběžek kolmá.

3.42. *Rovina τ_1 je kolmá k rovině τ_2 tehdy a jen tehdy, obsahuje-li aspoň jednu přímku kolmou k τ_2.*

Důkaz. 1. Nechť τ obsahuje přímku p, která je kolmá k τ_2. Pak jest jednak $\zeta(p) = \zeta(\tau_2)$, jednak podle 3.2 $\zeta(p) \perp \zeta(\tau_1)$, tedy $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$, takže roviny τ_1, τ_2 jsou kolmé. 2. Nechť roviny τ_1, τ_2 jsou kolmé, takže $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$. Zvolme v rovině τ_1 bod A. Podle 1.7 existuje přímka p, která prochází bodem A a má zaměření $\zeta(\tau_2)$. Tedy p je kolmá k τ_2 a z 3.1 plyne, že leží v τ_1.

3.43. Definice. *Přímky p, q nazýváme mimoběžné, neleží-li v rovině.*

3.44. *Jsou-li přímky p, q mimoběžné, jsou disjunktní (tedy navzájem různé) a jest $\zeta(p) \neq \zeta(q)$.*

Důkaz. Uvažme nejprve, že ke každé přímce existuje rovina, která tuto přímku obsahuje. To plyne na př. z 1.10 a 3.8. Tedy přímky p, q nemohou být totožné. Podle 3.10 nemohou být ani různoběžné, takže podle 1.17 jsou disjunktní. Kdyby bylo $\zeta(p) = \zeta(q)$, byly by p, q rovnoběžné disjunktní a věta 3.11 by vedla ke sporu. Tedy je $\zeta(p) \neq \zeta(q)$.

3.45. *Existují dvě mimoběžné přímky.*

Důkaz. Podle 3.13 existují body A, B, C, D, které neleží v rovině. Podle 3.12 jsou tyto body navzájem různé. Označme p přímku, procházející body

A, B, a q přímku, procházející body C, D. Přímky p, q existují podle 1.11. Kdyby nějaká rovina obsahovala přímky p, q, obsahovala by body A, B, C, D, a to není možné.

3.46. *Jsou-li přímky p, q mimoběžné, pak existuje právě jedna rovina, která obsahuje přímku p a je rovnoběžná s přímkou q.*

Důkaz. Podle 3.44 je $\zeta(p) \neq \zeta(q)$. Že rovina τ obsahuje přímku p a je rovnoběžná s přímkou q, znamená totéž, jako že τ obsahuje přímku p a její zaměření je kolmé k zaměření $\zeta(q)$. Podle 3.9 taková rovina τ existuje, a to právě jedna.

4. Euklidovské vlastnosti

K axiomům I až VIII připojme nyní ještě axiom IX.

4.1. *Je-li $A \neq B$ a z_1 non $\perp z_2$, pak existuje právě jeden bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$.*

Důkaz. Existence bodu C je zaručena axiomem IX. Předpokládejme dále, že body C_1, C_2 splňují vztahy

$$\zeta(AC_1) = z_1\,, \quad \zeta(BC_1) \perp z_2\,, \tag{1}$$

$$\zeta(AC_2) = z_1\,, \quad \zeta(BC_2) \perp z_2\,. \tag{2}$$

Označme p přímku, která prochází bodem A a má zaměření z_1, a τ rovinu, která prochází bodem B a má zaměření z_2. Taková přímka a rovina existují podle 1.7 a 2.14. Z těchto vět zároveň plyne s ohledem na (1) a (2), že body C_1, C_2 leží na přímce p i v rovině τ. Kdyby bylo $C_1 \neq C_2$, ležela by p podle 3.7 v τ a bylo by podle 3.2 $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$, to jest $z_1 \perp z_2$, což by byl spor s předpokladem.

4.2. *Jestliže přímka p není rovnoběžná s rovinou τ, pak s ní má společný právě jeden bod.*

Důkaz. Přímka p má s rovinou τ společný nejvýše jeden bod. Jinak by totiž podle 3.7 ležela v τ a tedy byla podle 3.15 rovnoběžná s τ proti předpokladu. Existují tedy body $A \in p$, A non $\in \tau$, $B \in \tau$, B non $\in p$, takže $A \neq B$.

Označme z_1 zaměření přímky p, z_2 zaměření roviny τ. Protože p není rovnoběžná s τ, jest z_1 non $\perp z_2$. Podle IX existuje bod C, pro nějž platí $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$. Odtud plyne podle 1.8 $C \in p$ a podle 2.15 $C \in \tau$, takže p a τ mají společný aspoň jeden bod.

4.3. *Jestliže přímka p je kolmá k rovině τ, pak s ní má společný právě jeden bod.*

Důkaz plyne z 3.31 a 4.2.

4.4. *Jestliže přímka p a rovina τ jsou disjunktní, pak p je rovnoběžná s τ.*

Důkaz plyne z 4.2.

4.5. *Nechť p je přímka, τ rovina. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, τ jsou rovnoběžné disjunktní,*
2. *p, τ jsou různoběžné,*
3. *p leží v τ.*

Důkaz plyne z 3.18 a 4.4.

4.6. *Jestliže roviny τ_1, τ_2 nejsou rovnoběžné, pak se protínají v přímce.*

Důkaz. Podle 3.5 obsahuje rovina τ_1 dvě různoběžné přímky p, q. Kdyby každá z těchto přímek byla rovnoběžná s rovinou τ_2, byly by τ_1, τ_2 podle 3.25 rovnoběžné, což podle předpokladu nenastává. Tedy jedna z přímek p, q — budiž to třeba přímka p — není rovnoběžná s rovinou τ_2. Podle 4.2 existuje bod, který leží v rovině τ_2 a na přímce p, tedy i v rovině τ_1. Roviny τ_1, τ_2 tedy nejsou disjunktní a také ne totožné, neboť pak by byly rovnoběžné. Z 2.25 plyne, že se protínají v přímce.

4.7. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 kolmé, pak se protínají v přímce.*

Důkaz plyne z 2.31 a 4.6.

4.8. *Jsou-li roviny τ_1, τ_2 disjunktní, jsou rovnoběžné.*

Důkaz plyne z 4.6.

4.9. *Nechť τ_1, τ_2 jsou roviny. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *τ_1, τ_2 jsou rovnoběžné disjunktní,*
2. *τ_1, τ_2 jsou různoběžné,*
3. *τ_1, τ_2 jsou totožné.*

Důkaz plyne z 2.25 a 4.8.

4.10. *Budiž τ rovina a A bod, který neleží v τ. Pak existuje právě jedna rovina, která prochází bodem A a je disjunktní s rovinou τ. Je to rovina, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ.*

Důkaz. Podle 2.22 existuje rovina τ_1, která prochází bodem A a je rovnoběžná s rovinou τ. Roviny τ, τ_1 nejsou totožné, neboť A leží v τ_1 a neleží v τ. Jsou tedy podle 2.20 disjunktní. Jestliže rovina τ_2 prochází bodem A a je disjunktní s rovinou τ, pak je podle 4.8 rovnoběžná s τ a podle 2.22 totožná s τ_1.

4.11. *Jestliže přímky p_1, p_2 leží v rovině a nejsou rovnoběžné, pak mají společný právě jeden bod.*

Důkaz. Přímky p_1, p_2 mají společný nejvýše jeden bod. Jinak by byly podle 1.11 totožné a tedy rovnoběžné proti předpokladu. Označme τ rovinu, v níž leží přímky p_1, p_2. Podle 3.31 nejsou přímky p_1, p_2 kolmé k τ. Podle 3.35 existují roviny τ_i ($i = 1, 2$) tak, že τ_i obsahuje přímku p_i a je kolmá k rovině τ. Přímka p_i leží v rovině τ_i i v rovině τ a tyto roviny se podle 4.7 protínají v přímce. Z 1.5 plyne, že touto přímkou je přímka p_i. Kdyby roviny τ_1, τ_2 byly rovnoběžné, byly by podle 3.28 i přímky p_1, p_2 rovnoběžné, což by byl spor s předpokladem. Z 4.9 plyne, že τ_1, τ_2 jsou různoběžné. Označme q jejich průsečnici. Podle 3.36 je přímka q kolmá k rovině τ, takže s ní má podle 4.3 společný bod; označme jej A. Protože $A \in q \subset \tau_i$ $(i = 1, 2)$, $A \in \tau$, leží bod A na průsečnici p_i rovin τ_i, τ. Tedy přímky p_1, p_2 mají společný aspoň jeden bod.

4.12. *Jestliže přímky p, q leží v rovině a jsou disjunktní, pak jsou rovnoběžné.*

Důkaz plyne z 4.11.

4.13. *Nechť přímka p a bod A leží v rovině τ, nechť A neleží na p. Potom existuje v rovině τ právě jedna přímka, která prochází bodem A a je disjunktní s přímkou p. Je to přímka, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p.*

Důkaz. Podle 3.3 existuje v rovině τ přímka q, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p. Přímky p, q nejsou totožné, neboť A leží na q a neleží na p. Tedy jsou podle 1.15 disjunktní. Jestliže přímka q_1 leží v rovině τ, prochází bodem A a je disjunktní s přímkou p, pak je podle 4.12 rovnoběžná s p a podle 3.3 totožná s q.

4.14. *Nechť přímky p, q leží v rovině. Pak nastává právě jeden z těchto tří případů:*

1. *p, q jsou disjunktní rovnoběžné,*
2. *p, q jsou různoběžné,*
3. *p, q jsou totožné.*

Důkaz plyne z 1.17 a 4.12.

Резюме

К ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ
I. НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ФИГУРЫ

БОРИС ГРУБЕР (Boris Gruber), Подебрады.
(Поступило в редакцию 3/X 1955 г.)

Работа посвящена аксиоматическому построению оснований трехмерной евклидовой геометрии. В настоящей первой части исследуются свойства инцидентности, параллельности, перпендикулярности, равно как и следствия пятого постулата Евклида о параллельных.

Основными понятиями являются: *точка, неориентированное направление и перпендикулярность.* Каждой паре различных точек A, B поставлено в соответствие одно и только одно (неориентированное) направление, обозначаемое через $\zeta(AB)$. Два направления z_1, z_2 являются, или взаимно перпендикулярными (символ $z_1 \perp z_2$), или неперпендикулярными (символ

z_1 non $\perp z_2$). Множество всех точек называем пространством и обозначаем через $\mathbf{P}$. Эти понятия удовлетворяют следующим девяти аксиомам:

I. *Существует по меньшей мере одна точка и по меньшей мере одно (неориентированное) направление.*

II. $A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BA)$.

III. $\zeta(AB) = \zeta(AC),\ B \neq C \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BC)$.

IV. *Если дана точка A и направление z, то существуют точки B, C так, что $\zeta(AB) = z$, $\zeta(AC) \neq z$.*

V. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_2 \perp z_1$.

VI. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_1 \neq z_2$.

VII. *Если $z_1 \neq z_2$, то существует в точности одно направление z, для которого $z_1 \perp z \perp z_2$.*

VIII. $\zeta(AB) \perp z,\ \zeta(AC) \perp z,\ B \neq C \Rightarrow \zeta(BC) \perp z$.

IX. *Если $A \neq B$ и z_1 non $\perp z_2$, то существует точка C, для которой $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp z_2$.*

На основании первых четырех аксиом разработано главным образом понятие прямой, затем присоединением дальнейших четырех, понятие плоскости. Из девятой аксиомы следует пятый постулат Евклида о параллельных.

Прямая вводится так: *множество $M \subset \mathbf{P}$ мы называем максимальным множеством со свойством V, если*

1. *M обладает свойством V,*

2. *если $M \subset M' \subset \mathbf{P}$, $M \neq M'$, то M' не обладает свойством V.*

Тогда мы называем прямой такое множество $p \subset \mathbf{P}$, которое

1. *содержит хотя бы две различные точки,*

2. *является максимальным множеством, имеющим следующее свойство:*

$$A, B, C, D \in p, \quad A \neq B,\ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD)\,.$$

Очевидно, любым двум различным точкам прямой p отвечает одно и то же (неориентированное) направление, которое мы называем неориентированным направлением прямой p и обозначаем через $\zeta(p)$. Две прямые мы называем параллельными, если их неориентированное направление одинаково. Мы называем их взаимно перпендикулярными, если их направления перпендикулярны, и пересекающимися, если они имеют в точности одну общую точку.

Для большего удобства при работе с понятием прямой мы будем пользоваться следующей теоремой:

Пусть A — точка, z — направление; тогда множество всех точек X, для которых имеет место или $X = A$ или $\zeta(AX) = z$, является прямой, содер-

жащей точку A и имеющей направление z. При помощи аксиом I—IV доказан ряд теорем о существовании и определенности прямых.

Плоскость определяется так: *множество $\tau \subset \mathbf{P}$ мы называем плоскостью, если*

1. *оно содержит хотя бы две различные точки,*

2. *существует такое направление z, что τ является максимальным множеством, имеющим следующее свойство:*

$$A, B \in \tau,\ A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z\,. \tag{*}$$

Показано, что если τ — плоскость, то существует в точности одно такое направление z, что τ является максимальным множеством со свойством (*). Это направление z мы называем неориентированным направлением, перпендикулярным к плоскости τ или, короче, направлением плоскости τ и обозначаем через $\zeta(\tau)$. Плоскости τ_1, τ_2 мы называем параллельными, соотв. перпендикулярными, если $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$ соотв. $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$. Мы их называем пересекающимися, если они пересекаются в прямой. Прямую p называем параллельной плоскости τ, если $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Мы называем ее перпендикулярной к плоскости τ, если $\zeta(p) = \zeta(\tau)$. Мы говорим, что прямая p и плоскость τ пересекаются, если они имеют в точности одну общую точку. Две прямые называем скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Исходной точкой рассуждений о плоскостях является теорема:

Пусть A — точка и z — направление; тогда множество всех точек X, для которых имеет место или $X = A$ или $\zeta(AX) \perp z$, будет плоскостью, содержащей точку A и имеющей направление z.

Отсюда затем выводятся основные теоремы стереометрии о существовании и определенности плоскости, равно как и известные теоремы о параллельности и перпендикулярности плоскостей и прямых.

В работе уделяется внимание вопросам о существовании для того, чтобы показать, что сформулированные теоремы непусты.

Résumé

UNE ÉTUDE DES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE
I. LES FIGURES NON ORIENTÉES

BORIS GRUBER, Poděbrady.

(Reçu le 3 octobre 1955.)

Le présent travail construit, par la méthode axiomatique, les fondements de la géometrie euclidienne. La première partie publiée étudie des propriétés d'incidence, de parallélisme, de perpendicularité, et les conséquences du cin-

quième postulat euclidien des parallèles. Les notions fondamentales sont ,,point", ,,direction non orientée"*) et ,,perpendiculaire". A chaques deux points différents A, B est associée une direction, que nous désignons par $\zeta(AB)$. Deux directions z_1, z_2 sont ou perpendiculaires (signe $z_1 \perp z_2$), ou non perpendiculaires (z_1 non $\perp z_2$). L'ensemble de tous les points est appelé espace et il est désigné par $\mathbf{P}$. Ces notions accomplissent les neuf axiomes suivants:

I. *Il existe au moins un point et une direction.*

II. $A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BA)$.

III. $\zeta(AB) = \zeta(AC), \quad B \neq C \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BC)$.

IV. *Soit A un point et z une direction. Il existe des points B, C tels que $\zeta(AB) = z, \quad \zeta(AC) \neq z$.*

V. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_2 \perp z_1$.

VI. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_1 \neq z_2$.

VII. *Soit $z_1 \neq z_2$. Il n'existe qu'une direction z, pour laquelle $z_1 \perp z \perp z_2$.*

VIII. $\zeta(AB) \perp z, \ \zeta(AC) \perp z, \ B \neq C \Rightarrow \zeta(BC) \perp z$.

IX. *Soit $A \neq B$, z_1 non $\perp z_2$. Il existe un point C tel que $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp \perp z_2$.*

La notion de droite est construite avec les quatre premiers axiomes. En ajoutant les quatre axiomes suivants, la notion de plan est fondée. Le cinquième postulat euclidien des parallèles résulte du neuvième axiome.

La droite est introduite ainsi: *Un ensemble $M \subset \mathbf{P}$ est appelé ensemble maximal de la propriété V, si*

1° *M possède la propriété V,*

2° *si $M \subset M' \subset \mathbf{P}$, $M \neq M'$, alors M' ne possède pas la propriété V.*

Nous entendons par droite l'ensemble $p \subset \mathbf{P}$ qui

1° *contient au moins deux points différents,*

2° *est l'ensemble maximal de la propriété suivante:*

$$A, B, C, D \in p, \ A \neq B, \ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD) \ .$$

A chaques deux points différents de la droite p appartient évidemment la même direction que nous appelons direction de la droite p; nous la désignons par $\zeta(p)$. Deux droites sont appelées parallèles, si elles ont la même direction. On les apelle perpendiculaires, si leurs directions sont perpendiculaires.

Avec la notion de ,,droite" on manipule avec facilité en appliquant le théorème suivant:

Soit A un point, z une direction; la droite de la direction z qui passe par le point A est ainsi l'ensemble de tous les points X pour lesquels on a ou bien $X = A$, ou bien

*) Ci-après ,,direction" seulement.

$\zeta(AX) = z$. A l'aide des axiomes I—IV on démontre quelques théorèmes d'existence et d'unicité des droites.

Le plan est défini ainsi: *L'ensemble* $\tau \subset \mathbf{P}$ *sera appelé „plan", s'il*

1° *contient au moins deux points différents,*

2° *il existe une direction* z*, telle que* τ *est l'ensemble maximal de la propriété suivante:*

$$A, B \in \tau\,, \quad A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z\,. \tag{*}$$

De cette définition découle: si τ est un plan, il n'existe qu'une direction z telle que τ est l'ensemble maximal de la propriété (*). Cette direction z est appelée direction perpendiculaire au plan τ ou en peu de mots direction du plan τ. Nous la désignons par $\zeta(\tau)$. On appelle deux plans parallèles, s'ils possèdent la même direction. On les appelle perpendiculaires, si leurs directions sont perpendiculaires. Une droite p est dite parallèle au plan τ, si $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. On l'appelle perpendiculaire au plan τ, si $\zeta(p) = \zeta(\tau)$.

Pour ce qui concerne le plan, on applique le théorème suivant:

Soit A *un point,* z *une direction; l'ensemble de tous les points* X *pour lesquels on a ou* $X = A$*, ou* $\zeta(AX) = z$*, est le plan qui contient le point* A*, et qui possède la direction* z*.*

De là on déduit des théorèmes stéréométriques d'existence et d'unicité d'un plan ainsi que des théorèmes bien connus sur le parallélisme et la perpendicularité des plans et des droites.

Dans ce travail on concentre l'attention sur les questions d'existence.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O HELLINGEROVĚ INTEGRÁLU

ILJA ČERNÝ, Praha.

(Došlo dne 6. 12. 1955.) DT: 517.65

V článku jsou vyšetřovány některé jednoduché vlastnosti integrálu $\int_a^b \frac{|df(x)|^p}{|dg(x)|^{p-1}}$ a variace $p - \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}\,(f, g)$ a jejich převedení na Lebesgueův integrál.

Integrály typu vyšetřovaného v tomto článku se po prvé zabýval v roce 1907 E. Hellinger. Při studiu spekter kvadratických forem nekonečně mnoha proměnných dospěl k výrazům, které mají některé vlastnosti integrálů a o nichž soudil, že se nedají převést na Lebesgueův integrál. (*E. Hellinger*: Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Dissertation, Göttingen 1907; Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Journal f. r. u. a. Math., B. 136, 1909.) Tyto výrazy byly nazvány „Hellingerovy integrály". V roce 1912 se Hahnovi (*H. Hahn*: Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Monatsh. f. Math. u. Physik, XXIII, 1912) podařilo tyto integrály převést na Lebesgueovy. Od té doby nalezly integrály Hellingerova typu použití i jinde, na př. při otázkách obecného vyjádření lineárních operátorů v některých polouspořádaných nebo normovaných lineárních prostorech (*Канторович-Вулих-Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах), ve statistice (*H. Cramér*: Mathematical Methods of Statistics) a jinde.

Pokud vím, nebyly vlastnosti operace Hellingerova integrování podrobněji vyšetřovány. V Hahnově práci se v podstatě vyskytují jen speciální případy vět 1,8 a 2,1 tohoto článku. Hellinger i Hahn se zabývají integrály typu $\int_a^b \frac{(df(x))^2}{dg(x)}$, při čemž se předpokládá, že g je spojitá a monotonní.

První kapitola tohoto článku obsahuje definici Hellingerova integrálu vhodnou pro obecnější funkce f a g. Hahn definoval integrál tak, jak jsme my v definici 1,2 zavedli $\operatorname*{var}\limits_{a}^{b}(f, g)$. Tento postup souhlasí s naším, jestliže funkce g je spojitá a monotonní, v jiných případech se však zřejmě nehodí. Souvislost mezi Hahnovou definicí a definicí 1,1 je obsahem vět 1,6 a 1,7.

Druhá kapitola obsahuje věty o převedení Hellingerova integrálu na Lebesgueův se slabšími předpoklady o funkcích f a g, než uvádí Hahn. Při důkazu užívám Vitaliovy věty, která umožnila důkaz zkrátit a učinit přehlednějším.

1. Definice a některé základní vlastnosti Hellingerova integrálu

Definice 1,1. Buďte dány dvě (konečné) reálné funkce f a g na (omezeném) intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $p > 1$. Nechť platí tato podmínka: Je-li pro dva body x_1, x_2 z $\langle a, b\rangle$ $g(x_1) = g(x_2)$, je též $f(x_1) = f(x_2)$. Označíme pro stručnost

$$M_p(x_1, x_2) = \frac{|f(x_1) - f(x_2)|^p}{|g(x_1) - g(x_2)|^{p-1}}$$

a činíme jednou pro vždy tuto úmluvu: „Podílu“ $M_p(x_1, x_2)$, v němž jmenovatel (a tedy též čitatel) je roven 0, dáváme hodnotu 0.

Při této úmluvě můžeme každému dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ přiřadit součet

$$H_p(f, g; D) = \sum_{i=1}^{n} M_p(x_{i-1}, x_i) .$$

Označíme $\nu(D) = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$. Jestliže pro každou posloupnost dělení $\{D_n\}$, pro niž $\nu(D_n) \to 0$, existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} H_p(f, g; D_n)$ — potom je ovšem tato limita nezávislá na volbě posloupnosti $\{D_n\}$ — označíme

$$\lim_{n\to\infty} H_p(f, g; D_n) = (p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) = \int_a^b \frac{|df(x)|^p}{|dg(x)|^{p-1}} .$$

Této limitě říkáme Hellingerův integrál p-tého stupně funkce f podle funkce g v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Úmluva. Nebude-li třeba obávat se nedorozumění, budeme místo $H_p(f, g; D)$ psát krátce $H_p(D)$ nebo $H(D)$, místo $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ podobně $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ nebo $\overset{b}{\underset{a}{H}}$, místo $M_p(x_1, x_2)$ symbol $M(x_1, x_2)$.

Poznámka 1,1. Existuje-li $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$, je to nezáporné číslo.

Věta 1,1. *Existuje-li* $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ *a je-li* $x \in (a, b)$, *existují též* $\overset{x}{\underset{a}{H}}(f, g)$ *a* $\overset{b}{\underset{x}{H}}(f, g)$ *a platí:*

$$\overset{b}{\underset{a}{H}} = \overset{x}{\underset{a}{H}} + \overset{b}{\underset{x}{H}} .$$

Důkaz. Budiž $x \in (a, b)$ a budiž $\{D'_n\}$ libovolná posloupnost dělení intervalu $\langle a, x\rangle$, pro niž $\nu(D'_n) \to 0$, $\{D''_n\}$ libovolná posloupnost dělení intervalu $\langle x, b\rangle$, pro niž $\nu(D''_n) \to 0$. Z posloupnosti $\{H(D''_n)\}$ lze vybrat posloupnost $\{H(D''_{n_k})\}$, která má (vlastní nebo nevlastní) limitu α. Jest

$$\lim_{k\to\infty} [H(D'_k) + H(D''_{n_k})] = \overset{b}{\underset{a}{H}},$$

odkud především plyne, že $\alpha < +\infty$ (neboť $H(D'_k) \geqq 0$), a také, že existuje vlastní $\lim_{k\to\infty} H(D'_k)$. Tedy existuje i $\overset{x}{\underset{a}{H}}$. Podobně se zjistí, že existuje $\overset{b}{\underset{x}{H}}$. Dále je

$$\overset{b}{\underset{a}{H}} = \lim_{n\to\infty} [H(D'_n) + H(D''_n)] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} H(D'_n) + \lim_{n\to\infty} H(D''_n) = \overset{x}{\underset{a}{H}} + \overset{b}{\underset{x}{H}}.$$

Označení. Existuje-li $\overset{b}{\underset{a}{H}}$, označíme

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x = a, \\ \overset{x}{\underset{a}{H}} & \text{pro} \quad x \in (a, b\rangle. \end{cases}$$

(Funkce h je pak neklesající v $\langle a, b\rangle$.)

Poznámka 1,3. Z existence $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ a $\overset{b}{\underset{x}{H}}$ neplyne obecně existence $\overset{b}{\underset{a}{H}}$. Příklad: Je-li $f(x) = g(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $f(0) = g(0) = 1$, je pro libovolné $p > 1$

$$(p) - \overset{0}{\underset{-1}{H}}(f, g) = (p) - \overset{1}{\underset{0}{H}}(f, g) = 1,$$

kdežto $\overset{1}{\underset{-1}{H}}(f, g)$ neexistuje, neboť pro každé dělení D intervalu $\langle -1, 1\rangle$, které obsahuje (resp. neobsahuje) bod 0, je $H_p(D) = 2$ (resp. $= 0$) nezávisle na $\nu(D)$.

Věta 1,2. *Nechť existuje* $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$. *Potom platí:*

1. $\lim\limits_{\substack{[x,y]\to[a,a] \\ x>a,\, y>a,\, x\neq y}} M_p(x, y) = 0.$

2. *Existuje vlastní* $\lim\limits_{x\to a+} M(a, x)$ *a rovná se* $\lim\limits_{x\to a+} \overset{x}{\underset{a}{H}}$.

3. *Je-li* $x_n > a$, $x_n \to a$ *a je-li posloupnost* $\{g(x_n)\}$ *omezená, existuje vlastní* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$; *existuje-li vlastní* $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$, *je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(x_n) - A|^p}{|g(x_n) - B|^{p-1}} = 0.$$

Speciálně: je-li g omezená zprava v bodě a, existuje vlastní $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a+)$; *existuje-li vlastní* $\lim_{x \to a+} g(x) = g(a+)$, *je*

$$\lim_{x \to a+} \frac{|f(x) - f(a+)|^p}{|g(x) - g(a+)|^{p-1}} = 0 .$$

4. *Je-li $g(x)$ spojitá v bodě a zprava, je též $f(x)$ spojitá v bodě a zprava a* $\lim_{x \to a+} M(a, x) = 0$.

5. *Je-li $f(x)$ spojitá v bodě a zprava, je* $\lim_{x \to a+} M(a, x) = 0$. *Je-li $g(x)$ omezená v okolí bodu a a je-li $f(x)$ nespojitá v bodě a zprava, je* $\lim_{x \to a+} M(a, x) \neq 0$.

6. *Je-li f spojitá v bodě a zprava, je i $h(x)$ spojitá v bodě a zprava. Je-li $g(x)$ omezená v okolí bodu a a je-li $f(x)$ nespojitá v bodě a zprava, je i $h(x)$ nespojitá v bodě a zprava.*

7. *Platí tvrzení analogická tvrzením 1—6, píšeme-li místo a všude c, kde c je libovolný bod z $\langle a, b)$. Platí tvrzení analogická tvrzením 1—6, píšeme-li místo a všude c, kde $c \in (a, b\rangle$, a mluvíme-li o konvergenci (a spojitosti) zleva v bodě c.*

Důkaz. 1. Kdyby tato limita buď neexistovala, nebo existovala, ale nebyla rovna nule, existovaly by dvě posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ a číslo $\varrho > 0$ tak, že $x_n \to a$, $y_n \to a$, $x_n \neq y_n$, $x_n > a$, $y_n > a$, $M(x_n, y_n) > \varrho$. Snadno vybereme posloupnosti $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$ tak, že

$$x_{n_{k+1}} < x_{n_k}, \quad x_{n_{k+1}} < y_{n_k}, \quad y_{n_{k+1}} < x_{n_k}, \quad y_{n_{k+1}} < y_{n_k} .$$

Najdeme $\delta > 0$ tak, že

$$\nu(D) < \delta \Rightarrow |\overset{b}{H} - H(D)| < 1 .$$

Můžeme předpokládat, že pro všechna k je $x_{n_k} \in (a, a + \delta)$, $y_{n_k} \in (a, a + \delta)$. Potom lze ke každému k sestrojit dělení D_k mající tyto vlastnosti:

) $\nu(D_k) < \delta$;

b) $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}, y_{n_1}, \ldots, y_{n_k}$ jsou dělicí body D_k;

c) mezi x_{n_i} a y_{n_i} ($i = 1, 2, \ldots, k$) neleží žádný bod dělení D_k.

Potom je $H(D_k) > k\varrho$, což není možné pro všechna k — spor.

2. Budiž $\alpha = \lim_{x \to a+} h(x)$. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $x \in (a, a + \delta_1) \Rightarrow$ $\Rightarrow |\overset{x}{\underset{a}{H}} - \alpha| < \varepsilon$. Existuje dále $\delta_2 > 0$ tak, že $\nu(D) < \delta_2 \Rightarrow |H(D) - \overset{b}{\underset{a}{H}}| < \varepsilon$. Budiž $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Zvolíme-li $x \in (a, a + \delta)$ libovolně, existuje dělení D' intervalu $\langle x, b\rangle$, pro něž je $\nu(D') < \delta_2$ a $|H(D') - \overset{b}{\underset{x}{H}}| < \varepsilon$. Označme D dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, které vznikne z D' přidáním bodu a; jest $\nu(D) < \delta_2$. Tedy

$$|M(a, x) - \alpha| = |H(D) - H(D') - \alpha| \leqq$$
$$\leqq |H(D) - \overset{b}{\underset{a}{H}}| + |\overset{b}{\underset{x}{H}} - H(D')| + |\overset{x}{\underset{a}{H}} - \alpha| < 3\varepsilon .$$

3. Předpokládejme, že neexistuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ a budiž $|g(x_n)| \leqq K$ pro všechna n. Z posloupnosti $\{x_n\}$ lze vybrat dvě posloupnosti $\{x'_n\}$ a $\{x''_n\}$ tak, že $|f(x'_n) - f(x''_n)| > \varrho > 0$ pro všechna n. Je však

$$|f(x'_n) - f(x''_n)|^p = M(x'_n, x''_n) \,.\, |g(x'_n) - g(x''_n)|^{p-1} \leqq (2K)^{p-1} \,.\, M(x'_n, x''_n) \,;$$

podle 1 by pak bylo $|f(x'_n) - f(x''_n)| \to 0$, což je spor.

Nechť nyní existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$. Kdyby podíl $\dfrac{|f(x_n) - A|^p}{|g(x_n) - B|^{p-1}}$ neměl limitu 0, existovala by vybraná posloupnost $\{x'_n\}$ a číslo $\varrho > 0$ tak, že

$$\frac{|f(x'_n) - A|^p}{|g(x'_n) - B|^{p-1}} > \varrho \text{ pro všechna } n \,.$$

Protože při pevném n je

$$\frac{|f(x'_n) - A|^p}{|g(x'_n) - B|^{p-1}} = \lim_{m\to\infty} \frac{|f(x'_n) - f(x'_m)|^p}{|g(x'_n) - g(x'_m)|^{p-1}} \,,$$

existuje ke každému n index $m(n)$ tak, že $a < x'_{m(n)} < x'_n$ a $M(x'_{m(n)}, x'_n) > > \varrho > 0$, což odporuje tvrzení 1.

Je-li $g(x)$ omezená zprava v bodě a, je každá posloupnost $\{g(x_n)\}$, kde $x_n > a$, $x_n \to a$, omezená, a tedy pro každou posloupnost $x_n > a$, $x_n \to a$ existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Tedy existuje vlastní $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$. Podobně dále.

4. Je-li g spojitá zprava v bodě a a f nikoli, jest $f(a+) \neq f(a)$ ($f(a+)$ existuje podle 3). Potom však $\lim\limits_{x\to a+} M(a, x) = +\infty$, což je nemožné. Zbytek tvrzení 4 je důsledkem tvrzení 3.

5. Nechť $x_n > a$, $x_n \to a$. Potom buď $g(x_n) \to g(a)$ — v tom případě $\lim\limits_{n\to\infty} M(a, x_n) = 0$ podle 3 — nebo $\{g(x_n)\}$ nekonverguje k $g(a)$. V tomto případě lze vybrat z $\{x_n\}$ posloupnost $\{x'_n\}$ tak, že $\{g(x'_n)\}$ má limitu $B \neq g(a)$. (Může být i $B = \pm\infty$.) Potom však má čitatel v $M(a, x'_n)$ limitu 0, jmenovatel limitu různou od nuly (event. nevlastní), a tedy $\lim M(a, x'_n) = 0$. Protože podle 2 existuje $\lim M(a, x)$ je tato limita také rovna 0.

Není-li f spojitá v bodě a zprava, existují body $x_n > a$, $x_n \to a$ tak, že $f(x_n) \to A \neq f(a)$. Kdyby bylo $g(x_n) \to g(a)$, bylo by

$$M(a, x_n) = \frac{|f(x_n) - f(a)|^p}{|g(x_n) - g(a)|^{p-1}} \to +\infty \,,$$

což je nemožné podle 2. Tedy lze vybrat posloupnost $\{x'_n\}$ tak, že $g(x'_n) \to B \neq \neq g(a)$. Protože g je omezená v okolí bodu a, je $B \neq \pm\infty$, a tedy $\lim M(a, x'_n) \neq \neq 0$. Protože $\lim\limits_{x\to a+} M(a, x)$ existuje, je též $\neq 0$.

6. Stačí užít tvrzení 5 a 2: Je-li f spojitá v bodě a zprava, je $\lim\limits_{x\to a+} M(a, x) =$

$= \lim\limits_{x \to a+} h(x) = 0 = h(a)$. Je-li g omezená v okolí bodu a a je-li f nespojitá v bodě a zprava, je $\lim\limits_{x \to a+} M(a, x) = \lim\limits_{x \to a+} h(x) \neq 0 = h(a)$.

7. K důkazu první části tvrzení 7 stačí uvážit, že z existence $\overset{b}{\underset{a}{H}}$ plyne existence $\overset{b}{\underset{c}{H}}$ pro každé $c \in \langle a, b)$. Druhou část tvrzení 7 dostaneme z první tím, že přejdeme od funkcí $f(x), g(x)$ v $\langle a, b\rangle$ k funkcím $f(-x)$, $g(-x)$ v intervalu $\langle -b, -a\rangle$.

Věta 1,3. *Existuje-li* $\overset{b}{\underset{a}{H}}$, *existují pro každé* $x \in (a, b)$ *integrály* $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ *a* $\overset{b}{\underset{x}{H}}$ *a platí:*

$$\lim_{\substack{x' \to x- \\ x'' \to x+}} [M(x', x) + M(x, x'') - M(x', x'')] = 0\,.$$

Obráceně: Existují-li pro některé $x \in (a, b)$ *oba integrály* $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ *a* $\overset{b}{\underset{x}{H}}$ *a je-li uvedená limita rovna* 0, *existuje i* $\overset{b}{\underset{a}{H}}$.

Důkaz. 1. Nechť existuje $\overset{b}{\underset{a}{H}}$. Potom existují též $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ a $\overset{b}{\underset{x}{H}}$. Buďte x'_n, x''_n takové body, že $x'_n < x < x''_n$, $x'_n \to x$, $x''_n \to x$. Utvořme dělení D_n tak, že x'_n, x''_n jsou sousedními body tohoto dělení a že $\nu(D_n) \to 0$. Označme D'_n dělení vzniklé z D_n přidáním bodu x. Potom platí:

$$0 = \lim_{n \to \infty} [H(D'_n) - H(D_n)] = \lim_{n \to \infty} [M(x'_n, x) + M(x, x''_n) - M(x'_n, x''_n)]\,.$$

2. Nechť jsou podmínky věty splněny a nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pro niž $\nu(D_n) \to 0$. Můžeme se omezit na tyto případy:

a) x je dělicím bodem každého D_n,

b) x není dělicím bodem žádného D_n.

V prvním případě plyne existence $\lim H(D_n)$ z existence $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ a $\overset{b}{\underset{x}{H}}$. Ve druhém případě existují (pro každé n) sousední body dělení D_n — označme je x'_n, x''_n — tak, že $x'_n < x < x''_n$. Přidejme k D_n bod x; tím dostaneme dělení D'_n. Z existence $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ a $\overset{b}{\underset{x}{H}}$ plyne existence $\lim H(D'_n)$. Protože $x'_n \to x$, $x''_n \to x$ a protože

$$H(D'_n) - H(D_n) = M(x'_n, x) + M(x, x''_n) - M(x'_n, x''_n)\,,$$

existuje podle podmínky věty i $\lim H(D_n)$. V případě a) i v případě b) je zřejmě $\lim H(D_n) = \overset{x}{\underset{a}{H}} + \overset{b}{\underset{x}{H}}$; tedy existuje $\overset{b}{\underset{a}{H}}$ (a rovná se $\overset{x}{\underset{a}{H}} + \overset{b}{\underset{x}{H}}$).

Věta 1,4. *Je-li* f *spojitá v bodě* $x \in (a, b)$, g *monotonní v bodě* x *a existují-li* $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ *a* $\overset{b}{\underset{x}{H}}$, *existuje též* $\overset{b}{\underset{a}{H}}$.

Dokážeme nejdříve toto lemma:

Lemma. *Je-li buď* $g(x') \leqq g(x) \leqq g(x'')$ *nebo* $g(x') \geqq g(x) \geqq g(x'')$, *je* $M(x', x'') \leqq M(x', x) + M(x, x'')$. *Je-li tedy* g *monotonní v intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a je-li* D' *zjemněním dělení* D, *je* $H(D') \geqq H(D)$.

Důkaz lemmatu. Je-li buď $g(x') = g(x)$ nebo $g(x) = g(x'')$, je tvrzení zřejmě správné. Nechť jsou tedy obě nerovnosti ostré. Položme na okamžik

$$a_1 = \frac{f(x) - f(x')}{|g(x) - g(x')|^{\frac{p-1}{p}}}, \quad b_1 = |g(x) - g(x')|^{\frac{p-1}{p}},$$

$$a_2 = \frac{f(x'') - f(x)}{|g(x'') - g(x)|^{\frac{p-1}{p}}}, \quad b_2 = |g(x'') - g(x)|^{\frac{p-1}{p}}.$$

Potom je $|f(x'') - f(x')| = |\sum_{k=1}^{2} a_k b_k| \leqq \sum_{k=1}^{2} |a_k|\,|b_k|$. Podle Hölderovy nerovnosti $\sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|b_k| \leqq (\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{p-1}{p}}$ — viz *V. Jarník*, Diferenciální počet II, 2. vydání, str. 212 — dostaneme:

$$|f(x'') - f(x')| \leqq \left[\frac{|f(x) - f(x')|^p}{|g(x) - g(x')|^{p-1}} + \frac{|f(x'') - f(x)|^p}{|g(x'') - g(x)|^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}} \cdot$$

$$\cdot \left[|g(x) - g(x')| + |g(x'') - g(x)|\right]^{\frac{p-1}{p}},$$

tedy (protože $|g(x) - g(x')| + |g(x'') - g(x)| = |g(x'') - g(x')|$)

$$|f(x'') - f(x')|^p \leqq \left[\frac{|f(x) - f(x')|^p}{|g(x) - g(x')|^{p-1}} + \frac{|f(x'') - f(x)|^p}{|g(x'') - g(x)|^{p-1}}\right] \cdot |g(x'') - g(x')|^{p-1},$$

odkud plyne hledaná rovnost dělením obou stran výrazem $|g(x'') - g(x')|^{p-1}$.

Důkaz věty 1,4. Protože $g(x)$ je monotonní v bodě x, jsou splněny podmínky lemmatu, volíme-li $x' < x < x''$ a x', x'' dosti blízko k x. Protože existují $\overset{x}{\underset{a}{H}}$ a $\overset{b}{\underset{x}{H}}$ a protože f je spojitá v bodě x, plyne z věty 1,2 (tvrzení 5 a 7), že

$$\lim_{x' \to x-} M(x', x) = \lim_{x'' \to x+} M(x, x'') = 0\,,$$

tedy podle lemmatu i $\lim_{\substack{x' \to x- \\ x'' \to x+}} M(x', x'') = 0$. Podle věty 1,3 existuje $\overset{b}{\underset{a}{H}}$.

Poznámka 1,4. Vynecháme-li ve větě 1,4 některý z předpokladů, nemusí tvrzení platit.

Příklad 1. Nestačí sama spojitost funkce f v bodě x: Budiž $f(x) = x$, $g(-1) = 2$, $g(0) = 0$, $g(1) = 3$,

$$g(x) = 2^{-n} + x \quad \text{pro} \quad x \in \langle 2^{-n-1}, 2^{-n})\,,$$
$$g(x) = 2^{-n-1} - x \quad \text{pro} \quad x \in (-2^{-n}, -2^{-n-1}\rangle$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Protože

$$\lim_{x \to 0+} g(-2^{-n} + x) = g(2^{-n-1}),$$

lze volit čísla $x_n > 0$ tak, aby

$$\lim_{n \to \infty} M(-2^{-n} + x_n, 2^{-n-1}) = +\infty .$$

Snadno se zjistí, že $\overset{1}{\underset{0}{H}} = \overset{0}{\underset{-1}{H}} = 1$.

Příklad 2. Nestačí monotonie funkce g v bodě x. Stačí položit $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$, $g(x) = \operatorname{sgn} x$. Jest $\overset{0}{\underset{-1}{H}} = \overset{1}{\underset{0}{H}} = 1$, ale $\overset{1}{\underset{-1}{H}}$ neexistuje.

Věta 1,5. *Nechť existuje* $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$. *Potom platí:*

1. *Je-li g omezená, je i f omezená.*
2. *Má-li g konečnou variaci, má i f konečnou variaci.*
3. *Je-li g absolutně spojitá, je i f absolutně spojitá.*

Důkaz. 1. Je-li f neomezená v $\langle a, b \rangle$, existuje bod $x \in \langle a, b \rangle$, v jehož každém okolí je f neomezená. Kdyby přitom g byla omezená v $\langle a, b \rangle$, nemohly by být obě limity $\lim_{x' \to x-} M(x', x)$, $\lim_{x'' \to x-} M(x, x'')$ vlastní, což by odporovalo větě 1,2 (tvrzení 2).

2. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $\nu(D) < \delta \Rightarrow |H(D) - \overset{b}{\underset{a}{H}}| < \varepsilon$. Budiž $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, $\nu(D) < \delta$. Potom

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|g(x_k) - g(x_{k-1})|^{\frac{p-1}{p}}} \cdot |g(x_k) - g(x_{k-1})|^{\frac{p-1}{p}}$$

a podle Hölderovy nerovnosti tedy

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqq$$

$$\leqq \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p}{|g(x_k) - g(x_{k-1})|^{p-1}} \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \right]^{\frac{p-1}{p}} \leqq$$

$$\leqq (\overset{b}{\underset{a}{H}} + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} \cdot (\overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}\, g)^{\frac{p-1}{p}} .$$

Protože se při hledání $\overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}\, f$ můžeme omezit na dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$, plyne odtud, že f má konečnou variaci v $\langle a, b \rangle$ a že

$$(\overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}\, f)^p \leqq \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) \cdot (\overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}\, g)^{p-1} .$$

3. Budiž $\varepsilon = 1$. Existuje $\delta > 0$ tak, že $\nu(D) < \delta \Rightarrow |H(D) - \overset{b}{\underset{a}{H}}| < 1$. Budiž $\eta > 0$. Protože g je absolutně spojitá, existuje $\vartheta \in (0, \delta)$ tak, že pro každou posloupnost $x_1 < x_2 \leqq \ldots \leqq x_{2s-1} < x_{2s}$ bodů z intervalu $\langle a, b \rangle$, pro niž $\sum_{k=1}^{s} (x_{2k} - x_{2k-1}) < \vartheta$, je $\sum_{k=1}^{s} |g(x_{2k}) - g(x_{2k-1})| < \eta$. Každou takovou posloupnost můžeme doplnit na dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ tak, aby $\nu(D) < \delta$ a aby body x_{2k-1}, x_{2k} zůstaly sousedními body dělení D.

Stejně jako v bodě 2 získáme nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{s} |f(x_{2k}) - f(x_{2k-1})| \leqq [\sum_{k=1}^{s} M(x_{2k-1}, x_{2k})]^{\frac{1}{p}} \cdot [\sum_{k=1}^{s} |g(x_{2k}) - g(x_{2k-1})|]^{\frac{p-1}{p}} \leqq$$

$$\leqq [H(D)]^{\frac{1}{p}} \cdot \eta^{\frac{p-1}{p}} \leqq (\overset{b}{\underset{a}{H}} + 1)^{\frac{1}{p}} \cdot \eta^{\frac{p-1}{p}},$$

odkud plyne absolutní spojitost funkce f.

Definice 1,2. Předpoklady stejné jako v definici 1,1. Existuje-li konečné $\sup_{(D)} H_p(f, g; D)$, řekneme, že f má konečnou variaci p-tého stupně vzhledem k funkci g (v intervalu $\langle a, b \rangle$) a označíme

$$\sup_{(D)} H_p(f, g; D) = (p) - \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}} (f, g) .$$

(Pro stručnost budeme někdy písmeno p vynechávat.)

Poznámka 1,5. Obecně není žádná souvislost mezi existencí Hellingerova integrálu $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ a tím, že f má konečnou variaci p-tého stupně podle funkce g.

Příklad 1. Je-li $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$, $g(x) = \operatorname{sgn} x$, neexistuje $\overset{1}{\underset{-1}{H}}(f, g)$, avšak $\overset{1}{\underset{-1}{\mathrm{var}}} (f, g) = 2$.

Příklad 2. Buďte f a g funkce z poznámky 1,4, příkladu 1. Položme $f_1(x) = |x|$, $g_1(x) = g(-1 - x)$ pro $x < 0$, $g_1(x) = g(1 - x)$ pro $x \geqq 0$. Potom je $\overset{1}{\underset{-1}{H}}(f_1, g_1) = \overset{0}{\underset{-1}{H}}(f, g) + \overset{1}{\underset{0}{H}}(f, g)$, ale $\sup_{(D)} H(f, g; D) = +\infty$.

Poznámka 1,6. Naproti tomu platí: Existuje-li $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \langle a, b - \delta \rangle$ platí: $\overset{x+\delta}{\underset{x}{\mathrm{var}}} (f, g) < +\infty$. Neboť je-li $\delta > 0$ takové, že $\nu(D) \leqq \delta \Rightarrow H(D) < \overset{b}{\underset{a}{H}} + 1$, je pro každé dělení D' každého intervalu $\langle x, x + \delta \rangle \subset \langle a, b \rangle$ tím spíše $H(D') < \overset{b}{\underset{a}{H}} + 1$.

Poznámka 1,7. Existuje-li $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ a je-li $\{D_n\}$ posloupnost dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, $\nu(D_n) \to 0$, $D_n = \{a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{s_n}^n = b\}$, je

$$\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{s_n} \overset{x_k^n}{\underset{x_{k-1}^n}{\operatorname{var}}} (f, g) .$$

Ke každému dělení D_n můžeme totiž sestrojit zjemnění D_n' tak, aby

$$\left| H(D_n') - \sum_{k=1}^{s_n} \overset{x_k^n}{\underset{x_{k-1}^n}{\operatorname{var}}} (f, g) \right| < \frac{1}{n} ,$$

a jest $H(D_n') \to \overset{b}{\underset{a}{H}}$.

Poznámka 1,8. Nechť f má konečnou variaci vzhledem k funkci g v intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom má f konečnou variaci vzhledem k g i v každém intervalu $\langle a, x \rangle$, kde $x \in (a, b\rangle$, a položíme-li $v(a) = 0$, $v(x) = \overset{x}{\underset{a}{\operatorname{var}}} (f, g)$ pro $x \in (a, b\rangle$, je $v(x)$ neklesající nezáporná funkce. Platí též nerovnost

$$\overset{x}{\underset{a}{\operatorname{var}}} (f, g) + \overset{b}{\underset{x}{\operatorname{var}}} (f, g) \leqq \overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}} (f, g) .$$

Rovnost přitom platí právě tehdy, existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro $x' \in (x - \delta, x)$, $x'' \in (x, x + \delta)$ je $M(x', x'') \leqq M(x', x) + M(x, x'')$. V opačném případě jest

$$\overset{x}{\underset{a}{\operatorname{var}}} + \overset{b}{\underset{x}{\operatorname{var}}} = \overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}} - \limsup_{\substack{x'' \to x+ \\ x' \to x-}} [M(x', x'') - M(x, x') - M(x, x'')] .$$

Příklad, kdy neplatí rovnost: Budiž $f(x) = x$. Funkce g budiž definována takto:

$$g(x) = 2^{-n+1} + (1 - 2^{-\frac{n+1}{p-1}})(x - 2^{-n}) \quad \text{pro} \quad x \in (2^{-n-1}, 2^{-n}\rangle ,$$

$$g(x) = 3 \,.\, 2^{-n-1} - \frac{1}{2}(x - 2^{-n}) \quad \text{pro} \quad x \in \langle -2^{-n}, -2^{-n-1}) ,$$

$$g(0) = 0 .$$

Potom existují $\overset{0}{\underset{-1}{H}}$ a $\overset{1}{\underset{0}{H}}$ a je tedy $\lim\limits_{x' \to 0-} M(x', 0) = \lim\limits_{x'' \to 0+} M(0, x'') = 0$ (podle věty 1,2), kdežto $3^p \leqq \limsup\limits_{\substack{x' \to 0- \\ x'' \to 0+}} M(x', x'') \leqq 8^p$. Protože f má konečnou variaci vzhledem k g v intervalech $\langle -1, 0 \rangle$ a $\langle 0, 1 \rangle$, plyne odtud, že f má konečnou variaci vzhledem k g i v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Zmíněná rovnost však neplatí.

Věta 1,6. *Je-li g monotonní a existuje-li $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$, má f konečnou variaci vzhledem k g v intervalu $\langle a, b \rangle$ a jest*

$$\overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}} (f, g) = \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) .$$

Důkaz. Je vždy $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) \leqq \sup_{(D)} H(f, g; D)$. Je-li g monotonní, D dělení $\langle a, b\rangle$, D' jeho zjemnění, je podle lemmatu za větou 1,4 $H(D) \leqq H(D')$. Existují jistě dělení D_n tak, že $H(D_n) \to \sup_{(D)} H(D)$. Budiž D'_n zjemnění D_n, pro něž $\nu(D'_n) < \frac{1}{n}$. Potom i $H(D'_n) \geqq H(D_n)$ konvergují k $\sup_{(D)} H(D)$ a zároveň je $\overset{b}{\underset{a}{H}} = \lim_{n\to\infty} H(D'_n)$.

Poznámka 1,9. Je-li g monotonní a má-li f konečnou variaci vzhledem k funkci g v intervalu $\langle a, b\rangle$, je pro každé $x \in (a, b)$

$$\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{var}}} + \overset{b}{\underset{x}{\mathrm{var}}} = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}\,.$$

Věta 1,7. *Budiž g monotonní a nechť f má konečnou variaci vzhledem k funkci g v intervalu $\langle a\ b\rangle$. Nechť v každém bodě $x \in (a\ b)$ platí: buď je funkce g spojitá alespoň z jedné strany v bodě x nebo je funkce f (oboustranně) spojitá v bodě x. Potom existuje $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$.*

Důkaz. Označme $H = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}(f, g)$. Je-li $H = 0$, je f konstantní v $\langle a, b\rangle$, a tedy i $\overset{b}{\underset{a}{H}} = 0$. Lze tedy předpokládat, že $H > 0$. Budiž $\varepsilon \in (0, H)$. Existuje dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ tak, že

$$H(D_0) > H - \varepsilon > 0\,.$$

Nejsou tedy všechna čísla $|g(x_k) - g(x_{k-1})|$ rovna 0. Lze předpokládat, že žádné z těchto čísel není rovno 0, neboť jinak bychom mohli některé dělicí body vynechat, aniž bychom změnili hodnotu $H(D_0)$.

Označme

$$\alpha = \min_{k=1,\ldots,n} (x_k - x_{k-1})\,.$$

Pro stručnost vyjadřování zavedeme tuto úmluvu: Výrok „bod x je správně umístěn vzhledem k bodu x_k" bude znamenat, že nastává jeden z těchto případů:

a) $k = 0$ nebo $k = n$ a $x = x_k$;

b) $0 < k < n$, g je spojitá zleva v bodě x_k a $x < x_k$;

c) $0 < k < n$, g je spojitá zprava, ale nikoliv zleva, v bodě x_k a $x > x_k$.

(Je-li $0 < k < n$ a g je oboustranně nespojitá v bodě x_k, budeme říkat, že bod x nelze správně umístit vzhledem k bodu x_k.)

Dokážeme nejdříve, že funkce $M(x', x'')$ dvou proměnných x', x'' má tuto vlastnost: Označme Ω_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) množinu všech bodů $[x', x'']$, kde x' (resp. x'') je správně umístěn vzhledem k bodu x_{k-1} (resp. x_k), „je-li správné umístění možné"; jestliže x' (resp. x'') nelze správně umístit, budiž $x' > x_{k-1}$ (resp. $x'' < x_k$). Potom je

$$(*) \qquad \lim_{\substack{[x',x'']\to[x_{k-1},x_k]\\ [x',x'']\in\Omega_k}} M(x', x'') \geqq M(x_{k-1}, x_k)\,.$$

Předpokládejme, že $1 < k < n$. (V případě, že $k = 1$ nebo $k = n$ je důkaz obdobný a o něco jednodušší.) Uvažme nejdříve, že z předpokladu $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}\,(f, g) < < +\infty$ plyne, že f je spojitá zprava (resp. zleva) v každém bodě $x \in \langle a, b)$ (resp. $x \in (a, b\rangle$), v němž je g spojitá zprava (resp. zleva). Důkaz je zcela obdobný důkazu příslušného tvrzení ve větě 1,2. Odtud plyne, že limita čitatele $M(x', x'')$ vždy existuje a je rovna $|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p$, neboť $|f(x'') - f(x')|^p$ je spojitou funkcí v bodě $[x_{k-1}, x_k]$ vzhledem k uzávěru Ω_k. (Důkaz: Je-li x' „správně umístěno vzhledem k bodu x_{k-1}", je $g(x')$ spojitá z té strany bodu x_{k-1}, na níž leží první souřadnice bodů z Ω_k, a tedy i $f(x')$ je spojitá z téže strany. Nebylo-li možno x' správně umístit, t. j. je-li funkce g oboustranně nespojitá v bodě x_{k-1}, je podle předpokladů věty f oboustranně spojitá v bodě x_{k-1}. Podobně pro x''.)

Limita jmenovatele existuje vždy, neboť g je monotonní. Označme tuto limitu γ. Je buď $\gamma = 0$ nebo $\gamma > 0$. V prvním případě tvrdím, že $M(x_{k-1}, x_k) = = 0$. (Snadno se dokáže, že v tomto případě je f konstantní v $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$.) Kdyby totiž $|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p = \lim\limits_{\substack{[x',x'']\to[x_{k-1},x_k]\\ [x',x'']\in\Omega_k}} |f(x'') - f(x')|^p \neq 0$, byla by $\lim M(x',x'') = +\infty$, což je ve sporu s tím, že $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}\,(f, g) < +\infty$. Nerovnost (*) je tedy v prvním případě jistě splněna.

Ve druhém případě je

$$\lim M(x', x'') = \frac{\lim |f(x'') - f(x')|^p}{\lim |g(x'') - g(x')|^{p-1}} = \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p}{\gamma}\,.$$

Tvrdím, že $\gamma \leqq |g(x_k) - g(x_{k-1})|^{p-1}$. Tato nerovnost jistě platí, znamená-li podmínka

$$(**) \qquad [x', x''] \to [x_{k-1}, x_k]\,, \quad [x', x''] \in \Omega_k$$

totéž jako podmínka $x' \to x_{k-1}+$, $x'' \to x_k-$. (Neboť z monotonie g plyne, že $|g(x_k-) - g(x_{k-1}+)| \leqq |g(x_k) - g(x_{k-1})|$.) Dále, znamená-li podmínka (**) na př., že $x' \to x_{k-1}-$, $x'' \to x_k-$, je g spojitá zleva v bodě x_{k-1}, a tedy

$$\gamma = |g(x_k-) - g(x_{k-1}-)|^{p-1} = |g(x_k-) - g(x_{k-1})|^{p-1} \leqq |g(x_k) - g(x_{k-1})|^{p-1}\,.$$

Podobně je tomu i v ostatních případech. Je tedy i v případě, že $\gamma > 0$, splněna nerovnost (*).

Budiž nyní $\varepsilon' = \dfrac{1}{n}\,[H(D_0) - (H - \varepsilon)] > 0$. Existuje číslo $\eta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\alpha\right)$ tak, že platí: Je-li $[x', x''] \in \Omega_k$, $|x' - x_{k-1}| < \eta$, $|x'' - x_k| < \eta$, je $M(x', x'') -$

$- M(x_{k-1}, x_k) > - \varepsilon'$. Budiž s počet všech těch bodů x_k ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$), v nichž je g oboustranně nespojitá. Položme $m = n + s$. Budiž $D = \{a = y_0 < y_1 < \ldots < y_r = b\}$, $\nu(D) < \eta$. Bodu x_0 přiřaďme bod y_0, bodu x_n bod y_r. Každému bodu x_k ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$) přiřaďme buď jeden nebo dva body dělení D podle tohoto pravidla: Je-li g spojitá v bodě x_k alespoň z jedné strany, přiřadíme bodu x_k bod y_j dělení D tak, aby bylo $|y_j - x_k| < \eta$ a aby bod y_j byl správně umístěn vzhledem k bodu x_k. Je-li g oboustranně nespojitá v bodě x_k, najdeme dva body y_{j_1} a y_{j_2} dělení D tak, aby $x_k - \eta < y_{j_1} < x_k < y_{j_2} < x_k + \eta$.

Je-li pak $0 \leqq k_1 < k_2 \leqq n$ a jsou-li y' a y'' body přiřazené bodům x_{k_1} a x_{k_2}, je $y' < y''$. Dohromady je všech přiřazených bodů právě $m + 1$. Srovnejme je do rostoucí posloupnosti a vzniklé dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ označme $D' = \{a = z_0 < z_1 < \ldots < z_m = b\}$.

Z lemmatu za větou 1,4 a z postupu, jímž jsme body přiřazovali, ihned plyne, že

$$H(D) \geqq H(D') > H(D_0) - \varepsilon' n = H - \varepsilon\,,$$

a to pro všechna dělení D, pro něž $\nu(D) < \eta$. Věta je dokázána.

Poznámka 1,10. Je-li g oboustranně nespojitá v některém bodě $x \in (a, b)$ a f jen jednostranně spojitá v tomto bodě (a spojitá ve všech ostatních bodech $\langle a, b\rangle$), nemusí $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ existovat, i když je $\overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}\,(f, g) < +\infty$. Příklad: $f(x) = 0$ pro $x \leqq 0$, $f(x) = 1$ pro $x > 0$, $g(x) = \operatorname{sgn} x$. Jest $\overset{1}{\underset{-1}{\operatorname{var}}}\,(f, g) = 1$, $H(D) = 1$ nebo $\frac{1}{2^{p-1}}$ podle toho, je-li bod 0 dělicím bodem D nebo ne (nezávisle na $\nu(D)$). Integrál $\overset{1}{\underset{-1}{H}}(f, g)$ tedy neexistuje.

Věta 1,8. *K tomu, aby f měla v $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci vzhledem k funkci g, je nutné a stačí, aby existovala neklesající funkce u tak, že*

$$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b \Rightarrow M(x_1, x_2) \leqq u(x_2) - u(x_1)\,.$$

Platí pak:

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{\operatorname{var}}}\,(f, g) \leqq u(x_2) - u(x_1)\,.$$

Důkaz. 1. Existuje-li taková funkce u, je pro každé dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

$$H(D) = \sum_{k=1}^{n} M(x_{k-1}, x_k) \leqq \sum_{k=1}^{n} [u(x_k) - u(x_{k-1})] = u(b) - u(a)\,.$$

Tedy též

$$\overset{b}{\underset{a}{\operatorname{var}}}\,(f, g) \leqq u(b) - u(a)\,.$$

2. Má-li f konečnou variaci vzhledem k g, stačí položit $u(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{var}}}$. Z nerovnosti $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{var}}} + \overset{b}{\underset{x}{\mathrm{var}}} \leqq \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}$ plyne ihned:

$$u(x_2) - u(x_1) = \overset{x_2}{\underset{a}{\mathrm{var}}} - \overset{x_1}{\underset{a}{\mathrm{var}}} \geqq \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{var}}} \geqq M(x_1, x_2)\,.$$

2. Převedení Hellingerova integrálu na Lebesgueův

V celé druhé kapitole budeme předpokládat, že funkce g je neklesající v intervalu $P = \langle a, b \rangle$.

Označme $A = g(a)$, $B = g(b)$. Pro každé $y \in \langle A, B \rangle$ definujme množinu $N(y) \subset P$ takto: Je-li $y \in g(P)$, budiž $N(y) = \underset{x}{E}[g(x) = y]$; není-li $y \in g(P)$, budiž $N(y)$ jednobodová množina, obsahující prvek $\sup\limits_{g(x)<y} x$ $(= \inf\limits_{g(x)>y} x)$.

Budiž f funkce definovaná v intervalu P, pro niž platí: $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. V intervalu $R = \langle A, B \rangle$ lze pak definovat funkci F takto: $F(y) = f(x)$, kde x je libovolný prvek množiny $N(y)$. (Speciálně: pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je $F(g(x)) = f(x)$.)

Za tohoto označení, které podržíme v celé 2. kapitole, platí:

Věta 2,1. *Nechť funkce F je absolutně spojitá v $R = \langle A, B \rangle$. Potom integrál $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ existuje právě tehdy, když $F' \in L^p(A, B)$ (t. j. když konverguje Lebesgueův integrál $\int_A^B |F'|^p \,dy$). Je-li tato podmínka splněna, je*

$$(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) = \int_A^B |F'|^p \,dy\,.$$

Důkaz. 1. Budiž $F' \in L^p(A, B)$. Protože F je absolutně spojitá, je

$$F(y) = F(A) + \int_A^y F' \,dy\,.$$

Je-li $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ a položíme-li $y_1 = g(x_1)$, $y_2 = g(x_2)$, je

$$f(x_2) - f(x_1) = F(y_2) - F(y_1) = \int_{y_1}^{y_2} F' \,dy\,.$$

Podle Hölderovy nerovnosti odtud plyne, že

$$|f(x_2) - f(x_1)|^p \leqq |y_2 - y_1|^{p-1} \,.\, \int_{y_1}^{y_2} |F'|^p \,dy = |g(x_2) - g(x_1)|^{p-1} \,.\, \int_{y_1}^{y_2} |F'|^p \,dy\,.$$

Položíme-li tedy $u(x) = \int_A^{g(x)} |F'|^p \,dy$, je u neklesající v $\langle a, b \rangle$, a pro $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ platí:

$$M(x_1, x_2) \leqq u(x_2) - u(x_1)\,.$$

Podle věty 1,8 z toho plyne, že $\operatorname*{var}_a^b (f, g) \leqq u(b) - u(a)$. K tomu, abychom dokázali, že též

$$\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) \leqq u(b) - u(a) = \int_A^B |F'|^p \, dy ,$$

stačí podle věty 1,7 dokázat, že f je spojitá v $\langle a, b\rangle$. Budiž $x \in \langle a, b)$, $x < x' < b$. Potom

$$\lim_{x' \to x+} |f(x') - f(x)| = \lim_{x' \to x+} |F(g(x')) - F(g(x))| =$$

$$= \lim_{x' \to x+} \left| \int_{g(x)}^{g(x')} F' \, dy \right| = \left| \int_{g(x)}^{g(x+)} F' \, dy \right| ;$$

je-li $g(x+) = g(x)$, je ovšem $\int_{g(x)}^{g(x+)} F' \, dy = 0$; je-li $g(x+) > g(x)$, je F konstantní v intervalu $(g(x), g(x+))$ a tedy opět $\int_{g(x)}^{g(x+)} F' \, dy = 0$. Je tedy f spojitá zprava v každém bodě $x \in \langle a, b)$. Podobně se dokáže spojitost zleva v každém bodě $x \in (a, b\rangle$.

2. Nechť existuje $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) = H$. Dokážeme, že Lebesgueův integrál $\int_A^B |F'|^p \, dy$ konverguje a že platí:

$$\int_A^B |F'|^p \, dy \leqq H .$$

Kdyby tomu tak nebylo, existovala by čísla $0 < y_0 < y_1 < \ldots < y_n$ tak, že

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu(M_k) - H = \varepsilon > 0 ,$$

kde $M_k = \underset{y}{E}[y \in (A, B),\ y_{k-1} < |F'(y)|^p \leqq y_k]$ a $\mu(M_k)$ znamená Lebesgueovu míru množiny M_k. Ukážeme, že to vede ke sporu.

Budiž $A \leqq \alpha < \beta \leqq B$ a nechť v intervalu (α, β) neleží žádný bod z $g(P)$. Je-li $\alpha < y_1 < y_2 < \beta$, je vztah $g(x) < y_1$ ekvivalentní se vztahem $g(x) < y_2$, odkud plyne, že $N(y_1) = N(y_2)$, tedy i $F(y_1) = F(y_2)$. Funkce F je tedy konstantní v (α, β) a ze spojitosti F plyne, že je konstantní i v $\langle \alpha, \beta\rangle$. Derivace funkce F v bodě α zprava je rovna 0; podobně v bodě β.

Vzhledem k tomu, že g je monotonní, existuje ke každému $y \in R - g(P)$ interval tvaru (α, y) nebo (y, β) nemající s $g(P)$ společné body. Alespoň jedna jednostranná derivace funkce F v bodě y je pak rovna 0. Je-li tedy $F'(y) \neq 0$ (speciálně: je-li y v některém M_k), je především $y \in g(P)$, a existují body $v_k \in g(P)$, $w_k \in g(P)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ tak, že $v_k < y < w_k$, $v_k \to y$, $w_k \to y$.

Budiž $y \in M_n$. Zvolíme-li w_k tak, jak bylo právě uvedeno, a uvážíme-li, že $|F'(y)|^p > y_{n-1}$, vidíme, že pro všechna dostatečně velká k platí vztah:

$$\left|\frac{F(w_k) - F(y)}{w_k - y}\right|^p > y_{n-1} \, .$$

Odtud ihned plyne, že systém všech intervalů $\langle\alpha, \beta\rangle$, pro něž $\alpha \in g(P)$, $\beta \in g(P)$ a

$$\left|\frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}\right|^p > y_{n-1} \, ,$$

pokrývá množinu M_n ve smyslu Vitaliově (viz *V. Jarník*, Integrální počet II, str. 172).

Položme $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{n y_n}$. K tomuto ε^* existuje podle Vitaliovy věty posloupnost intervalů $J_i^n = \langle\alpha_i^n, \beta_i^n\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, s_n)$ tak, že platí:

(a) $\mu(M_n) < \mu(M_n \cap \bigcup_{i=1}^{s_n} J_i^n) + \varepsilon^*$,

(b) $J_i^n \cap J_k^n = \emptyset$ pro $i \neq k$,

(c) $\alpha_i^n \in g(P)$, $\beta_i^n \in g(P)$,

(d) $\left|\dfrac{F(\beta_i^n) - F(\alpha_i^n)}{\beta_i^n - \alpha_i^n}\right|^p > y_{n-1}$.

Označme $S_n = \bigcup_{i=1}^{s_n} J_i^n$, $R_{n-1} = (A, B) - S_n$. Množina R_{n-1} se skládá z konečného počtu disjunktních otevřených intervalů, které označíme třeba K_k^{n-1} $(k = 1, 2, \ldots, r_{n-1})$. S každým intervalem K_k^{n-1} a s množinou $K_k^{n-1} \cap M_{n-1}$ provedeme totéž jako dříve s intervalem (A, B) a s množinou M_n. Úhrnem tím získáme konečnou posloupnost intervalů J_k^{n-1} $(i = 1, 2, \ldots, s_{n-1})$.

Indukcí bychom tak sestrojili:

(I) disjunktní množiny $S_{n-j} = \bigcup_{i=1}^{s_{n-j}} J_i^{n-j}$ $(j = 0, 1, \ldots, n - 1)$ a množiny $R_{n-j} = (A, B) - \bigcup_{i=0}^{j-1} S_{n-i}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, při čemž

$$\mu(R_{n-j} \cap M_{n-j}) < \mu(S_{n-j} \cap M_{n-j}) + \varepsilon^* \, ;$$

platí dále:

(II) $J_i^{n-j} \cap J_k^{n-j} = \emptyset$ pro $i \neq k$;

(III) $J_i^{n-j} = \langle\alpha_i^{n-j}, \beta_i^{n-j}\rangle$, $\alpha_i^{n-j} \in g(P)$, $\beta_i^{n-j} \in g(P)$;

(IV) $\left|\dfrac{F(\beta_i^{n-j}) - F(\alpha_i^{n-j})}{\beta_i^{n-j} - \alpha_i^{n-j}}\right|^p > y_{n-j-1}$.

Podle (I) jest

$$\begin{aligned} M_{n-j} &= (M_{n-j} \cap R_{n-j}) \cup M_{n-j} \cap [(A, B) - R_{n-j}] = \\ &= (M_{n-j} \cap R_{n-j}) \cup \bigcup_{i=0}^{j-1} (M_{n-j} \cap S_{n-i}) \, , \end{aligned}$$

tedy

$$\mu(M_{n-j}) = \sum_{i=0}^{j-1} \mu(M_{n-j} \cap S_{n-i}) + \mu(M_{n-j} \cap R_{n-j}) <$$
$$< \sum_{i=0}^{j} \mu(M_{n-j} \cap S_{n-i}) + \varepsilon^* .$$

Dále:

$$\mu(M_{n-j}) \cdot y_{n-j-1} \leqq y_{n-j-1} \sum_{i=1}^{j} \mu(M_{n-j} \cap S_{n-i}) + \varepsilon^* y_{n-j-1} <$$
$$< \sum_{i=0}^{j} \mu(M_{n-j} \cap S_{n-i}) \cdot y_{n-i-1} + \varepsilon^* y_{n-j-1}$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(M_k) \cdot y_{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \mu(M_{n-j}) \cdot y_{n-j-1} < \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{j} y_{n-i-1} \cdot \mu(M_{n-j} \cap S_{n-i}) + \varepsilon =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} y_{n-i-1} \mu(\bigcup_{j=i}^{n-1} [M_{n-j} \cap S_{n-i}]) + \varepsilon =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} y_{n-i-1} \mu(S_{n-i} \cap \bigcup_{j=i}^{n-1} M_{n-j}) + \varepsilon \leqq$$
$$\leqq \sum_{i=0}^{n-1} y_{n-i-1} \mu(S_{n-i}) + \varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} y_{n-i-1} \sum_{k=1}^{s_{n-i}} \mu(J_k^{n-i}) + \varepsilon .$$

Celkem tedy

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mu(M_k)\, y_{k-1} < \sum_{i=0}^{n-1} y_{n-i-1} \sum_{k=1}^{s_{n-i}} \mu(J_k^{n-i}) + \varepsilon .$$

Budiž $D = \{A = z_0 < z_1 < \ldots < z_r = B\}$ ono dělení intervalu $\langle A, B \rangle$, jehož dělicí body jsou všechna čísla α_i^{n-j}, β_i^{n-j} ($j = 0, \ldots, n-1$; $i = 1, \ldots, s_{n-j}$). Vyšetřujme součet

$$(**) \qquad \sigma(D) = \sum_{k=1}^{r} \frac{|F(z_k) - F(z_{k-1})|^p}{|z_k - z_{k-1}|^{p-1}} .$$

Intervaly $\langle z_{2k-1}, z_{2k} \rangle$ jsou právě všechny intervaly J_i^{n-j}; r je liché. Je-li $\langle z_{2k-1}, z_{2k} \rangle = J_i^{n-j}$, je podle (IV)

$$(***) \qquad \frac{|F(z_{2k}) - F(z_{2k-1})|^p}{|z_{2k} - z_{2k-1}|^{p-1}} > y_{n-j-1} \cdot (z_{2k} - z_{2k-1}) = y_{n-j-1} \cdot \mu(J_i^{n-j}) .$$

Sečteme-li v (***) napřed při pevném j pro $i = 1, 2, \ldots, s_{n-j}$ a pak výsledky pro všechna j, dostaneme podle (*):

$$\sigma(D) \geqq \sum_{0 < 2k < r} \frac{|F(z_{2k}) - F(z_{2k-1})|^p}{|z_{2k} - z_{2k-1}|^{p-1}} > \sum_{k=1}^{n} \mu(M_k)\, y_{k-1} - \varepsilon = H .$$

Zvolme body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b$ tak, že $z_k = g(x_k)$ (to lze podle (III)). Potom

$$\sum_{k=1}^{r} M(x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=1}^{r} \frac{|F(z_k) - F(z_{k-1})|^p}{|z_k - z_{k-1}|^{p-1}} > H ,$$

což je spor. Tím je věta 2,1 úplně dokázána.

Dokážeme nyní ještě dvě postačující podmínky absolutní spojitosti funkce F:

Věta 2,2. *Budiž g spojitá (a neklesající) v $\langle a, b\rangle$; nechť existuje $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$. Potom je funkce F absolutně spojitá.*

Důkaz. Nechť

$$A \leq y_1 < y_2 \leq \ldots \leq y_{2n-1} < y_{2n} \leq B$$

a nechť

$$a \leq x_1 < x_2 \leq \ldots \leq x_{2n-1} < x_{2n} \leq b$$

jsou libovolné body, pro něž $y_k = g(x_k)$. Potom je

$$|F(y_{2k}) - F(y_{2k-1})| = |f(x_{2k}) - f(x_{2k-1})| \leq$$
$$\leq |h(x_{2k}) - h(x_{2k-1})|^{\frac{1}{p}} \cdot |g(x_{2k}) - g(x_{2k-1})|^{\frac{p-1}{p}}$$

a podle Hölderovy nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} |F(y_{2k}) - F(y_{2k-1})| \leq$$
$$\leq [\sum_{k=1}^{n} |h(x_{2k}) - h)x_{2k-1})|]^{\frac{1}{p}} \cdot [\sum_{k=1}^{n} |g(x_{2k}) - g(x_{2k-1})|]^{\frac{p-1}{p}} \leq$$
$$\leq (\overset{b}{\underset{a}{H}})^{\frac{1}{p}} \cdot [\sum_{k=1}^{n} (y_{2k} - y_{2k-1})]^{\frac{p-1}{p}},$$

odkud plyne absolutní spojitost funkce F.

Věta 2,3. *Je-li g rostoucí funkce, pro niž $g'(x) \geq c > 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$, a splňuje-li f Lipschitzovu podmínku, splňuje také F Lipschitzovu podmínku.*

Důkaz. Budiž $A \leq y_1 < y_2 \leq B$. Budiž $x_1 \in N(y_1)$, $x_2 \in N(y_2)$. Je buď $x_1 = x_2$, tedy též $F(y_1) = F(y_2)$, nebo $x_1 < x_2$, a máme:

$$|F(y_2) - F(y_1)| = |f(x_2) - f(x_1)| \leq K|x_2 - x_1| \leq \frac{K}{c} \int_{x_1}^{x_2} g'(x)\, dx,$$

kde K je vhodná konstanta. Dále užijeme známého vztahu (který platí pro neklesající g a $x_1 < x_2$)

$$\int_{x_1}^{x_2} g'(x)\, dx \leq g(x_2 -) - g(x_1 +).$$

Uvážíme-li ještě, že

$$g(x_2 -) - g(x_1 +) \leq y_2 - y_1,$$

dostáváme hledanou nerovnost

$$|F(y_2) - F(y_1)| \leq \frac{K}{c} |y_2 - y_1|.$$

Poznámka 2,1. Budiž g neklesající a spojitá. Potom z věty 2,2 a 2,1 plyne, že existence $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ je ekvivalentní s podmínkou, že F je absolutně spojitá a $F' \in L^p(A, B)$.

Z věty 2,3 a 2,1 plyne, že za předpokladů věty 2,3 existuje $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$.

Věta 2,4. *Nechť existují spojité derivace f' a g' v $\langle a, b\rangle$ (v krajních bodech stačí derivace jednostranné) a nechť $g'(x) \neq 0$ všude v $\langle a, b\rangle$. Potom existuje $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ a platí:*

$$(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) = \int_a^b \frac{|f'(x)|^p}{|g'(x)|^{p-1}} \, dx ,$$

kde integrál vpravo je Riemannův.

Důkaz. Existence $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ plyne na př. z věty 2,3. Označíme-li γ inversní funkci k funkci g, je $F(y) = f(\gamma(y))$ pro $y \in \langle A, B\rangle$ a podle věty 2,1

$$\overset{b}{\underset{a}{H}} = \int_A^B |F'(y)|^p \, dy = \int_A^B |f'(\gamma(y))|^p \,.\, |\gamma'(y)|^p \, dy = \int_a^b |f'(x)|^p \,.\, \frac{dx}{|g'(x)|^{p-1}}$$

(substituce $\gamma(y) = x$, t. j. $y = g(x)$).

Резюме

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ХЕЛЛИНГЕРА

ИЛЬЯ ЧЕРНЫ (Ilja Černý), Прага.

(Поступило в редакцию 6/XII 1955 г.)

Предположим, что $p > 1$ и что f и g — две функции, определенные в $\langle a, b\rangle$, такие, что справедлива импликация: $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Тогда каждому $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ можно поставить в соответствие сумму

$$H(D) = H_p(f, g; D) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p}{|g(x_k) - g(x_{k-1})|^{p-1}} ,$$

причем каждое слагаемое в $H(D)$, знаменатель (следовательно, и читатель) которого равен нулю, следует заменить нулем. Далее положим $\nu(D) = \max_{k=1,\ldots,n} (x_k - x_{k-1})$. Если существует конечный предел $\lim_{\nu(D)\to 0} H(D)$, то обозначим его через

$$\int_a^b \frac{|df(x)|^p}{|dg(x)|^{p-1}}$$

или $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ и назовем *интегралом Хеллингера*. Обозначим еще $(p) - \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}(f, g) = \sup\limits_{(D)} H(D)$.

В настоящей статье изучаются некоторые простые свойства $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ и некоторые условия, которым должны удовлетворять функции f, g и которые необходимы для того, чтобы $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ существовал; затем исследуется связь между $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ и $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}(f, g)$ и метод приведения $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ и $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}(f, g)$ к интегралу Лебега.

Zusammenfassung

DAS HELLINGERSCHE INTEGRAL

ILJA ČERNÝ, Praha.

(Eingelangt 6. XII. 1955.)

Setzen wir voraus, dass $p > 1$ ist und dass f und g zwei in $\langle a, b\rangle$ definierte Funktionen sind, für welche gilt: $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Dann können wir zu jeder Teilung $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ die Summe $H(D) = H_p(f, g; D) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p}{|g(x_k) - g(x_{k-1})|^{p-1}}$ konstruiren; dabei soll jeder Summand in $H(D)$, dessen Nenner (und folglich auch Zähler) Null ist, durch Null ersetzt werden. Setzen wir weiter $\nu(D) = \max\limits_{k=1,\ldots,n} (x_k - x_{k-1})$. Wenn eine endliche Grenze $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} H(D)$ existiert, bezeichnen wir sie mit $\int\limits_a^b \frac{|df(x)|^p}{|dg(x)|^{p-1}}$ oder $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ und nennen sie das Hellingersche Integral. Wir führen noch die Bezeichnung $(p) - \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}\,(f, g) = \sup\limits_{(D)} H(D)$ ein.

Ich untersuche in diesem Artikel einige einfache Eigenschaften des $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$, einige Bedingungen für die Funktionen f und g, notwendige dazu, dass $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ existiere; weiter untersuche ich den Zusammenhang zwischen $\overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ und $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}\,(f, g)$ und die Zurückführung von $\overset{b}{\underset{a}{H}}$ und $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{var}}}$ auf das Lebesguesche Integral.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

POZNÁMKA O JORDAN-DEDEKINDOVEJ PODMIENKE V BOOLEOVÝCH ALGEBRÁCH

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Došlo dne 23. prosince 1955.) DT: 512.9

V poznámke sa vyšetruje platnosť zovšeobecnenej Jordan-Dedekindovej podmienky pre Booleove algebry.

Znakom $R(a, b)$ (prípadne s indexami) označíme reťazec s najmenším (najväčším) prvkom $a(b)$ v čiastočne usporiadanej množine S. Ak kardinálne číslo reťazca $R(a, b)$ je n, nazývame jeho dĺžkou číslo $n - 1$ (ak n je konečné) resp. n (ak n je nekonečné kardinálne číslo). Reťazec $R(a, b)$ je maximálny, ak zo vzťahu $R(a, b) \subset R_1(a, b) \subset S$ vyplýva $R(a, b) = R_1(a, b)$. Hovoríme, že čiastočne usporiadaná množina S splňuje Jordan-Dedekindovu podmienku (v ďalšom stručne: podmienku (**JD**)), keď platí: ak $a, b \in S$, $a < b$ a ak $R_1(a, b)$, $R_2(a, b)$ sú maximálne reťazce, potom oba tieto reťazce majú rovnakú dĺžku.

Je známe, že podmienka (**JD**) platí pre konečné modulárne sväzy (viď [1]) a dokonca pre konečné semimodulárne sväzy (viď [2]). Naproti tomu nekonečné modulárne sväzy nesplňujú podmienku (**JD**). Podrobnejšie povedané, platia vety:

(**S**) *Nekonečné distributívne sväzy vo všeobecnosti nesplňujú podmienku* (**JD**). (Viď [3], veta 3.)

($\mathbf{S}_1$) *Ku každému kardinálnemu číslu α, $\alpha \geqq c$*[1]) *existuje úplný a úplne distributívny sväz S_α s najmenším prvkom f_0 a najväčším f_1, ktorý má túto vlastnosť: pre každé kardinálne číslo β, vyhovujúce nerovnosti $c \leqq \beta \leqq \alpha$, existuje vo sväze S_α maximálny reťazec $R_\beta(f_0, f_1)$, ktorého dĺžka je β.* (Viď [4].)

Dôkaz vety (S_1), uvedený v [4], sa nedá použiť pre zostrené tvrdenie, že S je Booleova algebra. Pri hľadaní ,,hranice", pokiaľ až podmienka (**JD**) neplatí v nekonečných Booleových algebrách, je prirodzené začať vyšetrovať najprv triedu takých nekonečných Booleových algebier, ktorých vlastnosti sa čo najviac zhodujú s vlastnosťami konečných Booleových algebier. Je známe, že každá konečná Booleova algebra S je izomorfná s čiastočne usporiadaným

[1]) c značí mohutnosť kontinua.

systémom všetkých podmnožín vhodne zvolenej množiny M. A. TARSKI o-kázal tvrdenie (viď [5], resp. [1], str. 233):

Nutná a postačujúca podmienka, aby úplná Booleova algebra S bola izomorfná s čiastočne usporiadaným systémom všetkých podmnožín vhodne zvolenej množiny M, je, aby Booleova algebra S bola úplne distributívna. To nás nabáda vyšetrovať platnosť podmienky (**JD**) v úplných a úplne distributívnych Booleových algebrách.

Jednoduchým postupom dokážeme vetu:

(**S'**) *Nech S je nekonečná úplná a úplne distributívna Booleova algebra. Potom S nesplňuje podmienku* (**JD**).

Dôkaz. Nech S je nekonečná úplná a úplne distributívna Booleova algebra. Na základe spomenutej vety Tarského môžeme bez újmy všeobecnosti predpokladať, že S je čiastočne usporiadaný systém všetkých podmnožín nekonečnej množiny M.[2]) Vyjadrime množinu M vo tvare $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pričom M_1 je spočitateľná množina. Nech S_1 je čiastočne usporiadaný systém všetkých podmnožín množiny M_1. Zrejme S_1 je konvexný podsväz sväzu S. Z toho vyplýva, že k dôkazu vety stačí preveriť neplatnosť podmienky (**JD**) vo sväze S_1.

Nech množina M_1 je nejakým (ľubovoľným) spôsobom usporiadaná; nech J je množina všetkých dolných skupín Dedekindových rezov usporiadanej množiny M_1. Pre každý prvok $I \in J$ platí zároveň $I \in S_1$; zrejme je J reťazec v S_1 (najväčší (najmenší) prvok v reťazci J je $M_1(\emptyset)$). Zo základných viet o usporiadaných množinách (viď [6]) vyplýva, že J je maximálny reťazec v S_1.

Uvažujme dvoje usporiadanie množiny M_1, a to 1. tak, aby množina M_1 bola dobre usporiadaná, a 2. tak, aby usporiadaná množina M_1 bola izomorfná s množinou všetkých racionálnych čísiel (pri obvyklom usporiadaní). Utvorme podľa predošlého príslušné maximálne reťazce J_1 a J_2 v čiastočne usporiadanom systéme S_1. Kardinálne číslo množiny J_1 resp. J_2 je zrejme $\aleph_0$ resp. c. Tým je tvrdenie vety dokázané.[3])

Naskytuje sa otázka, či aj veta ($\mathbf{S}_1$) ostáva v platnosti, ak v nej výraz „úplne distributívny sväz" nahradíme výrazom „úplne distributívna Booleova algebra". Na základe analogických úvah ako v dôkaze predošlej vety sa takáto otázka dá redukovať na otázky, týkajúce sa len usporiadaných množín. Nech $f(\alpha)$ je supremum všetkých mohutností množín rezov v usporiadanej množine

[2]) Čiastočné usporiadanie je dané množinovou inklúziou. Podobne v ďalšom.

[3]) Lahko sa zostrojí spočitateľná Booleova algebra, ktorá splňuje podmienku (**JD**). (Je ňou napr. algebra všetkých konečných podmnožín a ich komplementov v danej spočitateľnej množine.) L. RIEGER ma upozornil na to, že existujú nespočitateľné úplné Booleove algebry, ktoré splňujú podmienku (**JD**), a dokonca omnoho silnejšiu podmienku: že totiž každé dva maximálne reťazce sú (vo zmysle ich usporiadania) navzájom izomorfné.

M mohutnosti α, a to pri všetkých možných usporiadaniach množiny M. Aké vlastnosti má takto definovaná „funkcia" $f(\alpha)$? Ak $f(\alpha) = \gamma$, musí ku každému γ_1, $\alpha \leqq \gamma_1 \leqq \gamma$ existovať usporiadanie množiny M tak, aby systém všetkých dolných skupín Dedekindových rezov množiny M (pri tomto usporiadaní) mal kardinálne číslo γ_1?

LITERATÚRA

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, New York, 1948.

[2] *G. Szász:* On the structure of semi-modular lattices of infinite length, Acta scientiarum mathem. *14* (1952), 239—245.

[3] *G. Szász:* Generalization of a theorem of Birkhoff concerning maximal chains of a certain type of lattices, Acta scientiarum math. *16* (1955), 89—91.

[4] *J. Jakubík:* On the Jordan-Dedekind chain condition, Acta scientiarum math. *16* (1955), 266—269.

[5] *A. Tarski:* Sur les classes closes par rapport à certaines opérations élémentaires, Fund. Math. *16* (1929), 181—305.

[6] *F. Hausdorff:* Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

O KIEFER-WOLFOWITZOVĚ APROXIMAČNÍ METHODĚ

VÁCLAV DUPAČ, Praha.

(Došlo dne 20. ledna 1956.) DT: 519.282

Jsou vyšetřovány asymptotické vlastnosti Kiefer-Wolfowitzova stochastického iteračního postupu pro odhad hodnoty $x = \Theta$, v níž regresní funkce $M(x)$ nabývá svého maxima. Rozlišují se dva případy: V prvním se předpokládá, že derivace $M'(x)$ leží mezi dvěma přímkami s kladnými směrnicemi (= vlastnost V) a že rozptyly odchylek od regresní funkce jsou ohraničené; v druhém případě se předpokládá, že V platí v nějakém okolí Θ, že odchylky od regresní funkce jsou ohraničené a že je znám konečný interval obsahující Θ. V obou případech jsou odvozeny řádové odhady rozptylů n-tých aproximací, je zodpověděna otázka o optimální volbě konstant a_n, c_n a za dodatečných předpokladů je dokázána asymptotická normalita vhodně normovaných n-tých aproximací. Myšlenkově je vzorem práce K. L. Chunga [7], v níž se studují obdobné vlastnosti Robbins-Monroovy methody pro řešení rovnice $M(x) = \alpha$.

1. Stochastické aproximační methody

Stochastickými aproximačními methodami se nazývají jisté iterační postupy, jimiž lze přibližně řešit tuto úlohu:

$M(x)$ je funkce, jejíž analytické vyjádření neznáme, která však splňuje určité předpoklady. Kromě těchto předpokladů lze získat další informaci o funkci $M(x)$ jenom tak, že zvolíme libovolně nějakou hodnotu x a k ní experimentálně zjistíme hodnotu $y = M(x) + \varepsilon$, kde ε je určitá náhodná složka. Pokusů můžeme provést libovolný, avšak konečný počet; hodnotu x můžeme od pokusu k pokusu měnit a to i v závislosti na výsledcích pokusů předcházejících. Je-li x_n hodnota x zvolená v n-tém pokusu, pak nechť podmíněné rozložení pravděpodobností náhodné složky ε_n závisí jen na x_n (a nikoli na pokusech předcházejících) a střední hodnota tohoto rozložení nechť je rovna nule.

Úkolem je nalézt co nejlepší přiblížení té hodnotě x, pro níž funkce $M(x)$ nabývá nějaké význačné hodnoty (na př. svého maxima nebo dané hodnoty α).

Úlohy řešení rovnice, resp. nalezení extrémů funkce mají popsaný charakter v mnoha praktických případech, kde funkční závislosti jsou zjišťovány empiricky. Jestliže náhodné složky jsou zanedbatelné velikosti, nebo jestliže neznáme pouze parametry funkce $M(x)$, ale známe typ této funkce (a splňují-li přitom náhodné složky určité předpoklady), lze k řešení použít běžných method praktické analysy, v posledním případě ve spojení na př. s methodou nejmenších čtverců; není-li tomu tak, jsou úloze adekvátní stochastické aproximační methody.

První methodu tohoto typu (pro řešení rovnice $M(x) = \alpha$) odvodili H. ROBBINS a S. MONRO [1]. Autoři předpokládají:

$\{H(y|x)\}$ je systém distribučních funkcí, závislých na reálném parametru x; $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, \mathrm{d}H(y|x)$ je regresní funkce; α je daná, Θ hledaná konstanta; dále platí

(A) existuje konstanta $C > 0$ tak, že $\int_{-C}^{C} \mathrm{d}H(y|x) = 1$ pro $-\infty < x < +\infty$,

a buďto

(B) $M(x) \leqq \alpha - \delta$ pro $x < \Theta$, $M(x) \geqq \alpha + \delta$ pro $x > \Theta$, pro nějaké $\delta > 0$,

nebo

(B_1) $M(x)$ je neklesající, $M(\Theta) = \alpha$, $M'(\Theta) > 0$.

Budiž $\{a_n\}$ posloupnost kladných čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$.

Zvolme libovolně konstantu x_1 a pro $n \geqq 1$ definujme

$$x_{n+1} = x_n + a_n(\alpha - y_n) ,$$

kde y_n je náhodná proměnná, jejíž distribuční funkce pro daná $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ jest $H(y|x_n)$. Za těchto předpokladů x_n konverguje k Θ (pro $n \to \infty$) podle kvadratického středu a tedy také podle pravděpodobnosti.

J. WOLFOWITZ [2] nahradil (A) předpokladem

(A_1) $|M(x)| \leqq C$, $\int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, \mathrm{d}H(y|x) \leqq \sigma^2$ pro $-\infty < x < +\infty$

a současně zeslabil (B_1) na

(B_2) $M(x) \lesseqqgtr \alpha$ pro $x \lesseqqgtr \Theta$, $M(x)$ je rostoucí pro $|x - \Theta| < \delta$,

$$\inf_{|x-\Theta| \geqq \delta} |M(x) - \alpha| > 0.$$

Za těchto předpokladů x_n konverguje k Θ podle pravděpodobnosti.

J. R. BLUM [3] nahradil první nerovnost v (A_1) slabší nerovností $|M(x)| \leqq C + D|x|$, $C \geqq 0$, $D \geqq 0$, současně zeslabil (B_2) na

(B_3) $M(x) \lesseqgtr \alpha$ pro $x \lesseqgtr \Theta$, $\inf_{\delta_1 \leqq |x-\Theta| \leqq \delta_2} |M(x) - \alpha| > 0$ pro lib. $0 < \delta_1 < \delta_2$

a dokázal, že za těchto předpokladů $x_n \to \Theta$ s pravděpodobností 1.

Konvergenci $x_n \to \Theta$ s pravděpodobností 1 dokázal rovněž G. KALLIANPUR [4] za původních RM předpokladů, s jistým omezením na volbu konstant a_n. (Toto omezení obsahuje implicitně i omezení na funkci $M(x)$.) Důkaz je odlišný od Blumova a umožňuje jako vedlejší výsledek horní řádový odhad veličin $b_n = \mathsf{E}(x_n - \Theta)^2$.

Odhady veličin b_n se podrobněji zabýval L. SCHMETTERER. V článku [5] vychází z předpokladů

(A_2) $\mathsf{E}[(y_n - \alpha)^2] \leqq C = C(x_1, \Theta)$ pro $n = 1, 2, \ldots$,

(B_4) $M(x) \lesseqqgtr \alpha$ pro $x \lesseqqgtr \Theta$, $|M(x) - \alpha| \geqq K|x - \Theta|$ pro $-\infty < x < +\infty$ a nějaké $K > 0$;

v článku [6] pak vychází z předpokladu (A) a

(B_5) $M(x) \lesseqgtr \alpha$ pro $x \lesseqgtr \Theta$, $|M(x) - \alpha| \geqq K|x - \Theta|$ pro $|x - \Theta| < \varepsilon$, $|M(x) - \alpha| \geqq B$ pro $|x - \Theta| \geqq \varepsilon$, pro nějaká $K > 0$, $B > 0$, $\varepsilon > 0$.

(Předpoklad (B_5) je slabší než (B_1).) V obou případech je dokázána konvergence $x_n \to \Theta$ podle kvadratického středu a při speciální volbě a_n jsou odvozeny horní řádové odhady veličin b_n. V prvním případě platí

$$\left(a_n = \frac{1}{n^\alpha},\quad \frac{1}{2} < \alpha < 1\right) \Rightarrow b_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right);$$

$$\left(a_n = \frac{a}{n},\quad a > \frac{1}{2K}\right) \Rightarrow b_n = O\left(\frac{1}{n}\right);$$

v druhém případě

$$\left(a_n = \frac{1}{n^\alpha},\quad \frac{1}{2} < \alpha < 1\right) \Rightarrow b_n = O\left(\frac{1}{n^{\mathrm{Min}(2\alpha - 1,\, K_1(1-\alpha))}}\right);$$

$$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow b_n = O\left(\frac{1}{\log^{K_1} n}\right),$$

kde K_1 je určitá konstanta závislá na $M(.)$, C, $|x_1 - \Theta|$.

Pozoruhodné asymptotické vlastnosti RM methody odvodil K. L. CHUNG [7]. Rozlišuje dva případy — „omezený“ a „quasi-lineární“. V prvním případě vyslovuje předpoklad (A), dále

(B_0) $M(x) \lesseqqgtr \alpha$ pro $x \lesseqqgtr \Theta$, $M'(\Theta) > 0$;

(C) $\inf\limits_{|x - \Theta| > \delta} |M(x) - \alpha| > 0$ pro každé $\delta > 0$;

případně ještě

(D) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \,\mathrm{d}H(y)|x) \geqq K > 0 \qquad$ pro $-\infty < x < +\infty$,

(E) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \,\mathrm{d}H(y)|x) = \sigma^2 > 0 \qquad$ pro $-\infty < x < +\infty$.

Za předpokladů (A), (B_0), (C) a při volbě $a_n = \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}, \frac{1}{2(1+K')} < \varepsilon < \frac{1}{2}$, kde K' je určitá konstanta závislá na $M(.)$, C, $|x_1 - \Theta|$, odvozuje horní odhady pro absolutní momenty $\beta_n^{(r)} = \mathsf{E}\,[|x_n - \Theta|^r]$ všech řádů, za dodatečného předpokladu (D) také dolní odhady pro $\beta_n^{(r)}$ a za dodatečného předpokladu (E) dokazuje[1]), že limitní rozložení náhodných proměnných $n^{\frac{1-\varepsilon}{2}}(x_n - \Theta)$ je normální s nulovou střední hodnotou a s rozptylem $\frac{\sigma^2}{2\alpha_1}$, kde $\alpha_1 = M'(\Theta)$.

V druhém případě nahrazuje (A) předpokladem

(A_0) $M(x)$ je ohraničená v každém konečném intervalu,

$$0 < \liminf_{|x| \to \infty} \frac{M(x)}{x} \leqq \limsup_{|x| \to \infty} \frac{M(x)}{x} < +\infty$$

a vyslovuje další předpoklad

(F) $\int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^p \, \mathrm{d}H(y|x) \leqq K_p$ pro $-\infty < x < +\infty$ a pro nějaké sudé $p > 2$.

Za předpokladů (A_0), (B_0), (C), (F) a při volbě $a_n = \frac{a}{n}$, $a > \frac{1}{2K''}$, (K'' má obdobný význam jako K') odvozuje horní odhady pro $\beta_n^{(r)}$, $r \leqq p$ a za dodatečného předpokladu (E) a za předpokladu, že (F) platí pro každé sudé $p > 2$ dokazuje,[1]) že limitní rozložení náhodných proměnných $n^{\frac{1}{2}}(x_n - \Theta)$ je normální $N\left(0, \frac{\sigma^2 a^2}{2\alpha_1 a - 1}\right)$.

Závěrem je za jistých podmínek dokázáno, že veličina x_{n+1}, kterou dostaneme provedením n kroků RM methody, je asymptoticky minimaximálním odhadem Θ.

Zobecněním RM methody na případ, kdy x i $M(x)$ jsou k-rozměrné vektory, se zabýval J. R. Blum [8]; za dosti speciálních předpokladů dokázal, že zobecněná RM methoda konverguje s pravděpodobností 1.

J. Kiefer a J. Wolfowitz [9] odvodili (vhodnou modifikací RM methody) stochastický iterační postup pro odhad hodnoty $x = \Theta$, v níž regresní funkce $M(x)$ nabývá svého maxima:

Nechť $H(y|x)$ a $M(x)$ mají týž význam jako dříve; dále nechť

(A') $M(x)$ je rostoucí pro $x < \Theta$ a klesající pro $x > \Theta$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, \mathrm{d}H(y|x) \leqq \sigma^2 \text{ pro } -\infty < x < +\infty;$$

[1]) Důkaz obsahuje chybu (neoprávněné použití 1. věty o střední hodnotě v integrálním počtu); nicméně tvrzení i základní myšlenka důkazu jsou správné.

(B′) existují $\beta > 0$, $B > 0$ tak, že

$$|x' - \Theta| + |x'' - \Theta| < \beta \Rightarrow |M(x') - M(x'')| \leqq B\,|x' - x''|\,;$$

(C′) existují $\varrho > 0$, $R > 0$ tak, že $|x' - x''| < \varrho \Rightarrow |M(x') - M(x'')| < R$;

(D′) k libovolnému $\delta > 0$ existuje $\pi(\delta) > 0$ tak, že

$$|x - \Theta| > \delta \Rightarrow \inf_{\frac{1}{2}\delta > \varepsilon > 0} \frac{|M(x + \varepsilon) - M(x - \varepsilon)|}{\varepsilon} > \pi(\delta)\,.$$

Nechť $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ jsou posloupnosti kladných čísel takové, že

$$c_n \to 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n < +\infty\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 < +\infty.$$

Zvolme libovolně konstantu x_1 a pro $n \geqq 1$ definujme

$$x_{n+1} = x_n + a_n \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\,,$$

kde y_{2n}, y_{2n-1} jsou náhodné proměnné, jež pro daná $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, \ldots, y_{2n-2}$ mají po řadě distribuční funkce $H(y|x_n + c_n)$, $H(y|x_n - c_n)$ a jsou nezávislé. Za těchto předpokladů $x_n \to \Theta$ podle pravděpodobnosti.

J. R. Blum dokázal [3], že KW methoda konverguje s pravděpodobností 1; přitom lze vynechat předpoklady (B′) a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n < +\infty$. Rovněž tato methoda byla v [8] zobecněna na případ, kdy $M(x)$ je funkce k proměnných.

Naproti tomu nebyly dosud odvozeny odhady veličin b_n a (nezvrhlá) limitní rozložení x_n; rovněž nebyla zodpověděna otázka — kterou kladou KW v [9] — o optimální volbě konstant a_n, c_n. Částečné řešení těchto problémů je podáno v následujících odstavcích tohoto článku. Předpoklady KW methody jsou modifikovány tak, aby bylo možno použít Chungovy myšlenky důkazu.

Rozlišuji opět dva případy; v prvním — „quasi-parabolickém“ — jsou předpoklady (B′), (C′), (D′) nahrazeny jediným předpokladem

$$\text{(E′)} \qquad K_0\,|x - \Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1\,|x - \Theta| \qquad \text{pro } -\infty < x < +\infty$$

a je dokázána konvergence $x_n \to \Theta$ podle kvadratického středu. (Konvergence neplyne z dříve uvedených vět, neboť předpoklady (E′) a (C′) se navzájem vylučují.)

Pro posloupnosti $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ typu $a_n = \frac{a}{n^\alpha}$, $c_n = \frac{c}{n^\gamma}$, kde $\alpha = 1 \Rightarrow a > \frac{1}{4K_0}$, jsou odvozeny horní řádové odhady veličin b_n a je dokázáno, že volba $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{4}$, která dává odhad $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$, je optimální v následujícím smyslu: Jestliže buďto $\alpha \neq 1$ nebo $\gamma \neq \frac{1}{4}$, potom existuje systém $\{H(y)|x)\}$, splňující

(A′), (E′) a takový, že $b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$. Za dodatečného předpokladu

(F′) $|M'''(x)| \leqq Q$ pro $-\infty < x < +\infty$

je optimální volba $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{6}$, která dává odhad $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$; za dodatečného předpokladu

(G′) $M^{(2k+1)}(\Theta) = 0$, $|M^{(2k+2)}(x)| \leqq A^{2k+1}(2k+1)!$
pro $-\infty < x < +\infty$, $k = 1, 2, \ldots$

existuje k libovolnému $\varepsilon > 0$ takové γ_0, že $(\alpha = 1,\ \gamma = \gamma_0) \Rightarrow b_n = O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)$.

Jsou-li splněny předpoklady (A′), (E′) a dále

(H′) $\sigma^2(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \,\mathrm{d}H(y|x)$ je spojitá a kladná v nějakém okolí Θ,

(I′) pro každé sudé $p > 2$ existuje K_p tak, že

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^p \,\mathrm{d}H(y|x) \leqq K_p \qquad \text{pro } -\infty < x < +\infty$$

a nastává-li některý ze tří případů: 1° $\gamma \geqq \frac{1}{4}\alpha$ a v nějakém okolí Θ existuje spojitá $M''(x) < 0$, 2° $\gamma > \frac{1}{6}\alpha$ a platí (F′), 3° platí (G′), potom náhodné proměnné $n^{\frac{1}{2}(\alpha-2\gamma)}(x_n - \Theta)$ jsou asymptoticky normální se střední hodnotou 0 a s rozptylem $\frac{\sigma_\Theta^2 a}{2mc^2}$ pro $\alpha < 1$, $\frac{\sigma_\Theta^2 a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)\,c^2}$ pro $\alpha = 1$, kde $\sigma_\Theta^2 = \sigma^2(\Theta)$, $m = |M''(\Theta)|$.

Druhý případ — ohraničených odchylek od regresní funkce — je charakterisován předpokladem

(A″) $M(x)$ je rostoucí (klesající) pro $x < \Theta$ $(x > \Theta)$,

existuje $C > 0$ tak, že $\int\limits_{M(x)-C}^{M(x)+C} \mathrm{d}H(y|x) = 1$ pro $-\infty < x < +\infty$,

existuje omezený interval $\langle A, B\rangle$ takový, že

$$1°\ \Theta \in (A, B),\quad 2°\ x \operatorname{non} \in \langle A, B\rangle \Rightarrow H(y|x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } y \leqq M(x)\,, \\ 1 \text{ pro } y > M(x)\,, \end{cases}$$

dále předpoklady (C′), (D′) a lokálně (pro $|x - \Theta| \leqq \delta$) vysloveným předpokladem (E′). Poslední předpoklad je splněn zejména tehdy, když existuje $M''(\Theta) < 0$. Speciální tvar distribučních funkcí $H(y|x)$ pro $x \operatorname{non} \in \langle A, B\rangle$ není omezením, jestliže je předem známo, že $\Theta \in (A, B)$; potom lze totiž $H(y|x)$ a $M(x)$ změnit vně intervalu $\langle A, B\rangle$ ve shodě s (A″) a ostatními předpoklady.

Za předpokladů (A″), (C′), (D′) a (E′) platí (s nepatrnou změnou) všechna tvrzení, dokázaná pro první případ; rovněž předpoklady (F′), (G′) stačí vyslovit v tomto případě jen lokálně; předpoklad (I′) je již obsažen v (A″).

V práci používám těchto symbolů a úmluv:

Jsou-li $f(n)$ a $g(n) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ dvě posloupnosti, potom symbol $f(n) = O(g(n))$ značí, že $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} < +\infty$ (může být i nula); symbol $f(n) = O^{-1}(g(n))$ značí, že $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{g(n)} > 0$ (může být i $+\infty$). Symbolu „o" používám jen ve spojení $f(n) = o(1)$, t. j. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$. Je-li s přirozené číslo, potom značím $(2s-1)!! = (2s-1)(2s-3)\ldots 3.1$.

Píši-li rovnost (nerovnost) mezi náhodnými proměnnými, rozumím tím vždy rovnost (nerovnost) s pravděpodobností 1, aniž to výslovně připomínám. (Některé rovnosti v textu platí ovšem jistě; rozlišovat mezi oběma případy je však zbytečné vzhledem k tomu, že všechny věty obsahují pouze tvrzení o středních hodnotách.)

V definici x_{n+1} předpokládám (jak se mlčky činí i ve zmíněných pracích o RM a KW methodě), že náhodné proměnné y_n požadovaných vlastností existují. Tento předpoklad znamená jisté omezení na distribuční funkce $H(y \mid x)$ [2]; k jeho splnění stačí, aby pro každé y byla $H(y \mid x)$ borelovsky měřitelná funkce x.

2. KW methoda v případě „quasi-parabolické" regrese

Pro každé reálné x nechť $H(y|x)$ je distribuční funkce. Regresní funkce $M(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \, dH(y|x)$ nechť je konečná, rostoucí pro $x < \Theta$ a klesající pro $x > \Theta$.

Učiňme předpoklady

(I) $\sigma^2(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, dH(y|x) \leqq \sigma^2$ pro $-\infty < x < +\infty$;

(II) $K_0 |x - \Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1 |x - \Theta|$ pro $-\infty < x < +\infty$;

(σ^2, K_0, K_1 jsou kladné konstanty).

Nechť $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ jsou posloupnosti kladných čísel, nechť

$$c_n \to 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2 < +\infty. \tag{1}$$

Budiž x_1 libovolná konstanta (nebo náhodná proměnná, která má konečné momenty všech řádů). Pro $n \geqq 1$ položme

$$x_{n+1} = x_n + a_n \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n},$$

[2]) Upozornil na to O. Hanš ve svém sdělení na IV. sjezdu čs. matematiků.

kde y_{2n} a y_{2n-1} jsou náhodné proměnné, jež pro daná $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, \ldots, y_{2n-2}$ mají po řadě distribuční funkce $H(y \mid x_n + c_n)$, $H(y \mid x_n - c_n)$, a jsou nezávislé.

Věta 1. *Za předpokladů* (I), (II) *a* (1) *konverguje* $x_n \to \Theta$ *podle kvadratického středu.*

Důkaz. Pro x reálné a $c > 0$ položme $M_c(x) = \dfrac{M(x+c) - M(x-c)}{c}$; dále položme

$$\varkappa_\Theta(x) = \frac{-M'(x)}{x - \Theta} \text{ pro } x \neq \Theta, \; \varkappa_\Theta(\Theta) = K_0 .$$

Vzhledem k (II) a vzhledem k monotonii $M(x)$ pro $x < \Theta$ a $x > \Theta$ jest

$$K_0 \leqq \varkappa_\Theta(x) \leqq K_1 \text{ pro } -\infty < x < +\infty .$$

Dále jest

$$\begin{aligned} M_c(x) &= M'(x + \vartheta_1 c) + M'(x - \vartheta_2 c) = -\varkappa_\Theta(x + \vartheta_1 c)(x + \vartheta_1 c - \Theta) - \\ &- \varkappa_\Theta(x - \vartheta_2 c)(x - \vartheta_2 c - \Theta) = -\{\varkappa_\Theta(x + \vartheta_1 c) + \varkappa_\Theta(x - \vartheta_2 c)\} \,. \\ &. (x - \Theta) + \{\vartheta_2 \varkappa_\Theta(x - \vartheta_2 c) - \vartheta_1 \varkappa_\Theta(x + \vartheta_1 c)\}\, c = -K_{\Theta,c}(x)(x - \Theta) + \\ &+ G_{\Theta,c}(x)\, c \,, \end{aligned}$$

kde

$$0 < \vartheta_i < 1, \quad i = 1, 2, \quad 2K_0 \leqq K_{\Theta,c}(x) \leqq 2K_1 \,, \; |G_{\Theta,c}(x)| < K_1 \,. \tag{2}$$

Jest tedy

$$(x - \Theta)\, M_c(x) = -K_{\Theta,c}(x)(x - \Theta)^2 + cG_{\Theta,c}(x)(x - \Theta) \,,$$

$$\begin{aligned} -2K_1(x - \Theta)^2 - K_1 c|x - \Theta| \leqq (x - \Theta)\, M_c(x) \leqq -2K_0(x - \Theta)^2 + \\ + K_1 c\, |x - \Theta| \,, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 0 \leqq M_c^2(x) \leqq 2\,\{K_{\Theta,c}^2(x)(x - \Theta)^2 + c^2 G_{\Theta,c}^2(x)\} < \\ < 8K_1^2(x - \Theta)^2 + 2K_1^2 c^2 \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Z monotonie funkce $M(x)$ pro $x < \Theta$ a $x > \Theta$ a ze spojitosti v bodě $x = \Theta$ následuje platnost implikace $(x - \Theta)\, M_c(x) > 0 \Rightarrow |x - \Theta| < c$; z této implikace a z pravé větve nerovnosti (3) vyplývá nerovnost $(x - \Theta)\, M_c(x) < K_1 c^2$.

Z definice náhodných proměnných x_n plyne

$$(x_{n+1} - \Theta)^2 = (x_n - \Theta)^2 + 2a_n(x_n - \Theta)\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n} + a_n^2\left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^2 .$$

Vypočtěme podmíněné střední hodnoty výrazů

$$\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n} \,, \quad \left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^2$$

za předpokladu x_n. Píšeme-li $y_{2n} - y_{2n-1} = (y_{2n} - M(x_n + c_n)) - (y_{2n-1} - M(x_n - c_n)) + (M(x_n + c_n) - M(x_n - c_n))$, dostaneme

$$\mathsf{E}\left[\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n} \mid x_n\right] = M_{c_n}(x_n) \,,$$

a vzhledem k nezávislosti y_{2n}, y_{2n-1}

$$\mathsf{E}\left[\left(\frac{y_{2n}-y_{2n-1}}{c_n}\right)^2 \Big| \, x_n\right] = \frac{\sigma^2(x_n+c_n)+\sigma^2(x_n-c_n)}{c_n^2} + M_{c_n}^2(x_n)\,.$$

Odtud a v dalším řádku postupně dle (5), (I) a (4):

$$\mathsf{E}\,[(x_{n+1}-\Theta)^2 \mid x_n] =$$

$$= (x_n-\Theta)^2 + 2a_n(x_n-\Theta)\, M_{c_n}(x_n) + a_n^2 \frac{\sigma^2(x_n+c_n)+\sigma^2(x_n-c_n)}{c_n^2} + a_n^2 M_{c_n}^2(x_n) \leqq$$

$$\leqq (x_n-\Theta)^2 + 2K_1 a_n c_n^2 + 2\sigma^2 a_n^2 c_n^{-2} + 8K_1^2 a_n^2 (x_n-\Theta)^2 + 2K_1^2 a_n^2 c_n^2\,. \qquad (6)$$

Označíme-li jako b_{n+1} nepodmíněnou střední hodnotu

$$\mathsf{E}[(x_{n+1}-\Theta)^2] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[(x_{n+1}-\Theta)^2|x_n]]\,, \qquad (b_1 = \mathsf{E}[(x_1-\Theta)^2])\,,$$

dostáváme

$$b_{n+1} \leqq q_n b_n + w_n\,, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

kde

$$q_n = 1 + 8K_1^2 a_n^2, \quad w_n = 2K_1 a_n c_n^2 + 2\sigma^2 a_n^2 c_n^{-2} + 2K_1^2 a_n^2 c_n^2\,.$$

Odtud

$b_{n+1} \leqq b_1 \prod_{k=1}^{n} q_k + \sum_{k=1}^{n} w_k \prod_{j=k+1}^{n} q_j$, $n = 1, 2, \ldots$, kde symbol $\prod_{j=n+1}^{n} q_j$ značí 1. Dle předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje a tedy také $\prod_{k=1}^{\infty} q_k$ konverguje; z ostatních předpokladů o a_n, c_n vyplývá, že také $\sum_{k=1}^{\infty} w_k \prod_{j=k+1}^{\infty} q_j$ konverguje. Ježto $q_n > 1$, jest

$$b_{n+1} \leqq b_1 \prod_{k=1}^{\infty} q_k + \sum_{k=1}^{\infty} w_k \prod_{j=k+1}^{\infty} q_j\,, \quad \text{t. j.} \quad b_n \leqq B^2, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \qquad (7)$$

Ze známé nerovnosti $\mathsf{E}[|z|] \leqq \sqrt{\mathsf{E}[z^2]}$ plyne:

$$\mathsf{E}[|x_n-\Theta|] \leqq B, \qquad n = 1, 2, \ldots\,. \qquad (8)$$

Z rovnosti (6) dostáváme použitím pravých větví nerovností (3), (4):

$$\mathsf{E}[(x_{n+1}-\Theta)^2 \,|\, x_n] \leqq (x_n-\Theta)^2 - 4K_0 a_n (x_n-\Theta)^2 + 2K_1 a_n c_n |x_n-\Theta| +$$
$$+ 2\sigma^2 a_n^2 c_n^{-2} + 8K_1^2 a_n^2 (x_n-\Theta)^2 + 2K_1^2 a_n^2 c_n^2\,. \qquad (9)$$

Utvoříme-li na obou stranách střední hodnoty a užijeme-li (7), (8), dostaneme $b_{n+1} \leqq q_n' b_n + w_n'$, $n = 1, 2, \ldots$, kde $q_n' = 1 - 4K_0 a_n$, $w_n' = 2K_1 B a_n c_n + 2\sigma^2 a_n^2 c_n^{-2} + 8K_1^2 B^2 a_n^2 + 2K_1^2 a_n^2 c_n^2$. Pro všechna $n \geqq n_0$ je $q_n' > 0$ (neboť $a_n \to 0$). Nechť $N \geqq n_0$; indukcí se snadno ověří, že $b_{n+1} \leqq b_N \prod_{k=N}^{n} q_k' + \sum_{k=N}^{n} w_k' \,.\, \prod_{j=k+1}^{n} q_j'$, $n = N, N+1, \ldots$. Z (1) plyne, že $\prod_{k=N}^{\infty} q_k'$ diverguje k nule (při tom součiny $\prod_{j=k+1}^{n} q_j'$ jsou vesměs nejvýš rovny 1), a že $\sum_{k=N}^{\infty} w_k'$ konverguje. K libovolnému

$\varepsilon > 0$ zvolme $N_0 \geqq n_0$ tak, že $\sum_{k=N_0}^{\infty} w'_k < \frac{1}{2}\varepsilon$, a $n_1 > N_0$ tak, že $\prod_{k=N_0}^{n_1} q'_k < \frac{\varepsilon}{2B^2}$; potom $b_{n+1} < \varepsilon$ pro všechna $n \geqq n_1$. To jest, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, c. b. d.

V dalším budeme vyšetřovat rychlost konvergence $b_n \to 0$. Omezíme se na případ, kdy konstanty a_n, c_n jsou typu

$$a_n = \frac{a}{n^\alpha}, \quad c_n = \frac{c}{n^\gamma}. \tag{10}$$

Z (1) vyplývá:

$$\tfrac{3}{4} < \alpha \leqq 1, \quad 1 - \alpha < \gamma < \alpha - \tfrac{1}{2}, \quad a > 0, \quad c > 0; \tag{11}$$

jestliže $\alpha = 1$, pak budeme předpokládat, že

$$a > \frac{1}{4K_0}. \tag{12}$$

K řádovým odhadům veličin b_n použijeme následujících lemmat, která odvodil Chung [7].

Lemma 1. *Nechť $\{b_n\}$ je posloupnost reálných čísel; pro všechna $n \geqq n_0$ nechť platí*

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{c}{n^s}\right) b_n + \frac{c'}{n^t}, \tag{13}$$

kde $0 < s < 1$, $s < t$, $c > 0$, $c' > 0$. Potom

$$\limsup_{n\to\infty} n^{t-s} b_n \leqq \frac{c'}{c}. \tag{14}$$

Lemma 2. *Nechť $\{b_n\}$ je posloupnost reálných čísel; pro všechna $n \geqq n_0$ nechť platí*

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{c}{n}\right) b_n + \frac{c'}{n^{p+1}}, \tag{15}$$

kde $c > p > 0$, $c' > 0$. Potom

$$b_n \leqq \frac{c'}{c-p} \cdot \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{p+1}} + \frac{1}{n^c}\right). \tag{16}$$

Lemma 1 platí i tehdy, zaměníme-li v (13) a (14) současně „$\leqq$" na „$\geqq$" a „$\limsup_{n\to\infty}$" na „$\liminf_{n\to\infty}$". Lemma 2 platí i tehdy, zaměníme-li v (15) a (16) současně „$\leqq$" na „$\geqq$". Na tato tvrzení se budeme odvolávat jako na **lemma 3,** resp. **4.** Dokážeme nyní

větu 2. *Za předpokladů* (I), (II) *a* (10), (11), (12) *platí*

$$b_n = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^{2\gamma}}\right), & \textit{když } \gamma < \frac{1}{4}\alpha, \\[2ex] O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right), & \textit{když } \gamma \geqq \frac{1}{4}\alpha. \end{cases}$$

Poznámka. Případ $\gamma < \frac{1}{4}\alpha$ může (vzhledem k (11)) nastat jen tehdy, je-li $\frac{4}{5} < \alpha \leqq 1$.

Důkaz věty 2. Utvoříme-li opět střední hodnoty na obou stranách nerovnosti (9) a užijeme-li (7) na předposlední člen vpravo, dostaneme

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{4K_0a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{2K_1ac}{n^{\alpha+\gamma}} \mathsf{E}\,[|x_n - \Theta|] + \frac{2\sigma^2a^2c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} + \\ + \frac{8K_1^2B^2a^2}{n^{2\alpha}} + \frac{2K_1^2a^2c^2}{n^{2\alpha+2\gamma}}. \tag{17}$$

Platí nerovnost

$$\mathsf{E}\,[|x_n - \Theta|] = \int_{|x_n-\Theta|\leqq\varepsilon_n} |x_n - \Theta|\,\mathrm{dP} + \int_{|x_n-\Theta|>\varepsilon_n} |x_n - \Theta|\,\mathrm{dP} \leqq \\ \leqq \varepsilon_n \mathsf{P}[|x_n - \Theta| \leqq \varepsilon_n] + \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{|x_n-\Theta|>\varepsilon_n} (x_n - \Theta)^2\,\mathrm{dP} \leqq \varepsilon_n + \frac{1}{\varepsilon_n} b_n \tag{18}$$

pro libovolné $\varepsilon_n > 0$; položme $\varepsilon_n = \dfrac{2K_1c}{\varepsilon K_0 n^\gamma}$ $(0 < \varepsilon < 4)$ a dosaďme do (17). Pro $n > n_0(\eta)$ dostáváme

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{(4-\varepsilon)K_0a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{4K_1^2K_0^{-1}\varepsilon^{-1}ac^2}{n^{\alpha+2\gamma}} + \frac{(2+\eta)\,\sigma^2a^2c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}},$$

kde η je libovolné kladné číslo.

Posloupnost $\{b_n\}$ zřejmě vyhovuje předpokladům lemmatu 1, resp. 2. (Ježto $a > \dfrac{1}{4K_0}$ dle (12), lze volit ε tak, aby $(4 - \varepsilon)K_0a > \mathrm{Max}\,(2\gamma, 1 - 2\gamma)$.) Použitím těchto lemmat plyne tvrzení věty 2.

Věta 3. *Platí-li* (I), (II) *a je-li* $a_n = \dfrac{a}{n}$, $c_n = \dfrac{c}{n^{\frac{1}{4}}}$, $a > \dfrac{1}{4K_0}$, *potom* $b_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$.

Tato volba $\{a_n\}, \{c_n\}$ *je optimální v následujícím smyslu: Jestliže* $a_n' = \dfrac{a'}{n^{\alpha'}}$, $c_n' = \dfrac{c'}{n^{\gamma'}}$ *splňují* (10), (11), (12) *a jestliže buďto* $\alpha' \neq 1$ *nebo* $\gamma' \neq \frac{1}{4}$, *potom existuje systém* $\{H(y|x)\}$, *splňující* (I), (II), *pro nějž* $b_n = O^{-1}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right)$, *kde* $\varepsilon > 0$.

Důkaz. Dokážeme, že pro každou přípustnou dvojici α, γ existuje systém $\{H(y|x)\}$, pro nějž platí tvrzení věty 2 i tehdy, nahradíme-li symbol „O" symbolem „O^{-1}". Tím bude dokázána i věta 3.

1) Nechť $\gamma \geqq \frac{1}{4}\alpha$. Učiňme předpoklad

$$\sigma^2(x) \geqq \sigma_0^2 > 0 \quad \text{pro} \quad -\infty < x < +\infty. \tag{19}$$

Vyjděme z rovnosti (6). Použitím (19) a levých větví nerovností (3), (4) dostáváme

$$\mathsf{E}\,[(x_{n+1} - \Theta)^2|x_n] \geqq (x_n - \Theta)^2 - 4K_1a_n(x_n - \Theta)^2 - \\ - 2K_1a_nc_n|x_n - \Theta| + 2\sigma_0^2a_n^2c_n^{-2};$$

odtud

$$b_{n+1} \geqq \left(1 - \frac{4K_1a}{n^\alpha}\right) b_n - \frac{2K_1ac}{n^{\alpha+\gamma}} \mathsf{E}[|x_n - \Theta|] + \frac{2\sigma_0^2a^2c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} . \tag{20}$$

Položme v nerovnosti (18)

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon\sigma_0^2a}{2K_1c^3n^\gamma}, \quad 0 < \varepsilon < 2 ,$$

a dosaďme do (20); dostaneme

$$b_{n+1} \geqq \left(1 - \frac{4K_1a + 4K_1^2c^4\varepsilon^{-1}\sigma_0^{-2}}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{(2-\varepsilon)\,\sigma_0^2a^2c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} ,$$

neboť $\alpha + 2\gamma \geqq 2\alpha - 2\gamma$. Dle lemmatu 3 resp. 4 jest $b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right)$.

2) Nechť $\gamma < \frac{1}{4}\alpha$. Nechť $\{H(y|x)\}$ je systém takový, že

$$M(x) = \begin{cases} -\ (x-\Theta)^2 & \text{pro} \quad x \leqq \Theta , \\ -\ \tfrac{1}{2}(x-\Theta)^2 & \text{pro} \quad x > \Theta . \end{cases} \tag{21}$$

Předpoklad (II) je zřejmě splněn s konstantami $K_0 = 1$, $K_1 = 2$. Předpoklad (I) nechť je splněn s konstantou $\sigma^2 = 1$. Nechť pro jednoduchost

$$\Theta = 0 . \tag{22}$$

Vyjdeme-li z rovnosti (6) a užijeme-li pravé větve nerovnosti (4) a odhadů věty 2, dostaneme snadno nerovnosti

$$b_{n+1} \leqq b_n + \frac{2a}{n^\alpha} \mathsf{E}[x_nM_{c_n}(x_n)] + \frac{(2+\eta)\,a^2c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} , n > n_0(\eta) , \quad \eta > 0 , \tag{23}$$

$$b_{n+1} \geqq b_n + \frac{2a}{n^\alpha} \mathsf{E}[x_nM_{c_n}(x_n)] , \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{24}$$

Odvodíme nejprve nerovnosti pro $\mathsf{E}[x_nM_{c_n}(x_n)]$. Pro x reálné a $c > 0$ jest dle (21), (22):

$$M_c(x) = \begin{cases} -\ 4x & \text{pro} \quad x \leqq -c , \\ \dfrac{1}{2c}x^2 - 3x + \dfrac{1}{2}c & \text{pro} \quad -c < x < c , \\ -\ 2x & \text{pro} \quad x \geqq c ; \end{cases} \tag{25}$$

$$xM_c(x) = \left\{\begin{matrix} -\ 4x^2 \\ \dfrac{1}{2c}x^3 - 3x^2 + \dfrac{1}{2}cx \\ -\ 2x^2 \end{matrix}\right\} \leqq -\ 2x^2 + c^2 ; \tag{26}$$

dále

$$xM_c(x) = -\ 4x^2 + x^2\left(1 + \frac{1}{2c}x\right)\chi_{(-c,c)}(x) + \tfrac{1}{2}cx\chi_{(-c,c)}(x) + 2x^2\chi_{\langle c,+\infty)}(x) ,$$

kde 2. člen vpravo je $\geqq 0$ a 4. člen je $\geqq \frac{1}{2}x^2\chi_{\langle c,+\infty)}(x) \geqq \frac{1}{2}cx\chi_{\langle c,+\infty)}(x)$; odtud

$$xM_c(x) \geqq -\ 4x^2 + \tfrac{1}{2}cx\chi_{(-c,+\infty)}(x) \geqq -\ 4x^2 + \tfrac{1}{2}cx . \tag{27}$$

Z (26) a (27) vyplývá

$$\mathsf{E}[x_n M_{c_n}(x_n)] \leqq -2b_n + \frac{c^2}{n^{2\gamma}}, \tag{28}$$

$$\mathsf{E}[x_n M_{c_n}(x_n)] \geqq -4b_n + \frac{c}{2n^\gamma}\mathsf{E}[x_n]. \tag{29}$$

Dosaďme (28) do (23); ježto $\alpha + 2\gamma < 2\alpha - 2\gamma$, dostaneme

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{4a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{(2+\eta')\,ac^2}{n^{\alpha+2\gamma}} \quad \text{pro} \quad n > n_0(\eta'), \quad \eta' > 0.$$

Vzhledem k libovolnosti $\eta' > 0$ jest dle lemmatu 1 (2):

$$\limsup_{n\to\infty} n^{2\gamma} b_n \leqq \begin{cases} \frac{1}{2}c^2 & \text{pro } \alpha < 1, \\ \dfrac{2ac^2}{4a - 2\gamma} = qc^2 & \text{pro } \alpha = 1. \end{cases}$$

Ježto $\frac{1}{2} < q < 1$ (neboť $\gamma < \frac{1}{4} < a$), je v obou případech

$$b_n \leqq \frac{q'c^2}{n^{2\gamma}} \quad \text{pro } n > n_0(q'),\ q < q' < 1.$$

Z Čebyševovy nerovnosti plyne

$$\mathsf{P}\left[|x_n| \geqq \frac{c}{n^\gamma}\right] \leqq \frac{b_n n^{2\gamma}}{c^2} \leqq q', \text{ t. j. } \mathsf{P}\left[|x_n| < \frac{c}{n^\gamma}\right] \geqq 1 - q' = p' \tag{30}$$

pro $n > n_0(q')$. Z definice náhodných proměnných x_n pak vyplývá

$$\mathsf{E}[x_{n+1}] = \mathsf{E}[x_n] + \frac{a}{n^\alpha}\mathsf{E}[M_{c_n}(x_n)]. \tag{31}$$

Dle (25) jest $M_{c_n}(x_n) \geqq -3x_n + \frac{1}{2}c_n \chi_{(-c_n, c_n)}(x_n)$; s použitím (30) jest

$$\mathsf{E}[M_{c_n}(x_n)] \geqq -3\mathsf{E}[x_n] + \frac{p'c}{2n^\gamma}$$

pro $n > n_0(q')$. Dosazením do (31) dostaneme

$$\mathsf{E}[x_{n+1}] \geqq \left(1 - \frac{3a}{n^\alpha}\right)\mathsf{E}[x_n] + \frac{\frac{1}{2}p'ac}{n^{\alpha+\gamma}} \quad \text{pro } n > n_0(q').$$

Dle lemmatu 3 (4) je

$$\liminf_{n\to\infty} n^\gamma\, \mathsf{E}[x_n] \geqq \begin{cases} \frac{1}{6}p'c & \text{pro } \alpha < 1, \\ \dfrac{\frac{1}{2}p'ac}{3a - \gamma} > \frac{1}{6}p'c & \text{pro } \alpha = 1. \end{cases}$$

V obou případech tedy

$$\mathsf{E}[x_n] > \frac{p'c}{7n^\gamma} \tag{32}$$

pro $n > n_1$ (nějaké). (32) umožňuje zpřesnit nerovnost (29):

$$\mathsf{E}[x_n M_{c_n}(x_n)] \geqq -4b_n + \frac{p'c^2}{14n^{2\gamma}}$$

pro $n > n_1$. Dosazením do (24) dostaneme

$$b_{n+1} \geqq \left(1 - \frac{8a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{p'ac^2}{7n^{\alpha+2\gamma}}$$

pro $n > n_1$, a dle lemmatu 3 (4)

$$\liminf_{n\to\infty} n^{2\gamma} b_n \geqq \frac{p'c^2}{56} > 0\,, \quad \text{t. j.} \quad b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{2\gamma}}\right).$$

Obor čísel γ, pro něž $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right)$, lze rozšířit připojením dalších předpokladů o funkci $M(x)$. Učiňme předpoklad

(III) $|M'''(x)| \leqq Q$ pro $-\infty < x < +\infty$ a pro nějaké $Q > 0$.

Potom platí:

Věta 4. *Za předpokladů* (I), (II), (III) *a* (10), (11), (12) *jest*

$$b_n = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^{4\gamma}}\right) & \textit{pro} \quad \gamma < \frac{1}{6}\alpha\,, \\[2ex] O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right) & \textit{pro} \quad \gamma \geqq \frac{1}{6}\alpha\,. \end{cases}$$

Zejména tedy platí $b_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)$ *pro* $a_n = \frac{a}{n}$, $c_n = \frac{c}{n^{\frac{1}{6}}}$, $a > \frac{1}{4K_0}$. *Tato volba konstant* a_n, c_n *je optimální v následujícím smyslu: Jestliže* $\{a'_n\}$, $\{c'_n\}$ *splňují* (10), (11), (12) *a jestliže buďto* $\alpha' \neq 1$ *nebo* $\gamma' \neq \frac{1}{6}$, *potom existuje systém* $\{H(y|x)\}$ *splňující* (I), (II), (III), *pro nějž*

$$b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}-\varepsilon}}\right), \quad \textit{kde } \varepsilon > 0.$$

Důkaz. Pro x reálné a $c > 0$ je za předpokladů (II), (III)

$$M_c(x) = 2M'(x) + \tfrac{1}{6}c^2\{M'''(x + \vartheta_1 c) + M'''(x - \vartheta_2 c)\}\,,$$

t. j.

$$M_c(x) = -2\varkappa_\Theta(x)(x - \Theta) + \tfrac{1}{6}c^2 Q_{\Theta,c}(x)\,,$$

kde

$$|Q_{\Theta,c}(x)| \leqq 2Q\,. \tag{33}$$

Odtud

$$(x - \Theta)\, M_c(x) \leqq -2K_0(x - \Theta)^2 + \tfrac{1}{3}Qc^2\,|x - \Theta|\,. \tag{34}$$

Použijeme-li v rovnosti (6) nerovností (34), (I), (4), utvoříme pak střední hodnoty a použijeme (7), dostaneme

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{4K_0 a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{\frac{2}{3}Qac^2}{n^{\alpha+2\gamma}}\,\mathsf{E}\,[|x_n - \Theta|] + \frac{(2+\eta)\,\sigma^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} \tag{35}$$

pro $n > n_0(\eta)$, $\eta > 0$. Položme v nerovnosti (18)

$$\varepsilon_n = \frac{2Qc^2}{3K_0\varepsilon n^{2\gamma}}\,,$$

kde $0 < \varepsilon < 4$ je takové, že $a > \frac{1}{(4-\varepsilon) K_0}$, a dosaďme do (35):

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{(4-\varepsilon) K_0 a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{\frac{4}{9} Q^2 K_0^{-1} \varepsilon^{-1} a c^4}{n^{\alpha+4\gamma}} + \frac{(2+\eta)\, \sigma^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}}$$

pro $n > n_0(\eta)$, $\eta > 0$. Lemma 1 (2) dává pak výsledek.

Důkaz optimality provedeme stručně; je obdobný důkazu věty 3. Pro $\gamma \geqq \frac{1}{6}\alpha$ stačí opět předpoklad $\sigma^2(x) \geqq \sigma_0^2 > 0$ pro $-\infty < x < +\infty$ k tomu, aby $b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right)$. Pro $\gamma < \frac{1}{6}\alpha$ položme (jest $\Theta = 0$)

$$M(x) = \begin{cases} -Lx^2 + x^3 & \text{pro } |x| \leqq \bar{\delta} \quad (L > 0, \quad 0 < \bar{\delta} < 1)\,, \\ -Lx^2 & \text{pro } |x| \geqq 1 \end{cases}$$

a pro $\bar{\delta} < |x| < 1$ definujme $M(x)$ tak, aby pro všechna x byly splněny předpoklady (II), (III) a předpoklad monotonie. To lze na př. pomocí Lagrange-Silvestrova interpolačního polynomu a vhodnou volbou $L > 0$. Pro $|x| + c < \bar{\delta}$, $c > 0$, jest

$$M_c(x) = -4Lx + 6x^2 + 2c^2\,. \tag{36}$$

Další krok důkazu se opírá o lemma 5, jež bude dokázáno později; předpoklady tohoto lemmatu nechť jsou splněny. Potom

$$\mathsf{E}\,[x_n M_{c_n}(x_n)] = \int_{|x_n| \leqq \delta} x_n M_{c_n}(x_n)\, \mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

pro libovolné $\delta > 0$ a $q > 0$; obdobný vztah platí i pro $\mathsf{E}\,[M_{c_n}(x_n)]$. Odtud a dle (36) platí pro $0 < \delta_0 < \frac{1}{2}\bar{\delta}$ a $c_n < \delta_0$ (t. j. pro $n > n_0(\delta_0)$):

$$\mathsf{E}\,[x_n M_{c_n}(x_n)] \geqq -4Lb_n - 6\delta_0 b_n + 2c_n^2\, \mathsf{E}\,[x_n] + O\left(\frac{1}{n^q}\right); \tag{37}$$

$$\mathsf{E}\,[M_{c_n}(x_n)] \geqq -4L\, \mathsf{E}\,[x_n] + 2c_n^2 + O\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

Dosadíme-li poslední nerovnost do (31) a použijeme lemmatu 3 (4), dostaneme

$$\mathsf{E}\,[x_n] \geqq \frac{c^2}{3Ln^{2\gamma}}$$

pro $n \geqq n_1$. Tuto nerovnost dosaďme do (37), a (37) do (24). ((24) i (31) platí obecně — pokud $\Theta = 0$). Lemma 3 (4) pak dává

$$b_n = O^{-1}\left(\frac{1}{n^{4\gamma}}\right).$$

Učiňme konečně předpoklad

(IV) $M^{(2k+1)}(\Theta) = 0\,, \quad |M^{(2k+2)}(x)| \leqq A^{2k+1}(2k+1)!$

pro $-\infty < x < +\infty$, $k = 1, 2, \ldots$ a pro nějaké $A > 0$.

Věta 5. *Za předpokladů* (I), (II), (IV) *a* (10), (11), (12) *platí*

$$b_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right).$$

Poznámka. K libovolnému $\varepsilon > 0$ lze tedy volbou $a_n = \frac{a}{n}$, $c_n = \frac{c}{n^{\frac{1}{2}\varepsilon}}$, $a > \frac{1}{4K_0}$ dosáhnouti toho, že $b_n = O\left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)$.

Důkaz věty 5. Budiž x reálné a $0 < c < \frac{1}{A\sqrt{2}}$. Potom

$$M(x+c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} M^{(k)}(x), \quad M(x-c) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c^k}{k!} M^{(k)}(x)$$

jsou absolutně konvergentní řady a je tedy

$$M_c(x) = 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c^{2j}}{(2j+1)!} M^{(2j+1)}(x) =$$

$$= \left\{-2\varkappa_\Theta(x) + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c^{2j}}{(2j+1)!} M^{(2j+2)}(\Theta + \vartheta_j(x-\Theta))\right\}(x-\Theta),$$

kde

$$2\sum_{j=1}^{\infty} \leqq 2\sum_{j=1}^{\infty} c^{2j} A^{2j+1} = 2A\,\frac{c^2A^2}{1-c^2A^2} < 4A^3c^2. \tag{38}$$

Odtud

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq -(2-\eta)\, K_0(x_n - \Theta)^2 \tag{39}$$

pro $n > n_0(\eta)$, $0 < \eta < 2$.

Použijeme-li (39) v rovnosti (6), dostaneme obdobně jako dříve

$$b_{n+1} \leqq \left(1 - \frac{(4-\eta')\,K_0 a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{(2+\eta'')\,\sigma^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}}$$

pro $n > n_0(\eta', \eta'')$, $\eta' > 0$, $\eta'' > 0$, odkud plyne výsledek.

Za jistých dodatečných předpokladů lze dokázat asymptotickou normalitu náhodných proměnných x_n. K tomu cíli odvodíme nejprve řádové odhady absolutních momentů $\beta_n^{(r)} = \mathsf{E}\,[|x_n - \Theta|^r]$ všech řádů.

Vyslovme předpoklad

(V) pro každé sudé $p > 2$ existuje $K_p > 0$ tak, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^p \, dH(y|x) \leqq K_p \quad \text{pro} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Věta 6. *Nechť platí* (I), (II), (V) *a* (10), (11), (12). *Nastává-li jeden z případů* 1° $\gamma \geqq \frac{1}{4}\alpha$, 2° $\gamma \geqq \frac{1}{6}\alpha$ *a platí* (III), 3° *platí* (IV), *potom* $\beta_n^{(r)} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{r}{2}(\alpha-2\gamma)}}\right)$

pro $r = 1, 2, \ldots$ (40); *jestliže* $4°\ \gamma < \frac{1}{4}\alpha$, *potom* $\beta_n^{(r)} = O\left(\frac{1}{n^{r\gamma}}\right)$ *pro* $r = 1, 2, \ldots$; *jestliže* $5°\ \gamma < \frac{1}{6}\alpha$ *a platí* (III), *potom* $\beta_n^{(r)} = O\left(\frac{1}{n^{2r\gamma}}\right)$ *pro* $r = 1, 2, \ldots$.

Důkaz. Uvažujme případ 1°. Pro $r = 2$ platí (40) podle věty 2. Budiž $r > 2$ sudé. Vyslovme indukční předpoklad:

$$\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{t}{2}(\alpha-2\gamma)} \beta_n^{(t)} < B_t \quad \text{pro } 2 \leqq t \leqq r-2$$

a pro nějaké $B_t > 0$. Z definice náhodných proměnných x_n vyplývá

$$(x_{n+1} - \Theta)^r = \left(x_n - \Theta + a_n \frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^r;$$

odtud

$$\beta_{n+1}^{(r)} = \beta_n^{(r)} + r a_n \,\mathsf{E}\,[(x_n - \Theta)^{r-1} M_{c_n}(x_n)] + \sum_{t=2}^{r} \binom{r}{t} J_t\,, \tag{41}$$

kde

$$J_t = a_n^t \,\mathsf{E}\left[(x_n - \Theta)^{r-t} \left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^t\right].$$

Jest

$$J_2 \leqq a_n^2 \,\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^{r-2} \{2\sigma^2 c_n^2 + M_{c_n}^2(x_n)\}] \leqq \frac{2\sigma^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha-2\gamma}} \cdot \frac{B_{r-2}}{n^{\frac{r-2}{2}(\alpha-2\gamma)}} +$$

$$+ \frac{8K_1^2 a^2}{n^{2\alpha}} \beta_n^{(r)} + \frac{2K_1^2 a^2 c^2}{n^{2\alpha+2\gamma}} \cdot \frac{B_{r-2}}{n^{\frac{r-2}{2}(\alpha-2\gamma)}} \leqq \frac{(2+\eta')\, B_{r-2}\sigma^2 a^2 c^{-2}}{n^{\alpha+\frac{r}{2}(\alpha-2\gamma)}} + \frac{8K_1^2 a^2}{n^{2\alpha}} \beta_n^{(r)} \tag{42}$$

pro $n > n_0(\eta')$, $\eta' > 0$. (Použili jsme (4) a indukčního předpokladu.) S použitím (2) a nerovnosti $|a + b + c|^t \leqq 3^t (|a|^t + |b|^t + |c|^t)$ odhadneme výraz

$$\mathsf{E}\left[\left|\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right|^t x_n\right] \leqq 2 \,.\, 3^t K_t c_n^{-t} + 3^t\, |M_{c_n}(x_n)|^t \leqq 2 \,.\, 3^t K_t c_n^{-t} +$$
$$+ (12K_1)^t |x_n - \Theta|^t + (6K_1)^t c_n^t.$$

Zde K_t pro t lichá, $t \geqq 3$, značí konstanty, jež ohraničují momenty $\int_{-\infty}^{\infty} |y - M(x)|^t \mathrm{d}H(y|x)$; existence těchto konstant plyne z (V) a z Ljapunovovy nerovnosti.

Odtud pro $3 \leqq t \leqq r - 2$

$$|J_t| \leqq \frac{(2+\eta)\, 3^t K_t a^t c^{-t}}{n^{t\alpha - t\gamma}} \cdot \frac{B_{r-t}}{n^{\frac{r-t}{2}(\alpha-2\gamma)}} + \frac{(12K)^t a^t}{n^{t\alpha}} \beta_n^{(r)} \leqq \frac{(2+\eta)\, B_{r-t}\, 3^t K_t a^t c^{-t}}{n^{\frac{t}{2}\alpha + \frac{r}{2}(\alpha-2\gamma)}} +$$
$$+ \frac{(12K_1)^t\, a^t}{n^{t\alpha}} \beta_n^{(r)}$$

pro $n > n_0(\eta)$, t. j.

$$|J_t| = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}\alpha+\frac{r}{2}(\alpha-2\gamma)}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\beta_n^{(r)}. \tag{43}$$

Snadno se zjistí, že odhad (43) platí i pro J_{r-1} a J_r. Dle (2) jest

$$\mathsf{E}\,[(x_n - \Theta)^{r-1} M_{c_n}(x_n)] \leqq -\,2K_0\beta_n^{(r)} + K_1 c_n \beta_n^{(r-1)}.$$

Platí nerovnost

$$\beta_n^{(r-1)} \leqq \varepsilon_n \beta_n^{(r-2)} + \frac{1}{\varepsilon_n}\beta_n^{(r)} \tag{44}$$

pro libovolné $\varepsilon_n > 0$. Položme $\varepsilon_n = \dfrac{K_1 K_0^{-1}\varepsilon^{-1}c}{n^\gamma}$, kde $\varepsilon > 0$ volíme tak, aby $(2 - \varepsilon)\,K_0\,a > \frac{1}{2} - \gamma$; to lze vzhledem k (12). Dostáváme

$$\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^{r-1} M_{c_n}(x_n)] \leqq -\,(2 - \varepsilon)\,K_0\beta_n^{(r)} + \frac{K_1^2 K_0^{-1}\varepsilon^{-1}c}{n^{2\gamma}}\,\beta_n^{(r-2)};$$

odtud

$$ra_n\,\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^{r-1} M_{c_n}(x_n)] \leqq -\,\frac{(2-\varepsilon)\,K_0 ra}{n^\alpha}\,\beta_n^{(r)} + \frac{K_1^2 K_0^{-1} B_{r-2}\varepsilon^{-1} rac^2}{n^{4\gamma+\frac{r}{2}(\alpha-2\gamma)}}. \tag{45}$$

Dosazením (42), (43), (45) do (41) dostáváme (vzhledem k tomu, že $4\gamma \geqq \alpha$)

$$\beta_{n+1}^{(r)} \leqq \left(1 - \frac{(2-\eta'')\,K_0 ra}{n^\alpha}\right)\beta_n^{(r)} + \frac{\binom{r}{2}(2+\eta')\,B_{r-2}\sigma^2 a^2 c^{-2} + K_1^2 K_0^{-1} B_{r-2}\varepsilon^{-1} rac^2}{n^{\alpha+\frac{r}{2}(\alpha-2\gamma)}} \tag{46}$$

pro $n > n_0(\eta', \eta'')$, $\eta'' > 0$, $\eta' > \varepsilon > 0$. Odtud vyplývá

$$\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{r}{2}(\alpha-2\gamma)}\,\beta_n^{(r)} < B_r$$

pro nějaké $B_r > 0$. Konečně ze známé nerovnosti (vynechávám index n

$$(\beta^{(r-1)})^{\frac{1}{r-1}} \leqq (\beta^{(r)})^{\frac{1}{r}}$$

plyne (40) i pro $t = r - 1$ a $t = 1$.

V případě 2° platí (40) pro $r = 2$ podle věty 4. Předchozí důkaz lze pak opakovat s tím rozdílem, že používáme vztahů (33), (34) místo (2), (3). Výsledné nerovnosti (42), (43) platí beze změny; v (44) položíme

$$\varepsilon_n = \frac{\frac{1}{3}QK_0^{-1}\varepsilon^{-1}c^2}{n^{2\gamma}};$$

poslední člen v (45) pak přejde ve výraz

$$\frac{\frac{1}{9}Q^2K_0^{-1}B_{r-2}\varepsilon^{-1}rac^4}{n^{6\gamma+\frac{r}{2}(\alpha-2\gamma)}}.$$

Ježto $6\gamma \geqq \alpha$, platí opět (až na konstanty v čitateli 2. členu) nerovnost (46) a tím i odhad (40).

Rovněž v případech 3°, 4°, 5° lze důkaz provést obdobně jako v případě 1°, s příslušnými změnami.

Důsledkem věty 6 jest:

Lemma 5. *Za předpokladů* (I), (II), (V) *a* (10), (11), (12) *jest*

$$\int\limits_{|x_n - \Theta| > \delta} |x_n - \Theta|^r \, \mathrm{dP} = O\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

pro každé $\delta > 0\,, \quad r \geqq 0\,, \quad q > 0\,.$

Důkaz.

$$\int\limits_{|x_n - \Theta| > \delta} |x_n - \Theta|^r \, \mathrm{dP} \leqq \delta^{-t} \int\limits_{|x_n - \Theta| > \delta} |x_n - \Theta|^{r+t} \, \mathrm{dP} \leqq \delta^{-t} \beta_n^{(r+t)} =$$

$$= \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{r+t}{2}(\alpha - 2\gamma)}}\right) & \text{pro } \gamma \geqq \dfrac{1}{4}\alpha\,, \\ O\left(\dfrac{1}{n^{(r+t)\gamma}}\right) & \text{pro } \gamma < \dfrac{1}{4}\alpha\,. \end{cases}$$

Nyní stačí volit t tak, že

$$\frac{r+t}{2}(\alpha - 2\gamma) \geqq q\,, \text{ resp. } (r+t)\,\gamma \geqq q\,.$$

Učiňme předpoklad

(VI) funkce $\sigma^2(x)$ je spojitá v bodě Θ; $\sigma^2(\Theta) = \sigma_\Theta^2 > 0$.

Nyní již můžeme přistoupit k důkazu asymptotické normality náhodných proměnných x_n.

Věta 7. *Platí-li* (I), (II), (V), (VI) *a nastává-li jeden z případů* 1° $\gamma \geqq \frac{1}{4}\alpha$ *a v nějakém okolí bodu* Θ *existuje spojitá* $M''(x) < 0$, 2° $\gamma > \frac{1}{6}\alpha$ *a platí* (III), 3° *platí* (IV), *potom limitní rozložení náhodných proměnných* $n^{\frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)}(x_n - \Theta)$ *je normální se střední hodnotou* 0 *a s rozptylem* $\dfrac{\sigma_\Theta^2 a}{2mc^2}$ *pro* $\alpha < 1$, *resp.* $\dfrac{\sigma_\Theta^2 a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)c^2}$ *pro* $\alpha = 1$, *kde* $m = -M''(\Theta)$.

Poznámka. Na rozdíl od věty 6 není ve 2° zahrnut případ $\gamma = \frac{1}{6}\alpha$.

Důkaz věty 7. Označme $b_n^{(r)} = \mathrm{E}\,[x_n - \Theta)^r]$, $r = 1, 2, \ldots$; tedy $b_n^{(2)} = b_n$. Jak známo (viz na př. [10], str. 111—112), stačí dokázat, že

$$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)} b_n^{(r)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } r = 2s - 1\,, \\ \left(\dfrac{\sigma_\Theta^2 a}{2mc^2}\right)^s (2s-1)!! & \text{pro } r = 2s,\ \alpha < 1\,, \\ \left(\dfrac{\sigma_\Theta^2 a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)\,c^2}\right)^s (2s-1)!! & \text{pro } r = 2s,\ \alpha = 1\,, \end{cases}$$

$$s = 1, 2, \ldots\,. \tag{47}$$

1) Uvažujme nejprve případ 1°. Nechť $x + c$, $x - c$ $(c > 0)$ náležejí do intervalu, v němž existuje $M''(x)$. Potom jest

$$M_c(x) = 2M'(x) + \tfrac{1}{2}c\{M''(x + \vartheta_1 c) - M''(x - \vartheta_2 c)\}\,,$$

kde $0 < \vartheta_i < 1$, $i = 1, 2$. Jak plyne z 1°, je $M''(x)$ stejnoměrně spojitá v nějakém uzavřeném intervalu $\langle \Theta - \delta, \Theta + \delta \rangle$; existuje tedy k libovolnému $\eta > 0$ číslo $0 < \delta_1 < \delta$ tak, že

$$(|x - \Theta| \leqq \delta - \delta_1\,,\ 0 < c < \delta_1) \Rightarrow \tfrac{1}{2}\,|M''(x + \vartheta_1 c) - M''(x - \vartheta_2 c)| \leqq \eta\,.$$

Dále jest $M'(x) = M'(\Theta) + (x - \Theta)\, M''(\Theta) + o(|x - \Theta|)$, $M'(\Theta) = 0$; existuje tedy $\delta_2 > 0$ tak, že $|x - \Theta| \leqq \delta_2 \Rightarrow |M'(x) - (x - \Theta)\, M''(\Theta)| \leqq \frac{1}{2}\eta|x - \Theta|$. Položme $\delta_0 = \text{Min}\,(\delta - \delta_1, \delta_2)$. Celkem pro $|x - \Theta| \leqq \delta_0$, $0 < c \leqq \delta_1$ dostáváme

$$M_c(x) = -\,2m(x - \Theta) + \eta_x^{(1)}(x - \Theta) + \eta_x^{(2)} c\,, \tag{48}$$

kde $m = -\,M''(\Theta)$ a $\eta_x^{(1)}$, $\eta_x^{(2)}$ (a v dalším $\eta_x^{(3)}$, $\eta_x^{(4)}$) značí funkce x (a také c), pro něž $|\eta_x^{(i)}| \leqq \eta$ pro $|x - \Theta| \leqq \delta_0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Písmena $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{11}$ značí v dalším čísla (mohou být i nekladná) taková, že $|\eta_i| \leqq \eta$, $i = 1, 2, \ldots, 11$. Tvrzení (47) dokážeme nyní indukcí. V celém důkazu budeme předpokládat, že $c_n \leqq \delta_1$, t. j. že $n > n_0(\delta_1)$.

2) Nechť $r = 1$. Dle (31) jest $b_{n+1}^{(1)} = b_n^{(1)} + a_n \mathsf{E}\,[M_{c_n}(x_n)]$. Dle (3) a lemmatu 5 a dále dle (48) jest

$$\mathsf{E}\,[M_{c_n}(x_n)] = \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} M_{c_n}(x_n)\, \mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) = -\,2m \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} (x_n - \Theta)\, \mathrm{dP} +$$

$$+ \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(1)}(x_n - \Theta)\, \mathrm{dP} + c_n \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(2)}\, \mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) =$$

$$= -\,2mb_n^{(1)} + \eta_1 \beta_n^{(1)} + \eta_2 c_n + O\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

Odtud a dle věty 6 je pro dostatečně velká n

$$b_{n+1}^{(1)} = \left(1 - \frac{2ma}{n^\alpha}\right) b_n^{(1)} + \frac{\eta_3 B_1 a}{n^{\alpha + \frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)}} + \frac{\eta_2 ac}{n^{\alpha + \gamma}} + O\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

Ježto $\frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma) \leqq \gamma$, jest

$$|b_{n+1}^{(1)}| \leqq \left(1 - \frac{2ma}{n^\alpha}\right) |b_n^{(1)}| + \frac{\eta(B_1 a + ac + o(1))}{n^{\alpha + \frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)}}.$$

Dle lemmatu 1 (2) (posledního smíme použíti, neboť $m \geqq K_0$ a $a > \dfrac{1}{4K_0}$ dle předpokladu)

$$\limsup_{n \to \infty} n^{\frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)} |b_n^{(1)}| \leqq \frac{\eta(B_1 + c)}{2m} \quad \text{resp.} \quad \frac{\eta(B_1 + c)\, a}{2ma - \frac{1}{2} + \gamma}\,,$$

a vzhledem k libovolnosti $\eta > 0$

$$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)}\, b_n^{(1)} = 0\,. \tag{49}$$

3) Nechť $r = 2$. Nechť δ_0 je už voleno tak, že také

$$|x - \Theta| \leqq \delta_0 + \delta_1 \Rightarrow |\sigma^2(x) - \overset{2}{\sigma_\Theta}| \leqq \tfrac{1}{2}\eta\,. \tag{50}$$

Podle (6) jest

$$b_{n+1} = b_n + 2a_n \mathsf{E}\,[(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n)] + \frac{a_n^2}{c_n^2}\,\mathsf{E}\,[\sigma^2(x_n + c_n) + \sigma^2(x_n - c_n)] +$$

$$+ a_n^2 \mathsf{E}\,[M_{c_n}^2(x_n)] = b_n + 2a_n E_1 + \frac{a_n^2}{c_n^2}\,E_2 + a_n^2 E_3\,. \tag{51}$$

Podobně jako ad 2) dostáváme

$$E_1 = \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} (x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n)\,\mathsf{d}\mathsf{P} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) = -\,2m \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} (x_n - \Theta)^2\,\mathsf{d}\mathsf{P} +$$

$$+ \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(1)}(x_n - \Theta)^2\,\mathsf{d}\mathsf{P} + c_n \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(2)}(x_n - \Theta)\,\mathsf{d}\mathsf{P} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) =$$

$$= -\,(2m + \eta_4)\, b_n + \eta_5 c_n \beta_n^{(1)} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) = -\,(2m + \eta_4)\, b_n + \frac{\eta_6 B_1 c}{n^{\gamma + \frac{1}{2}(\alpha - 2\gamma)}} + O\left(\frac{1}{n^q}\right);$$

$$E_2 = \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \{\sigma^2(x_n + c_n) + \sigma^2(x_n - c_n)\}\,\mathsf{d}\mathsf{P} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) = 2\overset{2}{\sigma_\Theta} + \eta_7 + O\left(\frac{1}{n^q}\right);$$

konečně dle (4) jest $E_3 = o(1)$. Dosazením do (51) dostaneme

$$b_{n+1} = \left(1 - \frac{(4m + 2\eta_4)\, a}{n^\alpha}\right) b_n + \frac{(2\overset{2}{\sigma_\Theta} + \eta_7)\, a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha - 2\gamma}} + \frac{2\eta_6 B_1 a c + o(1)}{n^{\frac{3}{2}\alpha}}\,.$$

Vzhledem k nerovnosti $2\alpha - 2\gamma \leqq \frac{3}{2}\alpha$ a vzhledem k libovolnosti $\eta > 0$ obdržíme pomocí lemmat 1 — 4:

$$\lim_{n \to \infty} n^{\alpha - 2\gamma}\, b_n = \begin{cases} \dfrac{\overset{2}{\sigma_\Theta} a}{2mc^2} & \text{pro } \alpha < 1\,, \\[2ex] \dfrac{\overset{2}{\sigma_\Theta} a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)\, c^2} & \text{pro } \alpha = 1\,. \end{cases} \tag{52}$$

4) Nechť $r > 2$. Pro $r > 2$ platí (srv. (41))

$$b_{n+1}^{(r)} = b_n^{(r)} + r a_n \mathsf{E}\,[(x_n - \Theta)^{r-1}\, M_{c_n}(x_n)] + \sum_{t=2}^{r} \binom{r}{t} J_t\,, \tag{53}$$

kde

$$J_t = a_n^t\, \mathsf{E}\left[(x_n - \Theta)^{r-t} \left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^t\right].$$

Podobně jako ad 2), 3) odvodíme

$$\mathsf{E}\,[(x_n - \Theta)^{r-1}\, M_{c_n}(x_n)] = -\,2m \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} (x_n - \Theta)^r\,\mathsf{d}\mathsf{P} +$$

$$+ \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(1)}(x_n - \Theta)^r\,\mathsf{d}\mathsf{P} + c_n \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} \eta_{x_n}^{(2)}(x_n - \Theta)^{r-1}\,\mathsf{d}\mathsf{P} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) =$$

$$= -\,2m b_n^{(r)} + \frac{\eta_8 B_r}{n^{\frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} + \frac{\eta_9 B_{r-1} c}{n^{\gamma + \frac{r-1}{n}(\alpha - 2\gamma)}} + O\left(\frac{1}{n^q}\right); \tag{54}$$

$$J_2 = a_n^2 \int\limits_{|x_n - \Theta| \leqq \delta_0} (x_n - \Theta)^{r-2} \left\{ \frac{2\sigma_\Theta^2 + \eta_{x_n}^{(3)}}{c_n^2} + M_{c_n}^2(x_n) \right\} \mathrm{dP} + O\left(\frac{1}{n^q}\right) =$$

$$= \frac{2\sigma_\Theta^2 a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha - 2\gamma}} b_n^{(r-2)} + \frac{\eta_{10} B_{r-2} a^2 c^{-2} + o(1)}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} . \tag{55}$$

Dle (43) jest

$$J_t = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}}\right) \text{ pro } 3 \leqq t \leqq r . \tag{56}$$

Dosaďme nyní (54), (55), (56) do (53) a současně položme jako indukční předpoklad $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{r-2}{2}(\alpha - 2\gamma)} b_n^{(r-2)} = B_{r-2}^* \geqq 0$, kde $B_{r-2}^* = B_{r-2}^*(\alpha, \gamma)$. Dostáváme tak pro $n > n_0(\eta)$

$$b_{n+1}^{(r)} = \left(1 - \frac{2mra}{n^\alpha}\right) b_n^{(r)} + \frac{\eta_8 B_r ra}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} + \frac{\eta_9 B_{r-1} rac}{n^{\frac{1}{2}\alpha + 2\gamma + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} +$$

$$+ \frac{\sigma_\Theta^2 (B_{r-2}^* + \eta_{11})\, r(r-1)\, a^2 c^{-2}}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} + \frac{\eta_{10} B_{r-2} \frac{1}{2} r(r-1)\, a^2 c^{-2} + o(1)}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}} .$$

Jestliže $B_{r-2}^* > 0$, potom vzhledem k nerovnosti $\frac{1}{2}\alpha + 2\gamma \geqq \alpha$ a vzhledem k libovolnosti $\eta > 0$ platí

$$b_{n+1}^{(r)} \lesseqgtr \left(1 - \frac{2mra}{n^\alpha}\right) b_n^{(r)} + \frac{r(r-1)\,(B_{r-2}^* \pm \varepsilon)\, \sigma_\Theta^2 a^2 c^{-2}}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}}$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$ a všechna $n > n_1(\varepsilon)$; odtud

$$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)} b_n^{(r)} = B_r^* = \begin{cases} (r-1)\, B_{r-2}^* \dfrac{\sigma_\Theta^2 a}{2mc^2} & \text{pro } \alpha < 1 , \\[2ex] (r-1)\, B_{r-2}^* \dfrac{\sigma_\Theta^2 a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)\, c^2} & \text{pro } \alpha = 1 . \end{cases}$$

Jestliže $B_{r-2}^* = 0$, potom

$$|b_{n+1}^{(r)}| \leqq \left(1 - \frac{2mra}{n^\alpha}\right) |b_n^{(r)}| + \frac{\varepsilon}{n^{\alpha + \frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)}}$$

pro $\varepsilon > 0$, $n > n_2(\varepsilon)$, a odtud $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{r}{2}(\alpha - 2\gamma)} b_n^{(r)} = B_r^* = 0$. Poněvadž dle (49) a (52) je indukční předpoklad splněn pro $r = 1$ a $r = 2$, při čemž $B_1^* = 0$, $B_2^* = \dfrac{\sigma_\Theta^2 a}{2mc^2}$ pro $\alpha < 1$ resp. $B_2^* = \dfrac{\sigma_\Theta^2 a^2}{(2ma - \frac{1}{2} + \gamma)\, c^2}$ pro $\alpha = 1$, je tím v případě 1° tvrzení (47) dokázáno.

5) V případě 2° a 3° lze vést důkaz stejně jako v případě 1° s tím rozdílem, že místo (48) použijeme v případě 2° vztahu $M_c(x) = -2m(x-\Theta) + \eta_x^{(1)} \cdot (x-\Theta) + Q_{x,c}c^2$, kde $|Q_{x,c}| \leqq \frac{1}{3}Q$, pro $|x-\Theta| \leqq \delta_0(\eta)$, a v případě 3° vztahu

$$M_c(x) = -2m(x-\Theta) + \eta_x^{(4)}(x-\Theta) \quad \text{pro} \quad |x-\Theta| \leqq \delta_0(\eta)\,.$$

Tyto vztahy vyplývají z (33) a (38).

3. KW methoda v případě ohraničených odchylek od regresní funkce

Nechť $H(y|x)$, $M(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$; $x_n, y_{2n}, y_{2n-1}, a_n, c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, mají týž význam jako v odstavci 2. Předpoklady (I), (II) nahraďme však předpoklady

(VII) existuje konečný interval $\langle A, B\rangle$ tak, že

1° $\Theta \in (A, B)$;

$$2^\circ \quad x \text{ non} \in \langle A, B\rangle \Rightarrow H(y|x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad y \leqq M(x)\,, \\ 1 & \text{pro} \quad y > M(x)\,; \end{cases}$$

(VIII) existuje konstanta $C > 0$ tak, že

$$\int_{M(x)-C}^{M(x)+C} \mathrm{d}H(y|x) = 1 \quad \text{pro} \quad -\infty < x < +\infty;$$

(IX) existují $\bar{\delta} > 0$, $K_0 > 0$, $K_1 > 0$ tak, že

$$K_0\,|x-\Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1\,|x-\Theta| \quad \text{pro} \quad |x-\Theta| \leqq \bar{\delta}\,;$$

(X) existují $\varrho > 0$, $R > 0$ tak, že

$$|x' - x''| < \varrho \Rightarrow |M(x') - M(x'')| < R\,;$$

(XI) k libovolnému $\delta > 0$ existuje $\pi(\delta) > 0$ tak, že

$$|x-\Theta| > \delta \Rightarrow \inf_{\frac{1}{2}\delta > \varepsilon > 0} \frac{|M(x+\varepsilon) - M(x-\varepsilon)|}{\varepsilon} > \pi(\delta)\,.$$

Dále nechť $x_1 \in \langle A, B\rangle$.

Poznámka. Splnění předpokladu (VII) můžeme dosáhnout zejména tehdy, když $H(y|x)$ splňují (VIII) — (XI) v nějakém konečném intervalu $\langle A, B\rangle$, o němž víme, že obsahuje Θ jako vnitřní bod, a když známe nějaký dolní odhad hodnot $M(A)$ a $M(B)$. (Tento případ v praktických úlohách zřejmě často nastává.) Potom lze totiž změnit distribuční funkce $H(y|x)$ pro x ležící vně $\langle A, B\rangle$ a stanovit je ve shodě s předpoklady (VII) — (XI).

Předpoklad (IX) je ovšem podstatně slabší než předpoklad (II) odst. 2.; je splněn zejména tehdy, když existuje $M''(\Theta) < 0$. Předpoklady (VII) — (XI) představují (na rozdíl od předpokladů (I), (II)) speciální případ původního případu Kiefer-Wolfowitzova; odtud plyne konvergence $x_n \to \Theta$ s pravděpodobností 1.

Položme

$$q = \sup_{n=1,2,\ldots} \frac{a_n}{c_n}, \quad q' = \sup_{n=1,2,\ldots} c_n,$$

$$A_0 = A - q' - q(2C + R), \quad B_0 = B + q' + q(2C + R).$$

Předpokládejme, že $q' < \frac{1}{2}\varrho$; to lze bez újmy obecnosti: platí-li totiž (X), pak existují čísla $\varrho' > 0$, $R' > 0$, která rovněž vyhovují (X) a taková, že $q' < < \frac{1}{2}\varrho'$.

Lemma 6. *Za předpokladů* (VII) — (XI) *jest*

$$A_0 \leqq x_n \leqq B_0 \quad pro \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{57}$$

Důkaz. Pro $n = 1$ platí (57) dle předpokladu. Budiž nyní $n > 1$ pevné.

1) Nechť $A - q' \leqq x_n \leqq B + q'$. Jest

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a_n}{c_n}(y_{2n} - y_{2n-1}),$$

kde

$$|y_{2n} - y_{2n-1}| \leqq 2C + R \text{ (dle (VIII) a (X))};$$

odtud

$$A - q' - q(2C + R) \leqq x_{n+1} \leqq B + q' + q(2C + R),$$

t. j.

$$A_0 \leqq x_{n+1} \leqq B_0.$$

2) Nechť buďto $x_n < A - q'$ nebo $x_n > B + q'$. Potom dle (VII):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a_n}{c_n}\{M(x_n + c_n) - M(x_n - c_n)\};$$

ježto $A - q' < \Theta - c_n$, $B + q' > \Theta + c_n$ — a tedy $x_n \pm c_n < \Theta$ v prvním a $x_n \pm c_n > \Theta$ v druhém případě — a ježto $M(x)$ je rostoucí (klesající) pro $x < \Theta$ $(x > \Theta)$, jest v prvním případě $x_n < x_{n+1} < A - q' + qR < B_0$ a v druhém $x_n > x_{n+1} > B + q' - qR > A_0$. Dle indukčního předpokladu je však $A_0 \leqq x_n \leqq B_0$; tedy i $A_0 \leqq x_{n+1} \leqq B_0$.

Lemma 7. *Za předpokladů* (VII) — (XI) *existuje konstanta* $K > 0$ *a přirozené číslo* n_0 *tak, že*

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq -K(x_n - \Theta)^2 + K_1 c_n |x_n - \Theta| \quad pro \ n \geqq n_0. \tag{58}$$

Důkaz. Dle (IX) jest pro $|x - \Theta| + c < \bar{\delta}$, $(c > 0)$

$$(x - \Theta)\, M_c(x) \leqq -2K_0(x - \Theta)^2 + K_1 c\, |x - \Theta|.$$

Budiž $n_0 = n_0(\frac{1}{3}\bar{\delta})$ index, od něhož počínaje jest $c_n < \frac{1}{3}\bar{\delta}$; potom

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq -2K_0(x_n - \Theta)^2 + K_1 c_1 |x_n - \Theta| \tag{59}$$

pro $n \geqq n_0$ a $|x_n - \Theta| \leqq \frac{2}{3}\bar{\delta}$.

Pro $n \geqq n_0$ a $|x_n - \Theta| > \frac{2}{3}\bar{\delta}$ je však dle (XI)

$$|M_{c_n}(x_n)| \geqq \inf_{\frac{1}{3}\bar{\delta} > \varepsilon > 0} \frac{|M(x_n + \varepsilon) - M(x_n - \varepsilon)|}{\varepsilon} > \pi\left(\frac{2}{3}\bar{\delta}\right).$$

Označme $D_0 = \mathrm{Max}\,(|A_0 - \Theta|, |B_0 - \Theta|)$; dle lemmatu 6 jest

$$\frac{|x_n - \Theta|}{D_0} \leqq 1 \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots$$

a tedy

$$|M_{c_n}(x_n)| \geqq \frac{\pi(\frac{2}{3}\bar{\delta})}{D_0} |x_n - \Theta| \quad \text{pro} \quad n \geqq n_0 \quad \text{a} \quad |x_n - \Theta| > \frac{2}{3}\bar{\delta}\,.$$

Vzhledem k nerovnostem $c_n < \frac{1}{3}\bar{\delta}$, $|x_n - \Theta| > \frac{2}{3}\bar{\delta}$ a vzhledem k monotonii $M(x)$ pro $x \lesseqgtr \Theta$ jsou výrazy $(x_n - \Theta)$ a $M_{c_n}(x_n)$ opačného znaménka a tudíž

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq - \frac{\pi(\frac{2}{3}\bar{\delta})}{D_0} (x_n - \Theta)^2 \quad \text{pro} \quad n \geqq n_0 \quad \text{a} \quad |x_n - \Theta| > \frac{2}{3}\bar{\delta}\,. \tag{60}$$

Spojením (59) a (60) dostáváme pro $n \geqq n_0$ nerovnost (58), kde

$$K = \mathrm{Min}\left(\frac{\pi(\frac{2}{3}\bar{\delta})}{D_0},\ 2K_0\right).$$

Vyslovme ještě dodatečné předpoklady

(XII) $|M'''(x)| \leqq Q$ pro $|x - \Theta| \leqq \bar{\delta}$;

(XIII) $M^{(2k+1)}(\Theta) = 0$, $|M^{(2k+2)}(x)| < A^{2k+1}(2k + 1)!$

pro $|x - \Theta| \leqq \bar{\delta}$, $k = 1, 2, \ldots$ a pro nějaké $A > 0$.

Jako (12a) označme implikaci $\alpha = 1 \Rightarrow a > \dfrac{1}{2K}$.

Nyní již můžeme vyslovit hlavní tvrzení tohoto odstavce.

Věta 8. *Věty* 1—7 (*odstavce* 2) *platí i tehdy, když současně nahradíme*
předpoklady (I), (II) — *předpoklady* (VII) — (XI),
předpoklad (III) — *předpokladem* (XII),
předpoklad (IV) — *předpokladem* (XIII),
předpoklad (12) — *předpokladem* (12a),
$\left(\textit{resp. nerovnost } a > \dfrac{1}{4K_0} \textit{ — nerovnostÍ } a > \dfrac{1}{2K}\right)$,[3])
vynecháme předpoklad (V), *a vše ostatní ponecháme beze změny.*

Důkazy vět 1—7 za nových předpokladů jsou obdobné důkazům uvedeným v odstavci 2. Omezíme se proto na vytčení některých odlišností.

K větě 1: Konvergence $x_n \to \Theta$ podle kvadratického středu plyne z konvergence $x_n \to \Theta$ s pravděpodobností 1 a z lemmatu 6.

K větě 2: Místo nerovnosti (3) používáme (jako všude v dalším) nerovnosti (58). Místo (I) a (4) užíváme nerovnosti

$$\mathsf{E}\left[\left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^2\right] \leqq c_n^{-2}\,(2C^2 + R^2)\,, \tag{61}$$

která plyne z (VIII) a (X).

[3]) Jde o konstantu K, vystupující v (58).

K větě 3: K důkazu použijeme lemmatu 5, které (jak později ukážeme) platí i v tomto případě a které umožňuje omezit se při vyšetřování středních hodnot jistých náhodných proměnných na integrační obory typu $|x_n - \Theta| \leqq \delta$, $\delta > 0$. Rozdílnost proti důkazu v odstavci 2 záleží pak v tom, že splnění (19), resp. (21) požadujeme jen v nějakém okolí Θ; dle (IX) platí v tomto okolí (3) i (4), a tedy i jejich důsledky.

K větě 4 a 5: Jako v důkazu lemmatu 7 zjistíme, že

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq - K(x_n - \Theta)^2 + \tfrac{1}{3}Qc_n^2\, |x_n - \Theta| \qquad \text{pro } n \geqq n_0\,,$$

resp.

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq - (K - \eta)\, (x_n - \Theta)^2 \qquad \text{pro} \quad n > n_1(\eta)\,.$$

V důkazu optimality je třeba jen triviálních změn.

K větě 6: K odhadu výrazu

$$\mathsf{E}\left[\left|\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right|^t\right]$$

používáme nerovnosti

$$|y_{2n} - y_{2n-1}| \leqq 2C + R\,.$$

Předpoklad (V) není třeba výslovně uvádět: je zřejmě splněn dle (VIII). Důsledkem věty 6 je opět lemma 5.

K větě 7: Lemma 5 umožňuje omezit se při vyšetřování středních hodnot na integrační obory $|x_n - \Theta| \leqq \delta_0$, $\delta_0 > 0$. V určitém okolí bodu Θ lze však zpřesnit vztah (58) takto: K libovolnému $\eta > 0$ existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro $|x - \Theta| + c < \delta_0$ $(c > 0)$ jest $M_c(x) = - 2m(x - \Theta) + \eta_x^{(5)}(x - \Theta) + \eta_x^{(6)}\, c$, kde $|\eta_x^{(i)}| \leqq \eta$, $i = 5, 6$. Podobně lze zpřesnit ostatní vztahy, na př. (61):

$$a_n^2 \mathsf{E}\left[\left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^2\right] = \frac{(2\sigma_\Theta^2 + \eta_{12})\, a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha - 2\gamma}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right),$$

kde $|\eta_{12}| \leqq \eta$. Nerovnost $4ma > 1 - 2\gamma$ je splněna, neboť $a > \dfrac{1}{2K}$ dle (12a) a $m \geqq K_0 \geqq \dfrac{1}{2}K$ dle definice K. Předpoklad (VI) je ve znění věty podstatný.

Poznámka. V době, kdy byl tento článek v tisku, vyšla práce: C. Derman, An application of Chung's lemma to the Kiefer-Wolfowitz stochastic approximation procedure, Annals Math. Stat. *27* (1956), s. 532—536. Výsledky této práce jsou zformulovány ve dvě věty, jež jsou podobné — co do předpokladů i co do tvrzení — větě 5 a větě 7, případ 3°, našeho článku.

LITERATURA

Zkratka: AMS — Annals of Mathematical Statistics.

[1] *H. Robbins, S. Monro:* A stochastic approximation method, AMS *22* (1951), 400—407.

[2] *J. Wolfowitz:* On the stochastic approximation method of Robbins and Monro, AMS *23* (1952), 457—461.

[3] *J. R. Blum:* Approximation methods which converge with probability one, AMS *25* (1954), 382—386.

[4] *G. Kallianpur:* A note on the Robbins-Monro stochastic approximation method, AMS *25* (1954), 386—388.

[5] *L. Schmetterer:* Bemerkungen zum Verfahren der stochastischen Iteration, Österreichisches Ingenieur-Archiv *VII* (1953), 111—117.

[6] *L. Schmetterer:* Zum Sequentialverfahren von Robbins und Monro, Monatshefte für Mathematik *58* (1954), 33—37.

[7] *K. L. Chung:* On a stochastic approximation method, AMS *25* (1954), 463—483.

[8] *J. R. Blum:* Multidimensional stochastic approximation methods, AMS *25* (1954), 737—744.

[9] *J. Kiefer, J. Wolfowitz:* Stochastic estimation of the maximum of a regression function, AMS *23* (1952), 462—466.

[10] *M. G. Kendall:* The Advanced Theory of Statistics, vol. I., Griffin, London 1943.

Резюме

ОБ АППРОКСИМАЦИОННОМ МЕТОДЕ КИФЕРА-ВОЛЬФОВИЦА

ВАЦЛАВ ДУПАЧ (Václav Dupač), Прага.

(Поступило в редакцию 20/I 1956 г.)

В статье установливаются асимптотические свойства аппроксимационного метода Кифера-Вольфовица [9] для отыскания значения $x = \Theta$, в котором функция регрессии $M(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \, \mathrm{d}H(y|x)$ достигает своего максимума. Условия этого метода видоизменены таким образом, что можно воспользоваться аналитическими средствами, приведенными в работе Чжуна [7]. Различаются два варианта. В варианте, рассматриваемом в § 3-ем, приняты все предположения из [9] и некоторые усилены: вместо (2.8) — из [9] — предполагается выполнение неравенства

$$K_0|x - \Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1|x - \Theta|\,, \quad K_0 > 0\,, \quad K_1 > 0$$

в некоторой окрестности Θ; вместо (2.2) предполагается знание ограниченного, содержащего Θ промежутка (A, B) вместе с нижними оценками значений $M(A)$, $M(B)$ и выполнение условия $\int\limits_{M(x)-C}^{M(x)+C} \mathrm{d}H(y|x) = 1$ для всех $x \in \langle A, B \rangle$. Постоянные a_n, c_n предполагаются в виде $a_n = \dfrac{a}{n^\alpha}$, $c_n = \dfrac{c}{n^\gamma}$, и доказывается, что подбор $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{4}$ (где $c > 0$ и a больше некоторой постоянной) является наилучшим, обеспечивая, что $\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^2] = O(n^{-\frac{1}{2}})$;

всякий другой подбор α, γ может вести к менее выгодному результату. Если дополнительно предположить существование ограниченной $M'''(x)$ в некоторой окрестности Θ, то лучшим является подбор $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{6}$, дающий $\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^2] = O(n^{-\frac{2}{3}})$; если в некоторой окрестности Θ функция $M(x)$ — аналитическая и симметричная относительно Θ, то $\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^2] = O(n^{-(1-\varepsilon)})$ для $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon$ и для произвольного $\varepsilon > 0$. При дополнительном условии, что $\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \, \mathrm{d}H(y|x)$ непрерывна и положительна в некоторой окрестности Θ, и при ограничении значений α, γ доказано, что случайные величины $n^{\frac{1}{2}(\alpha-2\gamma)}$ $(x_n - \Theta)$ асимптотически нормальны.

В варианте, рассматриваемом в § 2-ом, на функции распределения $H(y|x)$ наложены только два условия, а именно (2.2) и выполнение неравенства $K_0|x - \Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1|x - \Theta|$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. С небольшими изменениями в дополнительных предположениях справедливы и в этом случае все выше упомянутые теоремы.

§ 1-ый является реферирующим.

Примечание. В статье C. Derman, An application of Chung's lemma to the Kiefer-Wolfowitz stochastic approximation procedure, Annals Math. Stat. *27* (1956), 532—536 доказаны две теоремы, похожие на теоремы 5 и 7 (случай 3°) нашей статьи.

Summary

ON THE KIEFER-WOLFOWITZ APPROXIMATION METHOD

VÁCLAV DUPAČ, Praha.

(Received January 20, 1956.)

Asymptotic properties are established for the Kiefer-Wolfowitz [9] procedure of finding the value $x = \Theta$, for which the regression function $M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \, \mathrm{d}H(y|x)$ achieves its maximum. The original assumptions are modified in such a way that it is possible to use the mathematical tools due to Chung [7]. Two different cases are treated. In the case considered in Sec. 3, all assumptions from [9] are accepted, some of them being strengthened: instead of (2.8) — from [9] — it is supposed that the inequality

$$K_0 \, |x - \Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1 \, |x - \Theta| \,, \quad K_0 > 0, \quad K_1 > 0$$

holds in some neighbourhood of Θ; instead of (2.2) it is assumed, that a finite interval (A, B), containing Θ, is known, together with some lower estimates of $M(A)$, $M(B)$, and that $\int_{M(x)-C}^{M(x)+C} \mathrm{d}H(y|x) = 1$ holds for all $x \in \langle A, B\rangle$ (C being a constant).

The sequences $\{a_n\}$, $\{c_n\}$, occuring in the approximation scheme, are supposed to be of the type $a_n = \frac{a}{n^\alpha}$, $c_n = \frac{c}{n^\gamma}$; then the choice $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{4}$ (c being positive and a greater than a specific constant) is proved to be optimal. This choice ensures that $\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^2] = O(n^{-\frac{1}{2}})$ — every other choice can actually lead to a worse result. If in addition the existence of bounded $M'''(x)$ is supposed in some neighbourhood of Θ, then the best choice is $\alpha = 1$, $\gamma = \frac{1}{6}$, giving $\mathsf{E}[x_n - \Theta)^2] = O(n^{-\frac{2}{3}})$; if in some neighbourhood of Θ the function $M(x)$ is analytical and symmetrical about Θ, then for an arbitrary $\varepsilon > 0$ we can reach that $\mathsf{E}[(x_n - \Theta)^2] = O(n^{-(1-\varepsilon)})$ by a suitable choice of α, γ. Under the additional hypothesis that $\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - M(x))^2 \,\mathrm{d}H(y|x)$ is continuous and positive in a neighbourhood of Θ and with a restriction on the range of α, γ, the asymptotic normality of the random variables $n^{\frac{1}{2}(\alpha-2\gamma)}(x_n - \Theta)$ is proved.

In the case considered in Sec. 2, only two conditions are set upon the distribution functions $H(y|x)$, namely, the (2.2) and the inequality $K_0|x - \Theta| \leqq |M'(x)| \leqq K_1|x - \Theta|$, holding for all $x \in (-\infty, +\infty)$. With some changes in additional conditions, all the theorems mentioned in the above case hold.

The Sec. 1 is an expository one.

Added in proof. C. Derman, An application of Chung's lemma to the Kiefer-Wolfowitz stochastic approximation procedure, AMS *27* (1956), pp. 532—536, has proved two theorems, which are similar to our Theorem 5 and Theorem 7 (case 3°).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

Z TEORIE KONEČNÝCH PRAVIDELNÝCH GRAFOV TRETIEHO A ŠTVRTÉHO STUPŇA

ANTON KOTZIG, Bratislava.

(Došlo dne 21. února 1956.) DT: 513.34.001

V článku pojednáva sa o systémoch uhlov konečného grafu a o ich vzťahu k systému všetkých eulerovských čiastočných grafov daného grafu. Zo získaných poznatkov o grafoch všeobecnejších odvodzujú sa dôsledky pre pravidelné grafy tretieho stupňa všeobecne a zvlášť pre také, ktoré majú aspoň jeden lineárny faktor, resp. ktoré sa dajú rozložiť na tri lineárne faktory. Na základe týchto poznatkov vyvodzujú sa vety o existencii lineárnych faktorov a hamiltonovských čiar v istých pravidelných grafoch štvrtého stupňa.

1. Definície a pomocné vety

V tomto príspevku používam termínov obvyklých v teorii grafov. Definície základných pojmov v tejto práci používaných sú uvedené napr. aj v mojej práci „O istých rozkladoch konečných grafov" (Matematicko fyzikálny časopis SAV, V, 1955, č. 3). Uvádzam preto na doplnenie len tieto definície:

Definícia 1. Hovoríme, že graf je orientovaný, ak pre každú hranu grafu je ustálený smer a to tak, že z dvoch uzlov u, v, s ktorými je ľubovoľná hrana incidentná, jeden ustalujeme ako počiatočný, druhý ako konečný uzol hrany. Ak u je počiatočný, v konečný uzol hrany h, vyjadrujeme sa tiež tak, že hrana h smeruje z uzla u do uzla v.

Definícia 2. Trojici prvkov grafu $\{u, h_1, h_2\}$ pozostávajúcej z uzla u a hrán $h_1 \neq h_2$ hovoríme uhol grafu s vrcholom v uzle u a s ramenami h_1, h_2, ak obe hrany h_1, h_2 sú incidentné s uzlom u.

Definícia 3. Kružnici K ľubovoľného konečného grafu hovoríme hamiltonovská čiara grafu, ak K obsahuje všetky uzly grafu.

Vzhľadom na to, že predmetom skúmania budú len konečné grafy, budeme v celej práci pod grafom rozumeť vždy konečný graf.

Prv než prikročíme ku skúmaniu pravidelných grafov, odvoďme si niektoré pomocné vety, ktoré majú všeobecnejšiu platnosť:

Veta 1. *Nech $\vec{G}$ je ľubovoľný orientovaný hraf o q hranách. O počte n tých uzlov grafu $\vec{G}$, do ktorých smeruje nepárny počet hrán, platí $n \equiv q \pmod 2$.*

Dôkaz. Označme znakom $\xi(i)$ počet tých uzlov grafu $\vec{G}$, do ktorých smeruje práve i hrán. Pretože každá hrana orientovaného grafu smeruje práve do jednoho uzla platí: $q = \sum_{i=0}^{\infty} i\xi(i)$ z čoho ihneď vyplýva: $n = q - 2[\xi(2) + \xi(3) + 2\xi(4) + 2\xi(5) + \ldots]$ čiže $n \equiv q \pmod 2$.

Veta 2. *Nech $\vec{G}_1$ je ľubovoľný orientovaný súvislý graf, $u \neq v$ nech sú ľubovoľné dva jeho uzly a nech $\vec{C}$ je ľubovoľná cesta spojujúca uzly u, v v grafe $\vec{G}_1$ (pritom orientácia hrán cesty nemusí súhlasiť so smerom, v ktorom prichádzame z uzla u do uzla v). Ak zmeníme orientáciu všetkých hrán cesty $\vec{C}$ v orientáciu opačnú a u ostatných hrán grafu $\vec{G}_1$ zachováme orientáciu bez zmeny, vznikne tak istý graf $\vec{G}_2$, o ktorom platí:*

1. *Do uzla u (resp. v) smeruje v grafe $\vec{G}_2$ párny resp. nepárny počet hrán práve vtedy, keď do tohoto uzla smeruje v grafe $\vec{G}_1$ nepárny resp. párny počet hrán.*

2. *Do ľubovoľného uzla w rôzneho od u a rôzneho od v smeruje v grafe $\vec{G}_2$ párny resp. nepárny počet hrán práve vtedy, keď do w v grafe $\vec{G}_1$ smeruje párny resp. nepárny počet hrán.*

Dôkaz. Uzol u (resp. v) je incidentný práve s jednou hranou cesty $\vec{C}$, teda zmena v orientácii hrán pri vzniku grafu $\vec{G}_2$ nastane práve u jednej hrany incidentnej s uzlom u (resp. v), z čoho hneď vyplýva tvrdenie 1.

Ak w je ľubovoľný iný uzol než u a iný ako v, potom buď w nie je uzlom cesty (čiže nenastane žiadna zmena v orientácii hrán incidentných s w pri vzniku grafu $\vec{G}_2$), alebo w je uzol cesty taký, že zmena v orientácii pri vzniku $\vec{G}_2$ nastala práve u dvoch hrán, s ktorými je uzol w incidentný, z čoho ihneď vyplýva tvrdenie 2.

Veta 3. *Nech G je ľubovoľný neorientovaný súvislý graf, ktorý má párny počet hrán, potom hrany grafu G možno orientovať tak, že vznikne orientovaný graf $\vec{G}$, v ktorom do každého uzla smeruje párny počet hrán.*

Dôkaz. Nech $\vec{G}_0$ je orientovaný graf, ktorý vznikne z G, ak orientujeme každú jeho hranu. Ak by už pri tejto orientácii hrán do každého uzla smeroval párny počet hrán, nebolo by treba nič dokazovať. Predpokladajme preto, že v $\vec{G}_0$ existujú také uzly, do ktorých smeruje nepárny počet hrán. Počet takýchto uzlov je podľa vety 1. párny, lebo počet hrán grafu G (resp. $\vec{G}_0$) je párny. Nech $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ sú tie uzly grafu G, do ktorých smeruje v $\vec{G}_0$ nepárny počet hrán. Pretože G a teda aj G_0 je podľa predpokladu súvislý graf, existujú v grafe G cesty $C_1, C_2, \ldots, C_n$ také, že cesta C_i spojuje uzly u_{2i-1}, u_{2i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ak zmeníme v grafe $\vec{G}_0$ orientáciu všetkých hrán cesty C_1 a zachováme orientáciu všetkých ostatných hrán grafu $\vec{G}_0$, vznikne tak istý graf $\vec{G}_1$. Ak v grafe $\vec{G}_1$ zmeníme orientáciu všetkých hrán cesty C_2 a u ostatných hrán ponecháme orientáciu bez zmeny, vznikne tak istý graf $\vec{G}_2$ atď. až: ak zmeníme orientáciu všetkých hrán cesty C_n v grafe $\vec{G}_{n-1}$ a zachováme orientáciu jeho ostatných hrán, dostaneme tak istý graf $\vec{G}_n$, v ktorom podľa vety 2. do všetkých uzlov bude smerovať párny počet hrán. $\vec{G} = \vec{G}_n$ je orientovaný graf požadovaných vlastností. Tým je veta 3. dokázaná.

Označme znakom $\mathfrak{A}(G) \neq \emptyset$ systém všetkých orientovaných grafov, ktoré vzniknú orientáciou všetkých hrán istého neorientovaného grafu G a ktoré majú túto vlastnosť: do každého uzla ľubovoľného grafu $\vec{G} \in \mathfrak{A}(G)$ smeruje párny počet hrán. Označme znakom $\mathfrak{P}(G)$ systém všetkých tých čiastočných grafov grafu G, ktoré sú eulerovskými grafmi (t. j. grafmi, u ktorých každý uzol je párneho stupňa), pričom prvkom systému $\mathfrak{P}(G)$ nech je tiež nulový graf N (t. j. graf, ktorý nemá žiadnej hrany a žiadneho uzla).

Dokážme, že platí: *Systémy $\mathfrak{A}(G)$, $\mathfrak{P}(G)$ pre ľubovoľný konečný graf G s párnym počtom hrán sú ekvivalentné, t. j. existuje vždy prosté zobrazenie ω systému $\mathfrak{A}(G)$ na systém $\mathfrak{P}(G)$.*

Nech $\mathfrak{P}(G) = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (kde $P_1 = N$) a nech $\vec{G}_1$ je orientovaný graf $\in \mathfrak{A}(G)$. Označme znakom $\vec{G}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) orientovaný graf, ktorý vznikne z grafu $\vec{G}_1$ tak, že zmeníme orientáciu všetkých hrán grafu P_i na orientáciu opačnú a u ostatných hrán ponecháme orientáciu bez zmeny. Je zrejme $\vec{G}_i \in \mathfrak{A}(G)$, pretože do ľubovoľného uzla $u \in G$ smeruje v grafe $\vec{G}_1$ podľa predpokladu párny počet hrán a pri vzniku grafu $\vec{G}_i$ dojde ku zmene orientácie hrany u párneho počtu hrán, s ktorými je uzol u incidentný (pretože P_i je eulerovský graf).

Nech ďalej $\vec{G}_x$ je ľubovoľný graf $\in \mathfrak{A}(G)$. Označme znakom $H_{1,x}$ množinu tých hrán grafu G, ktoré majú inú orientáciu v grafe $\vec{G}_1$ než v grafe $\vec{G}_x$ a znakom P_x čiastočný graf grafu G, ktorý pozostáva z hrán množiny $H_{1,x}$ a z tých uzlov grafu G, s ktorými je incidentná aspoň jedna hrana $\in H_{1,x}$. Tvrdím: P_x je eulerovský graf. Nech totiž u je ľubovoľný uzol $\in P_x$. Podľa predpokladu do uzla u smeruje ako v grafe $\vec{G}_1$ tak aj v grafe $\vec{G}_x$ párny počet hrán, preto je potrebné zmeniť orientáciu u párneho počtu hrán incidentných s uzlom u v grafe $\vec{G}_1$, aby všetky hrany incidentné s u mali takú istú orientáciu ako v $\vec{G}_x$, čiže každý uzol grafu P_x je párneho stupňa t. j. $P_x \in \mathfrak{P}(G)$.

Uvážme ešte toto: nech $P_i, P_j \in \mathfrak{P}(G)$ sú dva rôzne eulerovské grafy. U grafov $\vec{G}_i$, $\vec{G}_j$, ktoré vzniknú s grafu $\vec{G}_1$ popísaným spôsobom, bude mať aspoň jedna hrana odlišnú orientáciu. Teda $\vec{G}_i$, $\vec{G}_j$ sú rôzne grafy. Je preto $\mathfrak{A}(G) =$

$= \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \ldots, \vec{G}_n\}$ a ak položíme $\omega(\vec{G}_i) = P_i$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, n$ je tým definované prosté zobrazenie ω systému $\mathfrak{A}(G)$ na systém $\mathfrak{P}(G)$, teda systémy $\mathfrak{A}(G)$, $\mathfrak{P}(G)$ sú ekvivalentné. Z toho vyplýva napr., že strom S s párnym počtom hrán možno práve jedným spôsobom orientovať tak, aby do každého uzla smeroval párny počet hrán (stromom nazývame súvislý graf, ktorý neobsahuje žiadnu kružnicu a teda ani žiadny nenulový eulerovský graf), pretože systém $\mathfrak{P}(S)$ obsahuje jediný prvok: graf N.

Poznámka 1. Je známe, že o počte x eulerovských čiastočných grafov súvislého konečného grafu o m uzloch a n hranách platí: $x = 2^{n-m+1}$. Uvedený poznatok dáva nám preto možnosť ľahko vypočítať počet prvkov systému $\mathfrak{A}(G)$.

Veta 4. *Nech G je ľubovoľný súvislý graf s párnym počtom hrán, potom existuje systém $\mathfrak{W}$ uhlov grafu G taký, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhla systému $\mathfrak{W}$ a systém uhlov s touto vlastnosťou existuje len vtedy, keď graf G má párny počet hrán.*

Dôkaz. I. Podľa vety 3. možno orientovať hrany grafu G tak, že vznikne orientovaný graf $\vec{G}$, v ktorom do každého uzla smeruje párny počet hrán. Nech $\bar{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ je množina tých uzlov grafu G (teda aj grafu $\vec{G}$), do ktorých smeruje v grafe $\vec{G}$ aspoň jedna hrana. Označme znakom $H(u_i)$ množinu tých hrán, ktoré v grafe $\vec{G}$ smerujú do uzla u_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Pretože každá hrana orientovaného grafu smeruje práve do jednoho uzla grafu, je každá hrana grafu G hranou práve jednej množiny systému $\mathfrak{S} = \{H(u_1), H(u_2), \ldots, H(u_m)\}$. Nech $2n_i$ je počet hrán množiny $H(u_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Rozložme ľubovoľným spôsobom množinu $H(u_i)$ na n_i tried R_{i_1}, $R_{i_2}, \ldots, R_{in_i}$ po dvoch prvkoch a nech W_{i_x} $(x = 1, 2, \ldots, n_i)$ je uhol grafu G, ktorého vrcholom je uzol u_i a jeho ramenami hrany triedy R_{i_x}.

Nech $\mathfrak{W}_i = \{W_{i_1}, W_{i_2}, \ldots, W_{in_i}\}$ je systém uhlov takto konštruovaných, ktorých vrcholom je uzol u_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Súčet systémov $\mathfrak{W} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{W}_i$ je systém požadovaných vlastností, lebo každá hrana grafu G je hranou práve jednej množiny $H(u_i) \in \mathfrak{S}$ a je prvkom práve jednej z tried R_{i_x} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ x = 1, 2, \ldots, n_i)$ a teda aj ramenom práve jednoho uhla $\in \mathfrak{W}$.

II. Že systém $\mathfrak{W}$ môže existovať len v grafe s párnym počtom hrán, je zrejmé z toho, že každý uhol má práve dve ramená.

2. Systémy uhlov v pravidelných grafoch tretieho stupňa

Priamym dôsledkom vety 4 je táto veta o pravidelných grafoch tretieho stupňa:

Veta 5. *V ľubovoľnom súvislom pravidelnom grafe tretieho stupňa s párnym počtom $2p > 0$ hrán existuje taký systém uhlov, že každá hrana grafu je ramenom práve jedného uhla systému.*

Poznámka 2. V dôkaze vety 4. popísali sme postup ako nájsť v grafe taký systém uhlov $\mathfrak{W}$, že každá hrana grafu je ramenom práve jedného uhla systému, keď je daná orientácia hrán grafu, pri ktorej do každého uzla grafu smeruje párny počet hrán. V popísanom postupe je ponechána ľubovôľa v tom, ako rozložíme množinu $H(u_i)$ obsahujúcu $2n_i$ hrán na n_i tried po dvoch prvkoch, keď $n_i > 1$. Pretože v pravidelných grafoch tretieho stupňa nemôže byť $n_i > 1$, odpadá tu spomenutá ľubovôľa a každej orientácii hrán grafu, pri ktorej do každého uzla grafu smeruje párny počet hrán, odpovedá (pri zachovaní popísaného postupu) práve jeden systém uhlov $\mathfrak{W}$.

Odvoďme si teraz ďalšie vety o pravidelných grafoch tretieho stupňa.

Veta 6. *Ak súvislý pravidelný graf tretieho stupňa G s párnym počtom hrán má lineárny faktor, potom existujú také dva systémy uhlov $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ grafu, že platí:*

1. *Každá hrana grafu je ramenom práve jedného uhla $\in \mathfrak{W}_1$ a každá hrana grafu je ramenom práve jedného uhla $\in \mathfrak{W}_2$.*

2. *Systémy $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ sú disjunktné.*

Dôkaz. Nech G je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa s párnym počtom hrán, L lineárny faktor a F kvadratický faktor tohoto grafu. Nech ďalej $\vec{G}_1$ je graf G orientovaný tak, že do každého uzla smeruje párny počet hrán, $\mathfrak{W}_1$ systém uhlov, ktorý odpovedá orientovanému grafu $\vec{G}_1$. Nech $\vec{G}_2$ je opäť orientovaný graf G, pričom nech hrany lineárneho faktora L majú rovnakú orientáciu v grafoch $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ a hrany kvadratického faktora F nech v grafe $\vec{G}_2$ majú opačnú orientáciu než v $\vec{G}_1$. Pretože každý uzol grafu je incidentný práve s dvoma hranami kvadratického faktora, bude sa orientácia hrán incidentných a ľubovoľným uzlom u grafu $\vec{G}_1$ líšiť práve u dvoch hrán voči orientácii týchto hrán v grafe $\vec{G}_2$. To však znamená, že aj v grafe $\vec{G}_2$ bude do každého uzla smerovať párny počet hrán. Podľa dôkazu vety 4. existuje potom systém uhlov $\mathfrak{W}_2$ (odpovedajúci jednoznačne orientovanému grafu $\vec{G}_2$) taký, že každá hrana grafu G je ramenom práve jedného uhla z $\mathfrak{W}_2$.

Treba ešte dokázať, že systémy $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ sú disjunktné. Nech h_1 je ľubovoľná hrana grafu G a nech h_2 je taká hrana grafu G, ktorá s hranou h_1 tvorí ramená uhla z $\mathfrak{W}_1$, vrcholom tohoto uhla nech je uzol u. Označme znakom v druhý uzol, s ktorým je hrana h_1 incidentná ($u \neq v$) a znakom h_3 hranu rôznu od h_0 a rôznu od h_2, ktorá je incidentná s uzlom u.

A. Ak hrana h_1 je hranou lineárneho faktora, potom bude mať tú istú orientáciu v $\vec{G}_2$, akú mala v $\vec{G}_1$, ale hrany h_2, h_3 budú mať inú orientáciu v $\vec{G}_2$

než v $\vec{G}_1$. Teda uhol z $\mathfrak{W}_2$, ktorého ramenom je hrana h_1, bude mať tieto prvky u, h_1, h_3.

B. Ak hrana h_1 je hranou kvadratického faktora, potom h_1 bude mať inú orientáciu v $\vec{G}_2$ než v $\vec{G}_1$. To znamená, že vrcholom uhla z $\mathfrak{W}_2$, ktorého ramenom je h_1, nebude uzol u, ale uzol v.

V oboch prípadoch uhol z $\mathfrak{W}_1$ a uhol z $\mathfrak{W}_2$, ktorých ramenom je hrana h_1, sú dva rôzne uhly. Hrana h_1 bola však ľubovoľná hrana grafu G. Teda systémy $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ nemôžu mať spoločného prvku. Tým je veta 6. dokázaná.

Veta 7. *Nech súvislý pravidelný graf tretieho stupňa G s párnym počtom hrán dá sa rozložiť na tri lineárne faktory L_1, L_2, L_3, potom existujú systémy uhlov $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3, \mathfrak{W}_4$, ktoré majú tieto vlastnosti:*

1. *Pre každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ platí: každá hrana grafu je ramenom práve jedného uhla systému $\mathfrak{W}_i$.*

2. *Ak $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, potom platí: $\mathfrak{W}_i, \mathfrak{W}_j = \emptyset$.*

Dôkaz. Označme znakom $\vec{G}_4$ orientovaný graf G, ktorého hrany sú orientované tak, že do každého uzla grafu smeruje párny počet hrán. Nech $\mathfrak{W}_4$ je systém uhlov, ktorý odpovedá grafu $\vec{G}_4$. Označme ďalej znakom $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$ orientované grafy, ktoré z grafu $\vec{G}_4$ vzniknú zmenou orientácie hrán takto: orientácia hrán v grafoch $\vec{G}_4$ a $\vec{G}_i$ je rovnaká u hrán lineárneho faktora L_i, ostatné hrany nech majú inú (opačnú) orientáciu v $\vec{G}_i$ než v $\vec{G}_4$ $(i = 1, 2, 3)$.

Z dôkazu vety 6. je zrejmé, že grafy $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$ budú mať opäť tú vlastnosť, že do každého uzla grafu smeruje párny počet hrán a že teda existujú týmto grafom odpovedajúce systémy uhlov $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, $\mathfrak{W}_3$ také, že každá hrana grafu G je ramenom práve jedného uhla z $\mathfrak{W}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Vieme už (z dôkazu vety 6.), že platí $\mathfrak{W}_i\mathfrak{W}_4 = \emptyset$ pre všetky $i = 1, 2, 3$. Treba ešte dokázať, že platí $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2 = \emptyset$; $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_3 = \emptyset$; $\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3 = \emptyset$; platnosť týchto tvrdení je však zrejmá z toho, že graf $\vec{G}_i$ dostaneme z grafu $\vec{G}_j$, ak zmeníme orientáciu u hrán kvadratického faktora, ktorý pozostáva z hrán aj lineárneho faktora L_i aj lineárneho faktora L_j $(i \neq j;\ i, j \in \{1, 2, 3\})$. Preto $\mathfrak{M}_i\mathfrak{M}_j = \emptyset$ pre všetky $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, čo bolo treba dokázať.

3. ϑ-obrazy grafov tretieho stupňa

Nech $G = U + H$ je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa. Označme znakom $\mathfrak{W}$ systém všetkých uhlov grafu G. Nech počet uzlov grafu G je $2n$ (je známe, že počet uzlov nepárneho stupňa ľubovoľného grafu je párny), $3n$ je potom počet jeho hrán. Počet rôznych uhlov v grafe G je $6n$, lebo každý uzol grafu je vrcholom troch rôznych uhlov. Nech teda $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_{3n}\}$;

$\mathfrak{W} = \{W_1, W_2, \ldots, W_{6n}\}$. Skonštruujme graf $G^* = U^* + H^*$ podľa grafu G takto:

1. $U^* = \{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{3n}^*\}$, 2. $H^* = \{h_1^*, h_2^*, \ldots, h_{6n}^*\}$, 3. Hrana h_i^* je incidentná s uzlom u_j^* práve vtedy, keď hrana h_j je ramenom uhla W_i.

Pretože každý uhol v G má dve ramená, bude skutočne každá hrana h_i^* incidentná práve s dvoma uzlami z U^*; teda množina $G^* = U^* + H^*$ pri definovanej incidencii je grafom. Ukážme ešte, že ak G je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa, potom G^* je súvislý pravidelný graf štvrtého stupňa. Ukážme najprv, že každá hrana z G je ramenom štyroch rôznych uhlov z G. Nech totiž h_0 je ľubovoľná hrana z G, u, u' uzly, s ktorými je táto hrana incidentná v grafe G. Označme znakom h_1, h_2, h_0 hrany, s ktorými je incidentný uzol u a znakom h_1', h_2', h_0 hrany, ktorými je incidentný uzol u'. Hrana h_0 je ramenom týchto uhlov $\{u, h_0, h_1\}, \{u, h_0, h_2\}, \{u', h_0, h_1'\}, \{u', h_0, h_2'\}$. Pretože za prvé: $h_1 \neq h_2$; $h_1' \neq h_2'$ (ináč by uzly u, u' neboli tretieho stupňa) a za druhé: $u \neq u'$ ide nutne o štyri rôzne uhly. Že h_0 nemôže byť ramenom ďalších uhlov grafu je zrejmé. Preto každý uzol $u^* \in U^*$ je nutne uzlom štvrtého stupňa v G^*, čiže G^* je pravidelný graf štvrtého stupňa.

Dokážme ešte, že G^* je súvislý graf, keď G je súvislý graf. Stačí dokázať toto: keď G je súvislý graf a u_i^*, u_j^* sú ľubovoľné dva uzly z G^*, potom u_i^* súvisí s u_j^*.

Nech hrana h_i z G je incidentná s uzlami u, u', hrana h_j z G incidentná s uzlami v, v' v G. Ak by hrany h_i, h_j boli incidentné s tým istým uzlom u_0 v grafe G, znamenalo by to, že existuje v grafe G uhol $W_k = \{u_0, h_i, h_j\}$ a teda v grafe G^* by hrana h_k^* bola incidentná s uzlami u_i^*, u_j^*, čiže uzly u_i^*, u_j^* by súviseli v grafe G^*. Predpokladajme preto, že u, u', v, v' sú štyri rôzne uzly grafu G. Pretože G je podľa predpokladu súvislý graf, existuje v grafe G cesta $u_1, h_{1,2}, u_2, \ldots h_{n-1,n}, u_n$ (kde $u_1 = u$, $u_n = v$) spojujúca uzly u, v. Je buď $h_{1,2} = h_i$, alebo je $h_{1,2}$ taká hrana, ktorá s hranou h_i a uzlom u tvorí uhol grafu G. Je ďalej buď $h_{n-1,n} = h_j$, alebo hrana $h_{n-1,n}$ s hranou h_j a uzlom v tvorí uhol grafu G. Okrem toho, ak $n > 2$, platí pre všetky $x = 1, 2, \ldots, n - 2$ toto: hrana $h_{x,x+1}$ s hranou $h_{x+1,x+2}$ a uzlom u_{x+1} tvorí uhol grafu G.

Označme znakom $u_{\alpha_x}^*$ ten uzol z G^*, ktorý odpovedá hrane $h_{x,x+1}$ z G. Z uvedeného vyplýva, že uzol $u_{\alpha_x}^*$ súvisí s uzlom $u_{\alpha_{x+1}}^*$ $(x = 1, 2, \ldots, n - 2)$, pretože existuje hrana v G^*, ktorá je incidentná s oboma uzlami. Pretože ďalej uzol u_i^* buď je totožný, alebo súvisí s uzlom $u_{\alpha_1}^*$ a práve tak uzol u_j^* buď je totožný, alebo súvisí s uzlom $u_{\alpha_{n-1}}^*$, platí nutne u_i^* súvisí s u_j^*. Teda ľubovoľné dva uzly grafu G^* súvisia. Preto G^* je súvislý graf, ak G je súvislý graf.

O pravidelnom grafe štvrtého stupňa G^* budeme hovoriť, že je ϑ-obrazom pravidelného grafu tretieho stupňa G (písané $G^* = \vartheta(G)$) ak:

1. existuje prosté zobrazenie α množiny hrán H grafu G na množinu uzlov U^* grafu G^*,

2. existuje prosté zobrazenie β systému uhlov $\mathfrak{W}$ grafu G na množinu hrán H^* grafu G^*,

3. pre ľubovoľnú dvojicu pozostávajúcu z uzlu u^* a hrany h^* grafu G^*; kde $u^* = \alpha(h_i)$; $h^* = \beta(W_j)$; $h_i \in H$; $W_j \in \mathfrak{W}$ platí: Uzol u^* je incidentný v grafe G^* s hranou h^* práve vtedy, keď hrana h_i je ramenom uhlu W_j v grafe G.

Poznámka 3. Špeciálnym prípadom pravidelných grafov tretieho stupňa sú grafy, u ktorých uzlami sú vrcholy a hranami sú hrany takého mnohostenu, v ktorom každý vrchol je incidentný s troma hranami. Nech napr. G_1 je graf pravidelného štvorstenu, potom $\vartheta(G_1)$ je napr. graf pravidelného osmistenu; alebo nech G_2 je graf krychle, potom $\vartheta(G_2)$ je graf známého štrnásťstenu, u ktorého 6 stien sú štvoruholníky a 8 stien sú trojuholníky. Dá sa dokázať, že platí toto: ak pravidelný graf tretieho stupňa G dá sa realizovať na orientovanej ploche rodu g, potom pravidelný graf štvrtého stupňa $\vartheta(G)$ dá sa tiež realizovať na tejto ploche. Táto problematika vymyká sa však z rámca našho príspevku.

Poznámka 4. Existujú tiež grafy štvrtého stupňa, ktoré nie sú ϑ-obrazom žiadneho pravidelného grafu tretieho stupňa.

O pravidelných grafoch štvrtého stupňa, ktoré sú ϑ-obrazom pravidelného grafu tretieho stupňa, platia tieto vety:

Veta 8. *Každý pravidelný graf štvrtého stupňa, ktorý má párny počet uzlov a je ϑ — obrazom súvislého pravidelného grafu tretieho stupňa, má lineárny faktor.*

Dôkaz. Množinou hrán lineárneho faktora grafu $G^* = \vartheta(G)$ je množina obrazov systému $\mathfrak{W}_1$ uhlov grafu G (v zobrazení β), ktorého existencia vyplýva z vety 5.

Poznámka 5. Existujú tiež pravidelné grafy štvrtého stupňa s párnym počtom uzlov, ktoré nemajú lineárneho faktora.

Veta 9. *Nech G^* je pravidelný graf štvrtého stupňa s párnym počtom uzlov, ktorý je ϑ — obrazom súvislého pravidelného grafu tretieho stupňa G a nech G má lineárny faktor, potom graf G^* má kvadratický faktor, ktorý se dá rozložiť na dva lineárne faktory.*

Dôkaz. Podľa vety 6. existujú v G systémy uhlov $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ také, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhla z $\mathfrak{W}_1$ a práve jednoho uhla z $\mathfrak{W}_2$, pričom $\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2 = \emptyset$. To znamená, že ľubovoľný uzol u^* u G^* je incidentný práve s jednou hranou množiny $H_1^* = \beta(\mathfrak{W}_1)$ a práve s jednou hranou množiny $H_2^* = \beta(\mathfrak{W}_2)$ a platí $H_1^* . H_2^* = \emptyset$. Teda množina H_1^* je množinou hrán istého lineárneho faktoru L_1^* a taktiež množina H_2^* množinou hrán istého lineárneho faktoru L_2^*, pričom L_1^* a L_2^* nemajú spoločnej hrany.

Ich kompozícia je kvadratický faktor, ktorý sa dá rozložiť na dva lineárne faktory.

Veta 10. *Nech G^* je pravidelný graf štvrtého stpňa s párnym počtom uzlov, ktorý je ϑ — obrazom súvislého pravidelného grafu tretieho stupňa G a nech G dá sa rozložiť na tri lineárne faktory, potom G^* dá se rozložiť na štyri lineárne faktory.*

Poznámka 6. Ako je známe, existuje pravidelný graf tretieho stupňa s párnym počtom hrán, ktorý sa nedá rozložiť na tri lineárne faktory.

Dôkaz vety 10.: Podľa vety 7. existujú v G systémy uhlov $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \mathfrak{W}_3, \mathfrak{W}_4$ také, že každá hrana grafu G je ramenom práve jednoho uhla systému $\mathfrak{W}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ a pre $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ platí: $\mathfrak{W}_i \mathfrak{W}_j = \emptyset$. Označme znakom H_i^* množinu obrazov prvkov systému $\mathfrak{W}_i$ v zobrazení β. Ľubovoľný uzol u^* grafu G^* je incidentný práve s jednou hranou množiny H_i^* $(i = 1, 2, 3, 4)$. Teda H_i^* je množinou hrán istého lineárneho faktora L_i^* grafu G^*. Pretože $H_i^* H_j^* = \emptyset$ pre všetky $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ možno graf G^* rozložiť na lineárne faktory $L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*$, čo bolo treba dokázať.

Ukážeme, že platí aj táto veta:

Veta 11. *Nech G^* je pravidelný graf štvrtého stupňa, ktorý sa dá rozložiť na štyri lineárne faktory $L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*$ a nech G^* je ϑ-obrazom istého pravidelného grafu tretieho stupňa G, potom G dá sa rozložiť na tri lineárne faktory.*

Dôkaz. Nech $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ je množina uzlov grafu G. Označme znakom $H(u_i)$ množinu tých troch hrán grafu G, ktoré sú incidentné s uzlom u_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$. V zobrazení α obrazom množiny $H(u_i)$ je istá trojica uzlov grafu G^*, označme ju znakom T_i^*. Pretože ľubovoľná dvojica hrán množiny $U(u_i)$ spolu s uzlom u_i tvorí uhol grafu G existuje nevyhnutne taká hrana v G^*, ktorá je incidentná s ľubovoľnou dvojicou uzlov z trojice T_i^*. Trojica hrán grafu G^*, ktorá je v zobrazení β obrazom trojice uhlov s vrcholem v uzle u_i v grafe G, spolu s uzlami trojice T_i^* tvorí istú kružnicu K_i^* grafu G^*. Uzol u_i bol ľubovoľný uzol grafu G. Ak teda najdeme takéto kružnice pre všetky uzly u_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, dostaneme tak systém kružníc $C^* = \{K_i^*, K_2^*, \ldots, \ldots, K_p^*\}$, ktorý má tieto vlastnosti:

1. Každá hrana grafu G^* je hranou práve jednej kružnice z C^*, pretože každý uhol má práve jeden vrchol a je podľa predpokladu $h^* \in K_1^*$ práve vtedy, keď vrcholem uhla, ktorý je vzorom hrany h^* v zobrazení β, je uzol u_i.

2. Každý uzol u^* grafu G^* je uzlom práve dvoch kružníc systému C^*, lebo vzor uzla u^* v zobrazení α t. j. hrana $h = \alpha^{-1}(u^*)$, je ramenom jednak uhlov s vrcholom v jednom, jednak uhlov s vrcholom v druhom uzle, s ktorým je hrana h incidentná.

Teda zo štyroch hrán, ktoré sú incidentné s ľubovoľným uzlom u^* grafu G^* dve patria do jednej z kružníc $\in C^*$ a dve do inej kružnice $\in C^*$. Pri danom rozklade grafu G^* na štyri lineárne faktory (ktorý podľa predpokladu existuje), patrí každá z týchto štyroch hrán k inému lineárnemu faktoru L_i^* $(i = 1, 2, 3, 4)$. Teda o hranách incidentných s uzlom u^* platí:

buď A. hrany z lineárných faktorov L_1^* a L_4^* (resp. L_2^* a L_3^*) sú v tej istej kružnici systému C^*,

alebo: B. hrany z lineárnych faktorov L_2^* a L_4^* (resp. L_1^* a L_3^*) sú v tej istej kružnici systému C^*,

alebo: C. hrany z lineárnych faktorov L_3^* a L_4^* (resp. L_1^* a L_2^*) sú v tej istej kružnici systému C^*.

Ak platí tvrdenie A. (resp. B., resp. C.) zaraďme uzol u^* do triedy uzlov U_1^* (resp. U_2^*, resp. U_3^*). Keď prevedieme uvedeným spôsobom zatriedenie všetkých uzlov grafu G^* do tried dostaneme tak istý rozklad $\mathfrak{R}^* = \{U_1^*, U_2^*, U_3^*\}$ množiny uzlov grafu G^*.

O rozklade $\mathfrak{R}^*$ platí: nech T_i^* je ľubovoľná trojica uzlov grafu G^*, ktorá je obrazom trojice hrán incidentných s uzlom u_i grafu G v zobrazení α, potom každý uzol trojice T_i^* patrí do inej triedy uzlov U_x^*.

Dokážeme správnosť uvedeného tvrdenia.

Každá z hrán kružnice K_i^* musí patriť k inému lineárnemu faktoru, pretože ináč by uzol kružnice bol incidentný s dvoma hranami toho istého lineárneho faktora, čo nie je možné. Z toho však vyplýva, vzhľadom na to akým spôsobom sme zatrieďovali uzly grafu G^* do tried U_x^*, že každý uzol trojice T_i^* patrí do inej triedy rozkladu $\mathfrak{R}^*$.

Každý uzol grafu G^* má práve jeden vzor v zobrazení α, jeho vzorom je istá hrana grafu G. Vzormi uzlov triedy U_x^* sú hrany istej triedy hrán H_x grafu G $(x = 1, 2, 3)$.

Z troch hrán, s ktorými je incidentný ľubovoľný uzol z G jedna je z H_1, jedna z H_2, jedna z H_3. Dokázali jsme už totiž, že každý uzol trojice T_i^* patrí do inej triedy rozkladu $\mathfrak{R}^*$. Z toho vyplýva, že každá hrana trojice hrán $H(u_i)$ (kde u_i je ľubovoľný uzol grafu G) incidentných s uzlom u_i patrí do inej z množín H_x $(x = 1, 2, 3)$.

Graf G možno preto rozložiť na tri lineárne faktory takto: lineárny faktor L_x bude pozostávať z hrán a len z hrán množiny H_x $(x = 1, 2, 3)$. Pretože $H_xH_y = \emptyset$ pre $x \neq y$, je tým skutočne daný rozklad grafu G na tri lineárne faktory. To bolo treba dokázať.

4. O rozkladoch pravidelných grafov štvrtého stupňa $\vartheta(G)$ na hamiltonovské čiary

Odvoďme si niektoré vety, ktoré poukazujú na úzky vzťah medzi hamiltonovskými čiarami v pravidelných grafoch tretieho stupňa a rozkladmi ϑ-obrazov týchto grafov na dve hamiltonovské čiary.

Veta 12. *Nech G je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa. Ak v grafe G existuje hamiltonovská čiara, potom graf $\vartheta(G)$ možno rozložiť na dve hamiltonovské čiary.*

Veta 13. *Ak graf* $\vartheta(G)$ *dá sa rozložiť na dve hamiltonovské čiary, potom v* G *existuje hamiltonovská čiara.*

Veta 14. *Nech* λ *je počet rôznych hamiltonovských čiar v súvislom pravidelnom grafe tretieho stupňa* G *a nech* $2n$ *je počet uzlov tohoto grafu, potom o počte* λ^* *rôznych rozkladov grafu* $G^* = \vartheta(G)$ *na dve hamiltonovské čiary platí* $\lambda^* = \lambda \cdot 2^{n-1}$.

Dôkaz vety 12: Nech $G = U + H$ je súvislý pravidelný graf tretieho stupňa, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ množina jeho uzlov a nech existuje v G hamiltonovská čiara K. Hamiltonovská čiara je faktorom druhého stupňa, preto hrany z G nepatriace do K sú hranami lineárneho faktora (označme ho L) grafu G.

Nech $G^* = \vartheta(G)$; $G^* = U^* + H^*$ a nech U_L^* je množina tých uzlov grafu G^*, ktoré v zobrazení α sú obrazmi hrán lineárneho faktora L, U_K^* množina tých uzlov grafu G^*, ktoré v zobrazení α sú obrazmi hrán hamiltonovskej čiary K. Zachovajme označenie $C^* = \{K_1^*, K_2^*, \ldots, K_r^*\}$ pre systém kružníc grafu G^* taký, že kružnica K_i^* odpovedá uzlu $u^i \in G$ takto: uzly kružnice K_i^* sú obrazy tých hrán grafu G v zobrazení α, ktoré sú incidentné s uzlom u_i a hrany kružnice K_i sú obrazmi v zobrazení β tých uhlov grafu G, ktorých vrcholom je uzol u_i. Vieme, že každý uzol grafu G^* je uzlom práve dvoch kružníc z C^*.

Nech C_L^* je systém tých kružníc z C^*, ktoré obsahujú uzol z U_L^*; platí: $C_L^* = C^*$. Je totiž C_L^* systém všetkých tých kružníc, ktoré odpovedajú množine U_L všetkých uzlov z grafu G, ktoré sú incidentné s hranami lineárneho faktora L.

Rozdelme hrany množiny H^* do dvoch tried H_1^*, H_2^* takto: nech u_i^* je ľubovoľný uzol množiny U_L^* a nech $K_{p_i}^*$, $K_{q_i}^*$ sú tie kružnice systému C^*, ktoré obsahujú uzol u_i^*,

1. do triedy H_1^* zaraďme dve hrany kružnice $K_{p_i}^*$, ktoré sú incidentné s uzlom u_i^*, zbývajúcu (tretiu) hranu kružnice $K_{p_i}^*$ zaraďme do triedy H_2^*,

2. dve hrany kružnice $K_{q_i}^*$ a to tie, ktoré sú incidentné s u_i^* zaraďme do H_2^*, ostávajúcu (tretiu) hranu zaraďme do triedy H_1^*.

Ak takto prevedieme zatriedenie hrán všetkých dvojíc kružníc obsahujúcich uzol z $\in U_L^*$, je každá hrana grafu hranou práve jednej z tried H_1^*, H_2^*, pretože za prvé: každá hrana je hranou práve jednej kružnice z C^* (pozri dôkaz predchádzajúcej vety) a za druhé: každá kružnica z C^* obsahuje práve jeden uzol z U_L^*. Všimnime si ešte, že dve hrany ľubovoľnej kružnice $\in C^*$, s ktorými je incidentný uzol z U_L^* patria do tej istej triedy a dve kružnice, s ktorými je incidentný uzol z U_K^*, patria k rôznym triedam.

Dokážme teraz, že platí: Čiastočný graf G_1^* (resp. G_2^*) grafu G^* obsahujúci všetky hrany a len hrany triedy H_1^* (resp. H_2^*) je hamiltonovskou čiarou grafu G^*.

A. Tvrdím: G_1^* (resp. G_2^*) je faktorom druhého stupňa v G^*. Nech u_i^* je ľubovoľný uzol grafu G^*. Ak je $u_i^* \in U_L^*$, potom u_i^* je zrejme incidentný práve s dvoma hranami z H_1^* a s dvoma hranami z H_2^*. Ak je $u_i^* \in U_K^*$, potom vzhľadom na to, že každá z dvoch hrán incidentných s uzlom u_i^* v jednej kružnici (a tak isto aj v druhej kružnici) systému C^* obsahujúcej uzol u_i^* patrí do inej triedy, platí: uzol u_i^* je incidentný s dvoma hranami z H_1^* a s dvoma hranami z H_2^*. Tým je dôkaz tvrdenia A. vykonaný.

B. Tvrdím: G_1^* (resp. G_2^*) je súvislý graf. Dôkaz tvrdenia: Ak h_1, h_2 sú ľubovoľné také dve hrany hamiltonovskej čiary K, ktoré sú incidentné s tým istým uzlom u_i grafu G, potom uzly $\alpha(h_1), \alpha(h_2)$ súvisia v grafe G_1^*. Nech totiž h_0 je tá hrana lineárneho faktora L, ktorá je incidentná s uzlom u_i, potom obrazy $\alpha(h_1), \alpha(h_2), \alpha(h_0)$ sú uzlami kružnice $K_i^* \in C^*$. Teda do triedy H_1^* patrí buď hrana incidentná v G^* s uzlami $\alpha(h_1), \alpha(h_2)$ (potom uzly $\alpha(h_1), \alpha(h_2)$ zrejme súvisia v G_1^*), alebo do triedy H_1^* patrí aj hrana incidentná v G^* s uzlami $\alpha(h_1), \alpha(h_0)$ aj hrana incidentná s uzlami $\alpha(h_2), \alpha(h_0)$. Čiže uzly $\alpha(h_1), \alpha(h_2)$ súvisia v grafe G_1^*. Obdobná úvaha vedie k rovnakému uzáveru pre G_2^*.

Teda v zobrazení α obrazy dvoch „súsedných" hrán hamiltonovskej čiary K súvisia v G_1^* (resp. v G_2^*). To však znamená, že v G_1^* (resp. v G_2^*) súvisia všetky obrazy (v zobrazení α) hrán z K. Ináč povedané: ľubovoľné dva uzly množiny U_K^* súvisia v grafe G_1^* (resp. v grafe G_2^*). Pretože hrana z H_1^* (resp. z H_2^*), ktorá je incidentná v grafe G_1^* (resp. G_2^*) s istým uzlom z U_L^* je incidentná aj s jedným uzlom z U_K^*, súvisí v grafe G_1^* (resp. v grafe G_2^*) každý uzol u U_L^* so všetkými uzlami z U_K^*. Preto graf G_1^* (resp. graf G_2^*) je súvislý graf. Tým je dôkaz vety 12. vykonaný.

Dôkaz vety 13.: I. Nech $G^* = \vartheta(G)$; $G = U + H$; $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ a nech G_1^*, G_2^* sú dve hamiltonovské čiary grafu G^*, ktoré nemajú spoločnej hrany. Hrany hamiltonovskej čiary G_1^* (resp. G_2^*) tvoria triedu hrán H_1^* (resp. H_2^*). Nech $C^* = \{K_1^*, K_2^*, \ldots, K_p^*\}$ je systém kružníc grafu G^* taký, že uzly kružnice $K_i^* \in C^*$ sú obrazmi troch hrán incidentných s uzlom $u_i \in U$ v zobrazení α a hrany kružnice K_i^* sú obrazmi troch uhlov grafu G s vrcholom v uzle u_i v zobrazení β. Ak by systém C^* obsahoval iba dve kružnice, t. j. ak by graf G pozostával iba z dvoch uzlov u_1, u_2 a z troch hrán s tymito uzlami incidentných, potom by G zrejme obsahoval hamiltonovskú čiaru a nebolo by potrebné nič dokazovať. Predpokladajme preto, že G má najmenej štyri uzly a teda najmenej šesť hrán t. j., že C^* obsahuje najmenej štyri kružnice a najmenej šesť uzlov. Platí: ľubovoľná kružnica K_i^* systému C^* obsahuje hrany z oboch tried H_1^*, H_2^*. Ak by totiž kružnica K_i^* obsahovala napr. len hrany z triedy H_1^*, potom K_i^* by bola kružnicou aj v G_1^* a uzly tejto kružnice by nesúviseli s ostatnými uzlami grafu G_1^*, čo odporuje predpokladu, že G_1^* je hamiltonovská čiara.

Teda každá kružnica z C^* buď obsahuje dve hrany z H_1^* a jednu z H_2^*, alebo obsahuje jednu hranu z H_1^* a dve z H_2^*. Tak či tak existuje práve jeden uzol (budeme mu hovoriť význačný uzol) kružnice K_i^* taký, že je incidentný s dvoma hranami kružnice, ktoré patria do tej istej triedy H_j^* ($j = 1, 2$). Každý uzol je uzlom práve dvoch kružníc systému C^*, je však zrejmé, že ak istý uzol je význačným (resp. nie je význačným) uzlom jednej kružnice, je význačným (resp. nie je význačným) uzlom aj druhej kružnice.

Označme znakom V^* množinu všetkých význačných uzlov grafu G^*. Vzory význačných uzlov v zobrazení α tvoria istú množinu hrán H_V grafu G, ktorá má túto vlastnosť: každý uzol grafu G je incidentný práve s jednou hranou z H_V, pretože obrazy hrán incidentných s uzlom grafu G v zobrazení α sú uzly kružnice z C^* a každá kružnica z C^* — ako sme práve dokázali — má práve jeden význačný uzol. Teda H_V je množinou hrán istého lineárneho faktora L grafu G. Hrany grafu G nepatriace do L sú hranami istého kvadratického faktora K grafu G. Dokážeme, že K je hamiltonovská čiara grafu G. Prv však než prikročíme k dôkazu tohoto tvrdenia, dokážeme ešte toto:

II. Nech $\overline{G}^*$ je čiastočný graf grafu G^*, ktorý pozostáva z tých hrán grafu G^*, ktoré sú incidentné s dvoma uzlami nevýznačnými, potom $\overline{G}^*$ je kružnica, ktorá obsahuje všetky nevýznačné uzly grafu G^*.

Že všetky uzly v $\overline{G}^*$ sú druhého stupňa, je zrejmé, lebo ak istá hrana je incidentná s dvoma nevýznačnými uzlami, potom každý z týchto uzlov je incidentný ešte práve s jednou takouto hranou.

Nech K_1^* je kružnica z C^* a nech v_1^* je jej význačný uzol, u_1^*, u_2^* jej uzly nevýznačné. Obiehajme po hranách hamiltonovskej čiary G_1^* a po hranách hamiltonovskej čiary G_2^* cez ich jednotlivé uzly tak, že v oboch prípadoch vyjdeme z uzla u_1^* a uzol u_2^* bude najbližší nevýznačný uzol, ktorý dostihneme. Teda u jednej hamiltonovskej čiary bude náš postup popisovať istá postupnosť uzlov $u_1^*, u_2^*, \ldots$, u druhej postupnosť uzlov $u_1^*, v_1^*, u_2^*, \ldots$. Pri ďalšom postupe z uzla u_2^* v jednej z hamiltonovských čiar prejdeme hneď do ďalšieho nevýznačného uzla $u_3^* \neq u_1^*$, u druhej najbližší uzol bude opäť istý význačný uzol (v_2^*) a potom až nasleduje uzol u_3^*. Uvážme totiž, že v každej kružnici z C^* jedna hrana patrí do jednej z tried H_1^*, H_2^*, zbývajúce obe do druhej z týchto tried a uzol kružnice incidentný s hranami tejto kružnice, ktoré patria do tej istej triedy, je význačný uzol.

Všimnime si, že poradie uzlov nevýznačných (ak neprihliadame k ,,umiesteniu" význačných uzlov) v akom cez tieto prechádzame obiehajúc hamiltonovské čiary G_1^*, G_2^*, musí byť v oboch hamiltonovských čiarach rovnaké, nech ako dlho pokračujeme v postupe. Avšak v takom istom poradí musíme prechádzať cez jednotlivé nevýznačné uzly, ak volíme tento postup: vyjdeme z uzla u_1^*, po hrane, ktorá je incidentná s u_2^*, ďalej z uzla u_2^* po hrane, ktorá je incidentná s u_2^* a je incidentná s ďalším nevýznačným uzlom (týmto uzlom je zrejme uzol u_3^*) bez ohľadu na to, do ktorej triedy táto hrana incidentná s dvoma nevýznačnými uzlami patrí. Obdobne z uzla u_3^* do nevýznačného uzla u_4^*

atď. Pretože pri obiehaní po hamiltonovskej čiare prejdeme po konečnom počte krokov cez všetky uzly grafu G^* (a teda aj cez všetky nevýznačné uzly tohoto grafu), musíme nutne pri obiehaní po hranách grafu $\overline{G}^*$ po konečnom počte krokov (a to v rovnakom poradí ako pri obiehaní hamiltonovských čiar) prejsť cez všetky nevýznačné uzly grafu G^*. Teda $\overline{G}^*$ je graf druhého stupňa a je grafom súvislým. $\overline{G}^*$ je kružnica a obsahuje všetky nevýznačné a len nevýznačné uzly grafu G^*. Tým je dôkaz tvrdenia II prevedený.

III. Dokážme napokon, že kvadratický faktor K (z prvej časti dôkazu) je hamiltonovskou čiarou grafu G. Stačí dokázať, že K je súvislý graf.

Nech postupnosť hrán $P^* = h_1^* h_2^*, \ldots, h_p^*, h_1^*, \ldots$ popisuje v akom poradí prechádzame cez hrany kružnice $\overline{G}^*$ pri obiehaní po nej v pevne zvolenom smere obiehania vychádzajúc z jej hrany h_1^*. Každá hrana postupnosti P^* je hranou práve jednej kružnice z C^*; označme znakom $K_{z_j}^*$ kružnicu z C^*, ktorej hranou je hrana h_j^* postupnosti P^* ($j = 1, 2, \ldots, p$). Ďalej označme znakom $u_{j,j+1}^*$ uzol kružnice $\overline{G}^*$, ktorý je incidentný s jej hranami h_j^*, h_{j+1}^* ($j = 1, 2, \ldots, p - 1$).

Platí zrejme: vzorom v zobrazení α uzla $u_{j,j+1}^*$ je istá hrana $h_{j,j+1} = \alpha^{-1}(u_{j,j+1}^*)$ ktorá je v grafe K incidentná s uzlami $u_{z_j}, u_{z_{j+1}}$ ($j = 1, 2, \ldots, p - 1$). Pretože súvislosť medzi uzlami je vzťah tranzitívny, musia nutne súvisieť v K všetky uzly u_{z_j} ($j = 1, 2, \ldots, p$), ktoré odpovedajú kružniciam $K_{z_1}^*, K_{z_2}^*, \ldots, K_{z_p}^*$, z ktorých každá obsahuje po jednej hrane postupnosti P^* (kružnica $K_{z_j}^*$ obsahuje podľa predpokladu hranu h_j^*).

Nech $\overline{U} = \{u_{z_1}, u_{z_2}, \ldots, u_{z_p}\}$. Vieme, že každá kružnica z C^* obsahuje práve jednu hranu z $\overline{G}^*$ a teda podľa časti II. dôkazu aj práve jednu hranu postupnosti P^* a každá hrana postupnosti P^* je hranou práve jednej kružnice z C^*. Teda $\overline{U} = U$, čiže K je súvislý graf obsahujúci všetky uzly grafu G a každý uzol z K je uzlom druhého stupňa. Preto K je hamiltonovská čiara grafu G, čo bolo treba dokázať.

Dôkaz vety 14.: Ak je $\lambda = 0$, potom je aj $\lambda^* = 0$, lebo z $\lambda^* > 0$ vyplýva podľa vety 13. $\lambda > 0$. Nech $\lambda > 0$ a nech $K_1, K_2, \ldots, K_\lambda$ sú všetky rôzne hamiltonovské čiary v G, K_i ľubovoľná z nich. K tejto hamiltonovskej čiare K_i možno nájsť rozklad množiny hrán grafu $G^* = \vartheta(G)$ na triedy hrán H_1^*, H_2^* taký, že H_1^* resp. H_2^* je množina všetkých hrán istej hamiltonovskej čiary G_1^* resp. G_2^* pričom tieto hamiltonovské čiary nemajú spoločnej hrany. Pri zatrieďovaní hrán spôsobom, ktorý sme popísali v dôkaze vety 12 pri dvojici kružníc $K_{p_i}^*, K_{q_i}^*$ (ktorých spoločným uzlom je uzol $u_i^* \in U_L^*$) do tried H_1^*, H_2^*, mali sme možnosť si vybrať, ktorú z kružníc označíme $K_{p_i}^*$ a ktorú $K_{q_i}^*$. To má pravda vplyv na zatrieďovanie. Pretože počet uzlov grafu G je podľa predpokladu $2n$, má G práve $3n$ hrán a počet hrán lineárneho faktora L je n. Teda U_L^* má n uzlov a existuje n dvojíc kružníc, ktorých spoločným uzlom je uzol $\in U_L^*$. Zmena označenia najmenej v jednej a najviac v $n - 1$ dvojiciach kružníc spôsobí zmenu v rozklade na triedy H_1^*, H_2^* (zmena u všetkých dvojíc by spôsobila iba zmenu označenia tried, nie však zmenu rozkladu). Pre rozklad na dve hamiltonovské čiary grafu G^* podľa pevne zvolenej hamiltonovskej čiary K_i grafu G máme teda vcelku 2^{n-1} rôznych možností. Pretože pri dvoch rôznych hamiltonovských čiarach K_i, K_j v G príslušné lineárne faktory (ktorých hranami sú hrany nepatriace do K_i resp. do K_j) sa líšia aspoň jednou hranou, budú rozdielne aj odpovedajúce množiny význačných uzlov v grafe G^* a budú rozdielne aj týmto odpovedajúce rozklady grafu G^* na dve hamiltonovské čiary. Teda je $\lambda^* \geqq \lambda \,.\, 2^{n-1}$. Ak by bolo $\lambda^* > \lambda \,.\, 2^{n-1}$ musela by podľa vety 13. existovať množina význačných uzlov, ktorá nie je obrazom množiny hrán grafu G nepatriacich do hamiltonovskej čiary K_i ($i = 1, 2, \ldots, \lambda$) v zobrazení α. Podľa vety 13. by potom existovala ešte aspoň jedna ďalšia hamiltonovská čiara $K_{\lambda+1}$ v grafe G. To je spor s predpokladom. Je proto $\lambda^* = \lambda \,.\, 2^{n-1}$, čo bolo treba dokázať.

LITERATURA

Steinitz E.: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlin 1934.
König D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.
Kotzig A.: O istých rozkladoch konečných grafov, Matem. fyz. časopis SAV, *V*, 1955, č. 3.

Резюме

ИЗ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава.

(Поступило в редакцию 21/II 1956 г.)

В статье доказываются следующие теоремы:

1. *Пусть G — произвольный связный граф с четным числом ребер; тогда существует система $\mathfrak{W}$ углов графа G такая, что каждое ребро из G принадлежит точно одному углу системы и система углов $\mathfrak{W}$ с этим свойством существует только тогда, если G содержит четное число ребер (тройка элементов графа G: $\{u, h_1, h_2\}$, где u — вершина, $h_1 \neq h_2$ — ребра, называется углом графа G, если оба ребра h_1, h_2 инцидентны с вершиной u).*

2. *Если связный регулярный граф третьей степени G с четным числом ребер содержит линейный множитель, то в G существуют две системы углов $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, являющиеся дизъюнктными, и каждое ребро графа является элементом точно одного угла системы $\mathfrak{W}_1$ (соотв. $\mathfrak{W}_2$). Если, кроме того, G можно разложить на три линейных множителя, то существуют*

в G четыре системы углов, не имеющие попарно общего угла, причем каждое ребро графа является элементом точно одного угла каждой из этих систем.

Граф G^*, множество вершин которого есть U^*, множество ребер H^*, называется ϑ-образом графа G — где G есть связный регулярный граф третьей степени, U есть множество его вершин, H есть множество его ребер — если:

I. *Существует простое отображение α множества H на множество U^*,*

II. *существует простое отображение β системы всех углов $\mathfrak{W}$ графа G на множество ребер H^*,*

III. *вершина $u^* = \alpha(h_i)$ инцидентна с ребром $h^* = \beta(W_i)$ в графе G^* тогда и только тогда, если ребро $h_i \in H$ является элементом угла $W_j \in \mathfrak{W}$.*

3. Для графов $G^* = \vartheta(G)$ с четным числом вершин, которые являются, очевидно, связными регулярными графами четвертой степени, доказывается следующее:

Каждый граф $\vartheta(G)$ содержит линейный множитель. Если в G существует линейный множитель, то в графе $\vartheta(G)$ имеется квадратичный множитель, разложимый на два линейных множителя. Если граф G можно разложить на три линейных множителя, то граф $\vartheta(G)$ можно разложить на четыре линейных множителя и наоборот.

4. Дальнейшие доказываемые теоремы обращают внимание на тесную связь между гамильтоновыми линиями в регулярных графах третьей степени и разложениями их ϑ-образов на две гамильтоновы линии. Доказывается следующее теоремы:

а) *Если в регулярном графе третьей степени G существует гамильтонова линия, то $\vartheta(G)$ можно разложить на две гамильтоновы линии и наоборот.*

б) *Пусть λ — число различных гамильтоновых линий в регулярном графе третьей степени G и $2n$ — число его углов, тогда о числе λ^* различных разложений графа $\vartheta(G)$ на две гамильтоновы линии можно утверждать: $\lambda^* = \lambda \cdot 2^{n-1}$.*

Zusammenfassung

AUS DER THEORIE DER ENDLICHEN REGULÄREN GRAPHEN DRITTEN UND VIERTEN GRADES

ANTON KOTZIG, Bratislava.

(Eingelangt am 21. Feber 1956.)

In dem Beitrag werden folgende Sätze bewiesen:

1. *Es sei G ein beliebiger zusammenhängender Graph, welcher eine gerade Anzahl von Kanten enthält, dann existiert ein Winkelsystem $\mathfrak{W}$ des Graphen G so, dass jede Kante aus G genau einem Winkel aus $\mathfrak{W}$ gehört und ein Winkelsystem*

$\mathfrak{W}$ mit dieser Eigenschaft existiert nur dann, wenn G eine gerade Anzahl von Kanten enthält. (Die drei Elemente aus G: $\{u, h_1, h_2\}$, wo u ein Knotenpunkt und $h_1 \neq h_2$ die Kanten sind, werden Winkel des Graphen G genannt, wenn beide Kanten h_1, h_2 mit dem Knotenpunkt u inzident sind.)

2. *Wenn ein zusammenhängender regulärer Graph dritten Grades G mit gerader Anzahl von Kanten einen linearen Faktor enthält, dann existieren solche zwei Winkelsysteme $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ die elementfremd sind und jede Kante des Graphen gerade einem Winkel aus $\mathfrak{W}_1$ (resp. aus $\mathfrak{W}_2$) gehört. Wenn ausserdem G in drei lineare Faktoren zerlegbar ist, dann gibt es in G vier solche Winkelsysteme, die paarweise elementfremd sind und jede Kante genau einem Winkel aus jedem System gehört.*

Den Graph G^*, dessen Knotenpunktmenge U^* und die Kantenmenge H^* ist, nennen wir ϑ-Bild des Graphen $G = U + H$ (wobei G ein regulärer zusammenhängender Graph dritten Grades, U resp. H seine Knotenpunktmenge, resp. Kantenmenge ist), wenn gilt:

I. *Es gibt eine einfache Abbildung α der Kantenmenge H des Graphen G auf die Knotenpunktmenge U^* des Graphen G^*.*

II. *Es gibt eine einfache Abbildung β des Systems $\mathfrak{W}$ aller Winkel des Graphen G auf die Kantenmenge H^* des Graphen G^*.*

III. *Ein Knotenpunkt u^* ist inzident mit der Kante h^* des Graphen G^*, wo $u^* = \alpha(h_i)$; $h_i \in H_i$ $h^* = \beta(W_j)$; $W_j \in \mathfrak{W}$; dann und nur dann, wenn die Kante h_i ein Element des Winkels W_j im Graphen G ist.*

3. Für die Graphen $G^* = \vartheta(G)$ mit gerader Knotenanzahl, welche selbstverständlich reguläre zusammenhängende Graphen vierten Grades sind, wird Folgendes bewiesen:

Jeder Graph $\vartheta(G)$ hat einen linearen Faktor. Wenn es im Graphen G einen linearen Faktor gibt, dann hat $G^* = \vartheta(G)$ einen quadratischen Faktor, der sich in zwei lineare Faktoren zerlegen lässt. Wenn der Graph G sich in drei lineare Faktoren zerlegen lässt, dann lässt sich der Graph G^* in vier lineare Faktoren zerlegen und umgekehrt.

4. Weitere Sätze weisen auf den engen Zusammenhang zwischen den Hamiltonschen Linien im Graphen dritten Grades und die Zerlegung der ϑ-Bilder dieser Graphen in zwei Hamiltonsche Linien. Man beweist diese Sätze:

a) *Wenn es im regulären Graphen dritten Grades G eine Hamiltonsche Linie gibt, dann lässt sich der Graph $G^* = \vartheta(G)$ in zwei Hamiltonsche Linien zerlegen und umgekehrt.*

b) *Es sei λ die Anzahl verschiedener Hamiltonscher Linien im regulären Graphen dritten Grades G und es sei $2n$ die Knotenanzahl des Graphen G, dann gilt von der Anzahl λ^* der verschiedenen Zerlegungen des Graphen $G^* = \vartheta(G)$ in zwei Hamiltonsche Linien: $\lambda^* = \lambda \,.\, 2^{n-1}$.*

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага.

(Поступило в редакцию 27/II 1956 г.) DT: 517.39

В настоящей работе доказываются некоторые равенства, тесно связанные с известной формулой $\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Phi(f(x))\,f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Теорема. *Пусть f — непрерывная вещественная функция с ограниченным изменением в интервале $\langle a, b\rangle$. Пусть p, n, v — положительное, отрицательное и полное изменение функции f. Определим в $\langle a, b\rangle$ функции ϱ, $\varkappa$, η следующим образом: Если $x \in (a, b)$ и если функция f строго возрастает (убывает) в точке x, пусть $\varrho(x) = \eta(x) = 1$, $\varkappa(x) = 0$ ($\varrho(x) = 0$, $\varkappa(x) = 1$, $\eta(x) = -1$); в остальных точках интервала $\langle a, b\rangle$ положим $\varrho(x) = \varkappa(x) = \eta(x) = 0$. (Следовательно, $\varrho(x) - \varkappa(x) = \eta(x)$, $\varrho(x) + \varkappa(x) = |\eta(x)|$ для всякого $x \in \langle a, b\rangle$.) Пусть F (соотв. Φ) — функция на множестве $\langle a, b\rangle$ (соотв. $f(\langle a, b\rangle)$). В этом случае для почти всех $y \in E_1$ множество $f^{-1}(y)$ является конечным и обладает тем свойством, что*

$$\eta(x) \neq 0 \quad \text{для каждого } x \in f^{-1}(y)\,; \tag{0}$$

далее, равенства

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\varrho(x) \Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}p(x)\,, \tag{1}$$

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\varkappa(x) \Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}n(x)\,, \tag{2}$$

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta(x) \Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}f(x)\,, \tag{3}$$

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,|\eta(x)| \Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}v(x)\,, \tag{4a}$$

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x) \Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}v(x)\,, \tag{4б}$$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Phi(f(x))\,\mathrm{d}f(x) \tag{5}$$

справедливы в следующем смысле: Если существует (конечный или бесконечный) интеграл Лебега-Стильтьеса в правой части, то сумма за знаком интеграла в левой части имеет смысл для почти всех $y \in E_1$,[1]) *интеграл (Лебега) в левой части существует и равен интегралу в правой части.*

Доказательство. Пусть $q(y)$ — число элементов множества $f^{-1}(y)$. В силу известной теоремы Банаха (см., напр., [2], стр. 280), имеем

$$\int_{E_1} q(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b 1\,.\,\mathrm{d}v(x)\,. \tag{6}$$

Положим $L = E[y;\, q(y) = \infty]$; пусть A — множество тех точек $x \in (a, b)$, в которых f имеет экстремум. Нетрудно обнаружить, что множество $f(A)$ счетно; из (6) следует, что мера множества L равна нулю. Мера множества

$$M = L \cup f(A) \cup \{f(a), f(b)\}$$

равна поэтому также нулю. Докажем, что

$$q(y) = \sum_{f(x)=y} |\eta(x)|\,, \tag{7}$$

$$\tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}(f(b) - y) - \operatorname{sgn}(f(a) - y)) = \sum_{f(x)=y} \eta(x) \tag{8}$$

для всякого $y \in E_1 - M$. Для этой цели возьмем $y \in E_1 - M$; пусть $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, где $a < x_1 < \ldots < x_r < b$ (r — целое число $\geqq 0$). Так как функция f непрерывна, то $f - y$ сохраняет знак в каждом из интервалов $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_r, b)$. Потому что f не достигает экстремума ни в одной из точек $x_1, \ldots, x_r$, вытекает отсюда, что функция $f - y$ меняет знак в точках $x_1, \ldots, x_r$. Итак, $|\eta(x_j)| = 1$ для $j = 1, \ldots, r$; этим доказано (0) и (7). Далее, очевидно, $\eta(x_{k+1}) = -\eta(x_k)$ для $k = 1, \ldots, r - 1$ и

$$\eta(x_1) = \operatorname{sgn}(y - f(a))\,,\quad \eta(x_r) = \operatorname{sgn}(f(b) - y)\,. \tag{9}$$

Если r — четное, то $\eta(x_r) = -\eta(x_1)$, $\sum_{k=1}^{r} \eta(x_k) = 0$; следовательно,

$$\sum_{k=1}^{r} \eta(x_k) = \tfrac{1}{2}(\eta(x_1) + \eta(x_r))\,. \tag{10}$$

Если r — нечетное число, имеем $\sum_{k=1}^{r} \eta(x_k) = \eta(x_1) = \eta(x_r)$, так что равенство (10) опять справедливо. Из (9), (10) следует (8).

Соотношения (6), (7) показывают, что формула (4a) имеет место для функции $F(x) = 1$ ($x \in \langle a, b\rangle$). Так как

$$\int_{E_1} \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}(f(b) - y) - \operatorname{sgn}(f(a) - y))\,\mathrm{d}y = f(b) - f(a)\,,$$

---

[1]) Положим $(\pm\infty)\,.\,0 = 0$; если, напр., $F(x) = -\infty$, $\varrho(x) = 0$, то напишем $F(x)\,.\,\varrho(x) = 0$.

видим [см. (8)], что и равенство (3) справедливо для функции $F(x) = 1$! Подобным образом можно доказать, что равенства (3), (4a), а, следовательно, и равенства (1), (2), верны тоже для всякой функции F, являющейся характеристической функцией некоторого интервала $I \subset \langle a, b \rangle$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — система всех ограниченных функций F, для которых (1) справедливо.[2]) Докажем следующее утверждение:

(У) *Если* $F_n \in \mathfrak{F}$, $C > 0$, $|F_n(x)| \leqq C$ $(n = 1, 2, \ldots; a \leqq x \leqq b)$ *и если* $F_n(x) \to F(x)$ *для всякого* $x \in \langle a, b \rangle$, *то* $F \in \mathfrak{F}$.

Действительно, в этом случае

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F_n(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y = \int_a^b F_n(x)\, \mathrm{d}p(x) \tag{11}$$

для $n = 1, 2, \ldots$ Так как последовательность $F_1, F_2, \ldots$ ограничена, имеем

$$\int_a^b F_n(x)\, \mathrm{d}p(x) \to \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x)\,. \tag{12}$$

Если положить $G_n(y) = \sum\limits_{f(x)=y} F_n(x)\, \varrho(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $G(y) = \sum\limits_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x)$ $(y \in E_1 - M)$, то, очевидно, $G_n(y) \to G(y)$ и $|G_n(y)| \leqq \sum\limits_{f(x)=y} |F_n(x)| \leqq Cq(y)$ для $y \in E_1 - M$, и, следовательно, для почти всех y. В силу неравенства $\int\limits_{E_1} Cq(y)\, \mathrm{d}y < \infty$ [см. (6)], получаем $\int\limits_{E_1} G_n(y)\, \mathrm{d}y \to \int\limits_{E_1} G(y)\, \mathrm{d}y$ или

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F_n(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y \to \int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y\,.$$

Отсюда и из (11), (12) следует, что $F \in \mathfrak{F}$. Этим доказано утверждение (У).

Так как $\mathfrak{F}$ содержит всякую линейную комбинацию своих элементов, то и всякая „ступенчатая" функция (т. е. линейная комбинация характеристических функций интервалов $I \subset \langle a, b \rangle$) принадлежит $\mathfrak{F}$. Нетрудно обнаружить, что всякая непрерывная функция может быть представлена в виде равномерного предела последовательности „ступенчатых" функций и, согласно утверждению (У), является также элементом системы $\mathfrak{F}$.

Пусть, далее, F — ограниченная функция, измеримая по отношению к функции p (p-измеримая). Существуют функции F_1, F_2 второго класса Бера такие, что $F_1(x) \leqq F(x) \leqq F_2(x)$ для каждого $x \in \langle a, b \rangle$ и что $\int_a^b F_i(x)\, \mathrm{d}p(x) = \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x)$ $(i = 1, 2)$[3]); очевидно можно предположить, что

---

[2]) Если функция F конечна, то сумма $\sum\limits_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x)$ имеет смысл для всякого $y \in E_1 - M$.

[3]) Существование функций F_1, F_2 вытекает, напр., из теоремы Витали-Каратеодоры (см. [2], стр. 75). Если же, однако, определим интеграл как в [1], то существование функций F_1, F_2 почти очевидно.

и функции F_1, F_2 ограничены. Так как непрерывные функции принадлежат $\mathfrak{F}$, то, в силу утверждения (У), $F_i \in \mathfrak{F}$ для $i = 1, 2$, и, следовательно,

$$\int\limits_{E_1}\Big(\sum_{f(x)=y} F_i(x)\,\varrho(x)\Big)\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b F_i(x)\,\mathrm{d}p(x) = \int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}p(x) \quad (i = 1, 2)\,.$$

Отсюда и из неравенств

$$\sum_{f(x)=y} F_1(x)\,\varrho(x) \leqq \sum_{f(x)=y} F(x)\,\varrho(x) \leqq \sum_{f(x)=y} F_2(x)\,\varrho(x)\,,$$

верных для почти всех $y \in E_1$, вытекает, что интеграл $\int\limits_{E_1}\Big(\sum\limits_{f(x)=y} F(x)\,\varrho(x)\Big)\,\mathrm{d}y$ существует и равен $\int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}p(x)$. Этим доказано, что $F \in \mathfrak{F}$.

Если F — произвольная неотрицательная p-измеримая функция, положим (для $n = 1, 2, \ldots$) $F_n(x) = \min(F(x), n)$ $(x \in \langle a, b\rangle)$ и $G_n(y) = \sum\limits_{f(x)=y} F_n(x)\,.$ $\varrho(x)$, $G(y) = \sum\limits_{f(x)=y} F(x)\,\varrho(x)$ $(y \in E_1 - M)$. Так как $F_n \in \mathfrak{F}$, имеем

$$\int\limits_{E_1} G_n(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b F_n(x)\,\mathrm{d}p(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{13}$$

Очевидные соотношения $F_n(x) \nearrow F(x)$ $(x \in \langle a, b\rangle)$, $G_n(y) \nearrow G(y)$ $(y \in E_1 - M)$ показывают, что $\int\limits_{E_1} G_n(y)\,\mathrm{d}y \to \int\limits_{E_1} G(y)\,\mathrm{d}y$, $\int\limits_a^b F_n(x)\,\mathrm{d}p(x) \to \int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}p(x)$. Согласно (13), равенство (1) справедливо также для функции F.

Возьмем теперь произвольную функцию F такую, что интеграл Лебега-Стильтьеса $\int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}p(x)$ существует; положим, как обычно, $F_+(x) = \max(F(x), 0)$, $F_-(x) = \max(-F(x), 0)$ $(x \in \langle a, b\rangle)$. Пусть, напр., $\int\limits_a^b F_+(x)\,.$ $\mathrm{d}p(x) < \infty$. Тогда и $\int\limits_{E_1}\Big(\sum\limits_{f(x)=y} F_+(x)\,\varrho(x)\Big)\,\mathrm{d}y < \infty$; следовательно, $\sum\limits_{f(x)=y} F_+(x)\,.$ $\varrho(x) < \infty$ для почти всех $y \in E_1$. Итак, сумма $\sum\limits_{f(x)=y} F(x)\,\varrho(x) = \sum\limits_{f(x)=y} F_+(x)\,\varrho(x) - \sum\limits_{f(x)=y} F_-(x)\,\varrho(x)$ имеет смысл для почти всех $y \in E_1$, так что (1) верно и для функции $F = F_+ - F_-$.

Этим полностью доказано наше предложение, касающееся формулы (1). Точно так же можно доказать формулу (2), если интеграл $\int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}n(x)$ существует. Формула (4а) [соотв. (3)] является суммой (соотв. разностью) формул (1) и (2).

Далее, из (0) и (4а) следует, что и формула (4б) справедлива (поскольку интеграл в правой части существует).

Пусть, наконец, Φ—функция на множестве $f(\langle a, b\rangle)$ такая, что правая часть в (5) имеет смысл. Согласно (3), будет

$$\int_{E_1} \Psi(y)\, dy = \int_a^b \Phi(f(x))\, df(x)\,, \tag{14}$$

где $\Psi(y) = \sum_{f(x)=y} \Phi(f(x))\, \eta(x)$. Если $y \in f(\langle a, b\rangle) - M$ такое, что сумма $\sum_{f(x)=y} \Phi(f(x))\, \eta(x)$ имеет смысл, то [см. (8)]

$$\Psi(y) = \Phi(y) \,.\, \sum_{f(x)=y} \eta(x) = \Phi(y) \,.\, \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}(f(b) - y) - \operatorname{sgn}(f(a) - y))\,;$$

если $y \in E_1 - f(\langle a, b\rangle)$, имеем, очевидно, $\Psi(y) = 0$. Следовательно,

$$\int_{E_1} \Psi(y)\, dy = \int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\, dy.$$

Отсюда и из (14) получаем (5).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. Mařík*, Lebesgueův integrál v abstraktních prostorech, Časopis pro pěst. mat., *76* (1951), 175—194.

[2] *S. Saks*, Theory of the integral, New York.

Výtah

TRANSFORMACE JEDNOROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo 27. II. 1956.)

Buď f spojitá funkce s konečnou variací v intervalu $\langle a, b\rangle$. Buďte p, n, v positivní, negativní a totální variace funkce f. Definujme v $\langle a, b\rangle$ funkce ϱ, $\varkappa$, η takto: Je-li $x \in (a, b)$ a roste-li (klesá-li) funkce f v bodě x, buď

$$\varrho(x) = \eta(x) = 1\,,\ \varkappa(x) = 0 \quad (\varrho(x) = 0\,,\ \varkappa(x) = 1\,,\ \eta(x) = -1)\,;$$

v ostatních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ buď $\varrho(x) = \varkappa(x) = \eta(x) = 0$. Buď F (resp. Φ) funkce definovaná na množině $\langle a, b\rangle$ (resp. $f(\langle a, b\rangle)$). Potom je pro skoro všechna $y \in E_1$ množina $f^{-1}(y)$ konečná a vztahy (1) až (5) jsou správné v tomto smyslu:

Jestliže existuje (konečný nebo nekonečný) Lebesgue-Stieltjesův integrál na pravé straně, má součet za integračním znamením na levé straně smysl pro skoro všechna $y \in E_1$, integrál na levé straně existuje ve smyslu Lebesgueově a rovná se integrálu na pravé straně.

Résumé

LA TRANSFORMATION DES INTÉGRALES SIMPLES

JAN MAŘÍK, Praha.

(Reçu le 27 Février 1956.)

Soit f une fonction continue à variation bornée dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$. Soient p, n, v les variations positive, négative et totale de la fonction f. Définissons les fonctions ϱ, $\varkappa$, η dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ de la manière suivante: Si $x \in (a, b)$ et si la fonction f est croissante (décroissante) au point x, posons

$$\varrho(x) = \eta(x) = 1\,,\ \varkappa(x) = 0\ (\varrho(x) = 0\,,\ \varkappa(x) = 1\,,\ \eta(x) = -1\,);$$

dans le reste de l'intervalle $\langle a, b\rangle$ soit $\varrho(x) = \varkappa(x) = \eta(x) = 0$. Soit F (resp. Φ) une fonction définie sur l'ensemble $\langle a, b\rangle$ (resp. $f(\langle a, b\rangle)$). Dans ce cas, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est fini pour presque chaque $y \in E_1$ et les relations (1) — (5) sont valables au sens suivant:

Si l'intégrale (finie ou infinie) au second membre existe au sens de Lebesgue-Stieltjes, alors la somme sous le signe de l'intégration au premier membre possède un sens pour presque tout $y \in E_1$, l'intégrale au premier membre existe au sens de Lebesgue et est égale à l'intégrale au second membre.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

RŮZNÉ

POZNÁMKA O POLYNOMECH S CELOČÍSELNÝMI KOEFICIENTY

BŘETISLAV NOVÁK, Chrudim.

Autor vyšetřuje polynomy, jejichž funkční hodnoty mají tvar $6m \pm 1$.

Je známo, že neexistuje polynom f, jehož funkční hodnota $f(n)$ by byla prvočíslem pro každé přirozené n. Protože se však mezi čísly $6m \pm 1$ při malém celém m vyskytuje jen malý počet složených čísel, lze očekávat, že polynom f, jehož všechny funkční hodnoty $f(n)$ (n celé) mají tvar $6m \pm 1$, bude nabývat mnoha prvočíselných hodnot. Všechny takové polynomy f s celými koeficienty lze snadno udat; platí totiž tato věta:

Buď $f(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$ polynom s celočíselnými koeficienty. Buď s celé číslo a nechť platí $f(j) \equiv \pm 1$ (mod 6) pro $j = s - 1, s, s + 1$. Potom je $f(n) \equiv \pm 1$ (mod 6) pro každé celé n.

Důkaz. Položme $g(x) = f(x) - f(s)$. Protože obě čísla $f(s - 1), f(s)$ jsou lichá, je číslo $g(s - 1) = f(s - 1) - f(s)$ sudé. Protože však také číslo $g(s)$ je sudé, je $g(n)$ sudé pro všechna n. Máme tedy $g(n + 3) \equiv g(n)$ (mod 2) i $g(n + 3) \equiv g(n)$ (mod 3); odtud plyne $g(n + 3) \equiv g(n)$ (mod 6) a tedy také $f(n + 3) \equiv f(n)$ (mod 6) po každé celé n. Protože $f(j) \equiv \pm 1$ (mod 6) pro $j = s - 1, s, s + 1$, je $f(n) \equiv \pm 1$ (mod 6) pro všechna celá n vůbec.

Poznáme tedy již na číslech $f(-1), f(0), f(1)$, zda platí $f(n) \equiv \pm 1$ (mod 6) pro všechna n či nikoli.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

1. Rozhodněte, zda každá nespočetná část E_m (resp. E_1) obsahuje řídkou nespočetnou část.

Jan Mařík, Praha.

2. Buď m celé > 1. Jestliže je $A \subset E_m$, $t \in E_1$, i celé, $1 \leqq i \leqq m$, buď A_t^i množina všech $x = [x_1, \ldots, x_{m-1}] \in E_{m-1}$, pro něž $[x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_i, \ldots, x_{m-1}] \in A$.

Rozhodněte, zda platí tato věta: Buď A řídká měřitelná množina v E_m. Nechť každá množina A_t^i ($i = 1, \ldots, m$, $t \in E_1$) má jen spočetně mnoho komponent. Potom má A míru 0.

Poznámka. Podle věty 1 z mého článku „Poznámka o řídkých množinách v E_m", který vyšel v loňském 3. čísle tohoto časopisu, platí věta pro $m = 2$.

Jan Mařík, Praha.

3. Je známo, že existují ordinální typy ξ té vlastnosti, že platí $\xi = \xi^n$ pro každé $n \geqq 1$; podobně existují ordinální typy ξ, pro něž ξ^n je různé od $\xi, \xi^2, \ldots, \ldots, \xi^{n-1}$ pro každé n. Rozhodněte, zda existuje ordinální typ ξ tak, že platí na příklad $\xi = \xi^3 + \xi^2$, nebo obecněji $\xi = \xi^n$, $n \geqq 3$, při čemž $\xi^i \neq \xi$ pro $i = 2, \ldots, n - 1$.

Poznámka. W. Sierpiński položil v [1] otázku, zda rovnost ordinálních typů $\alpha^2 = \beta^2$ implikuje, že $\alpha = \beta$. A. C. Davisová ukázala na elementárním příkladu*) $\alpha = \omega\eta$, $\beta = \alpha + \omega$, že tomu tak není; několik dalších výsledků je uvedeno v článcích [2], [3]. V [2] jsou dány další problémy: (a) Zda existují ordinální typy α, β takové, že platí $\alpha^2 = \beta^2$ a $\alpha^3 \neq \beta^3$? (b) Zda existují ordinální typy α, β takové, že platí $\alpha^2 \neq \beta^2$ a $\alpha^3 = \beta^3$?

Ukažme, že z kladného řešení našeho problému plyne řešení problémů (a), (b).

(a) Nechť existuje ordinální typ ξ takový, že $\xi = \xi^3 + \xi^2$. Položme $\alpha = \xi$, $\beta = \xi^2$. Pak je $\alpha^2 = \xi^2 = \xi^4 = \beta^2$, avšak $\alpha^3 = \xi^3 \neq \xi^2 = \xi^6 = \beta^3$.

(b) Existuje-li takové ξ, že $\xi^4 = \xi \neq \xi^2 \neq \xi^3$, pak pro $\alpha = \xi$, $\beta = \xi^2$ platí $\alpha^2 = \xi^2 \neq \xi^4 = \beta^2$, ale $\alpha^3 = \xi^3 = \xi^6 = \beta^3$.

Poznamenejme ještě, že pro uspořádaná kontinua je náš problém rozřešen záporně (viz. [4]).

*) Jako obvykle značí ω typ uspořádané množiny přirozených čísel, η typ množiny racionálních čísel.

LITERATURA

[1] Colloquium Mathematicum II, Wrocław, P74, 150.

[2] *W. Sierpiński*, M^{me} *A. C. Davis*: Sur les types d'ordre, Comptes Rendus, Tome *235*, N° 16, 850.

[3] M^{me} *A. C. Davis*: Sur l'équation $\xi^n = \alpha$ pour des types d'ordre, Comptes Rendus, Tome *235*, No 17, 924—926.

[4] *M. Novotný*: O podobnosti uspořádaných kontinuí typů τ a τ^ν, Časopis pro pěstování matematiky, *78* (1953), 59—60.

Karel Karták, Praha.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

REFERÁTY

O SPOJITÉ ZÁVISLOSTI NA PARAMETRU A JISTÝCH ZOBECNĚNÍCH V THEORII OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

(Vlastní referát o přednášce proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 3. prosince 1956.)

Dobře známou větu o spojité závislosti řešení obyčejné diferenciální rovnice na parametru zobecnili M. A. Krasnoselskij a S. G. Krejn tímto způsobem:

Nechť funkce $f_k(x, t)$ jsou definované a spojité pro $x \in G$ otevř. $\subset E_n$, $0 \leqq t \leqq T$, $f_k(x, t) \in E_n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ a nechť existuje jediné řešení $x_0(t)$ rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_0(x, t) \tag{1}$$

splňující počáteční podmínku $x_0(0) = x_0$ a nechť toto řešení je definované pro $0 \leqq t \leqq T$. Dále nechť $x_k(t)$ je řešení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f_k(x, t)\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

a nechť toto řešení je definované na intervalu $\langle 0, T\rangle$.

Věta 1. *Nechť jsou splněny tyto podmínky:*

α) $\int_0^t f_k(x, \tau)\,\mathrm{d}\tau \to \int_0^t f_0(x, \tau)\,\mathrm{d}\tau$ *pro* $k \to \infty$, $x \in G$, $t \in \langle 0, T\rangle$,

β) *funkce* $f_k(x, t)$ *pro* $k = 0, 1, 2, \ldots$, $t \in \langle 0, T\rangle$ *tvoří soustavu stejně spojitých funkcí proměnné* x,

γ) *funkce* $f_k(x, t)$ *jsou stejnoměrně ohraničené.*

Potom $x_k(t) \to x_0(t)$ *pro* $k \to \infty$ *stejnoměrně.*[1])

Protože platí γ), konvergence v podmínce α) je stejnoměrná. Věta 1 zůstane v platnosti, vypustíme-li předpoklad γ) a požadujeme-li, aby konvergence v podmínce α) byla stejnoměrná vzhledem k (x, t). Tento výsledek uveřejní přednášející společně se Z. Vorlem.

[1]) Viz *М. А. Красносельский и С. Г. Крейн*, О принципе усреднения в нелинейной механике, Успехи математических наук, *10*; *3* (1955), 147—152. Větu 1 cituji s nepodstatnými změnami. Autoři nezávadějí předpoklad, že funkce $f_k(x, t)$ jsou spojité v (x, t) a neprecisují, v jakém smyslu rovnice (1), (2) mají řešení. Jest na př. možné čísti citovanou práci s předpokladem, že při pevném k jsou splněny Carathéodoryho předpoklady pro existenci řešení rovnic (1), (2). Jak autoři uvádějí v poznámce, není třeba předpokládat, že funkce $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ jsou definovány na intervalu $\langle 0, T\rangle$, stačí pouze předpoklad o $x_0(t)$. O souvislosti věty 1 s přiblížením v průměru (принцип усреднения) lze se poučit v práci Krasnoselského a Krejna, kde je též uvedena starší literatura.

Všimněme si speciálně rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xk^{1-\alpha}\cos kt + k^{1-\beta}\sin kt = f_k(x, t)\,, \quad x(0) = 0 \quad (x \in E_1\,, \quad k = 1, 2, \ldots)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 = f_0(x, t)\,, \quad x(0) = 0\,. \tag{3}$$

Podle věty Krasnoselského a Krejna $x_k(t) \to 0$ skoro stejnoměrně pro $\alpha = \beta = 1$, $k \to \infty$. Z uvedeného výsledku přednášejícího a Z. Vorla plyne, že $x_k(t) \to 0$ skoro stejnoměrně pro $\alpha = 1$, $0 < \beta \leqq 1$. Přímým výpočtem snadno zjistíme, že $x_k(t) \to 0$ skoro stejnoměrně, jestliže $0 < \alpha \leqq 1$, $0 < \beta \leqq 1$, $\alpha + \beta > 1$. (Je-li však $\alpha + \beta = 1$, pak $x_k(t) \to -\frac{1}{2}t$ skoro stejnoměrně.) Naším cílem je objasnit příčiny podobných konvergenčních zjevů.

Nejdříve zavedeme zobecněný Perronův integrál. Nechť $\tau_* < \tau^*$. Množina $S \subset E_2$ patří do systému $\mathbf{S}$, jestliže ke každému $\tau \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle$ lze udat takové $\delta(\tau) > 0$, že $[\tau, t] \in S$ pro $t \in \langle\tau_*, \tau^*\rangle \cap (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$. Konečnou posloupnost $A = (\alpha_0, \tau_1, \alpha_1, \tau_2, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \tau_l, \alpha_l)$ nazýváme rozdělením intervalu $\langle\tau_*, \tau^*\rangle$, jestliže $\tau_* = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ $\ldots < \alpha_l = \tau^*$, $\alpha_0 \leqq \tau_1 \leqq \alpha_1 \leqq \tau_2 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \tau_l \leqq \alpha_l$. Říkáme, že rozdělení A intervalu $\langle\tau_*, \tau^*\rangle$ je podřízeno množině $S \in \mathbf{S}$ a píšeme $A \in \mathbf{A}(S)$, jestliže $(\tau_j, t) \in S$ pro $\alpha_{j-1} \leqq$ $\leqq t \leqq \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Vždy je $\mathbf{A}(S) \neq \emptyset$.

Nechť funkce $U(\tau, t)$ je definována na některé množině $S_1 \in \mathbf{S}$. Je-li $A \in \mathbf{A}(S_1)$, pak klademe $B(A) = \sum_{j=1}^{l} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})]$. Funkci U nazýváme *integrovatelnou*, lze-li ke každému $\varepsilon > 0$ udat takové $S \in \mathbf{S}$, $S \subset S_1$, že $|B(A)_1 - B(A_2)| \leqq \varepsilon$, jakmile $A_1, A_2 \in \mathbf{A}(S)$. Snadno lze ukázat, že v tomto případě existuje jediné číslo, které nazýváme *integrálem* z DU od τ_* do τ^* a označujeme $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU$ a které má tuto vlastnost: ke každému ε existuje takové $S \in \mathbf{S}$, $S \subset S_1$ že $|\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU - B(A)| \leqq \varepsilon$, jakmile $A \in \mathbf{A}(S)$. Pro $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU$ platí základní věty theorie integrálu a je-li speciálně $U(\tau, t) = f(\tau)\,\varphi(t)$, kde funkce $\varphi(t)$ má konečnou variaci $(-\infty < f(\tau) < \infty)$, potom $\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU$ existuje právě tehdy, existuje-li $\int_{\tau_*}^{\tau^*} f(\tau)\,\mathrm{d}\varphi(\tau)$ v Perronově smyslu; oba integrály jsou si potom rovny. Jestliže funkce $U(\tau, t) =$ $= (U_1(\tau, t), \ldots U_n(\tau, t))$ má hodnoty v E_n, pak klademe

$$\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU = \left(\int_{\tau_*}^{\tau^*} DU_1, \ldots, \int_{\tau_*}^{\tau^*} DU_n\right).$$

Nechť množina $R_{n+2} \subset E_{n+2}$ má tuto vlastnost: Jestliže $x \in E_n$, $(x, \tau, \tau) \in R_{n+2}$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že $(x, \tau, t) \in R_{n+2}$, jakmile $|\tau - t| < \delta$. Nechť funkce $F(x, \tau, t)$ je definovaná pro $(x, \tau, t) \in R_{n+2}$, $F(x, \tau, t) \in E_n$. Říkáme, že funkce $x(\tau)$ definovaná pro $\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$ je řešením *zobecněné diferenciální rovnice*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = DF(x, \tau, t)\,, \tag{4}$$

je-li $(x(\tau), \tau, \tau) \in R_{n+2}$ pro $\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$ a platí-li

$$x(\tau_4) = x(\tau_3) + \int_{\tau_3}^{\tau_4} DU\,, \quad U(\tau, t) = F(x(\tau), \tau, t) \tag{5}$$

pro všechna $\tau_3, \tau_4 \in \langle\tau_1, \tau_2\rangle$ [2]).

---

[2]) Přirozeně klademe $\int_{\tau_3}^{\tau_3} DU = 0$, $\int_{\tau_4}^{\tau_3} DU = -\int_{\tau_3}^{\tau_4} DU$.

Jestliže funkce $F(x, \tau, t)$ má parciální derivaci $\frac{\partial F}{\partial t} = f(x, t)$, která spojitě závisí na (x, t) a vůbec nezávisí na τ, potom každé řešení $x(\tau)$ zobecněné rovnice (4) je současně řešením rovnice $\frac{dx}{d\tau} = f(x, t)$ v obyčejném smyslu a naopak.

Buďte $\alpha_1, \beta_1, \sigma, K_1, K_2$ kladná čísla. Nechť symbol F znamená množinu funkcí $F(x, t)$, které jsou definované pro $x \in G$ otevř. $\subset E_n$, $t \in \langle 0, T \rangle$, $F(x, t) \in E_n$ a splňují podmínky $\|F(x, t_2) - F(x, t_1)\| \leq K_2 |t_2 - t_1|^{\beta_1}$ pro $x \in G$, $t_1, t_2 \in \langle 0, T \rangle$, $|t_2 - t_1| \leq \sigma$, $\|F(x_2, t_2) - F(x_2, t_1) - F(x_1, t_2) + F(x_1, t_1)\| \leq \|x_2 - x_1\| K_1 |t_2 - t_1|^{\alpha_1}$ pro $x_1, x_2 \in G$, $t_1, t_2 \in \langle 0, T \rangle$, $\|x_2 - x_1\| \leq 2K_2\sigma^{\beta_1}$, $|t_2 - t_1| \leq \sigma$. Předpokládejme, že $F(x, t) \in \mathsf{F}$, $\alpha_1 + \beta_1 > 1$. Funkci $x(\tau)$ nazýváme *regulárním* řešením zobecněné rovnice (4) na intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$, platí-li (5) pro všechna $\tau_3, \tau_4 \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ a existuje-li funkce $\sigma_2(\tau) > 0$, $\tau \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ taková, že $\|x(\tau_4) - x(\tau_3)\| \leq 2K_1 |\tau_4 - \tau_3|^{\beta_1}$ pro $\tau_3, \tau_4 \in \langle \tau_0 - \sigma_2(\tau_0), \tau_0 + \sigma_2(\tau_2) \rangle \cap \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$, $\tau_0 \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$.

Za těchto předpokladů platí:

1. *Je-li $x_0 \in G$, $\tau_0 \in \langle 0, T \rangle$, potom v nějakém okolí čísla τ_0 existuje regulární řešení $x(\tau_0)$ rovnice (4), $x(\tau_0) = x_0$.*

2. *Jestliže $F_k(x, t) \in \mathsf{F}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $F_k \to F_0$ stejnoměrně pro $k \to \infty$ a existuje-li jediné regulární řešení $x_0(\tau)$ rovnice $\frac{dx}{d\tau} = DF_0(x, t)$, $x(0) = x_0$, na intervalu $\langle 0, T \rangle$, potom pro všechna dosti veliká k existují řešení $x_k(\tau)$ rovnice $\frac{dx}{d\tau} = DF_k(x, t)$, $x(0) = x_0$, která jsou regulární na intervalu $\langle 0, T \rangle$. Tato řešení nemusejí být určena jednoznačně, ale v každém případě $x_k(\tau) \to x_0(\tau)$ stejnoměrně pro $k \to \infty$.*

Chceme-li těchto výsledků použít pro rovnici (3), položíme $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \min(\alpha, \beta)$ a dostáváme: $x_k(t) \to 0$ skoro stejnoměrně, jestliže $0 < \alpha_1 \leq 1$, $0 < \beta_1 \leq 1$, $\alpha_1 + \beta_1 > 1$, to znamená, jestliže $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$. Přirozeně každé řešení rovnice (3) má spojitou derivaci a je tedy regulární. Chování rovnice (3) není ovšem plně objasněno, neboť dostáváme dodatečnou podmínku $\alpha > \frac{1}{2}$.

Poznamenejme na konec, že dosažené výsledky lze interpretovat pomocí theorie distribucí. Nechť $F(x, t) \in \mathsf{F}$, $\alpha_1 + \beta_1 > 1$ a položme $\frac{\partial F}{\partial t} = f(x, t)$, kde derivaci bereme ve smyslu theorie distribucí. $f(x, t)$ je speciální distribuce při pevném x. Je-li funkce $y(\tau)$ definovaná pro $\tau \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle$, $y(\tau) \in G$ a platí-li

$$\|y(\tau_4) - y(\tau_3)\| \leq K|\tau_4 - \tau_3|^{\gamma}, \quad K > 0, \quad \gamma > 1 - \alpha, \quad \tau_4, \tau_3 \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle, \tag{6}$$

potom existuje integrál $\int_{\tau_0}^{\xi} DF(y(\tau), t) = g(\xi)$, $\tau_0, \xi \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ a závisí spojitě na ξ. Můžeme definovat dosazení funkce $y(\tau)$ za parametr x do $f(x, t)$ vztahem

$$f(y(\tau), \tau) = \frac{d}{d\xi} g(\xi).$$

Funkce $y(\tau)$ je řešením rovnice

$$\frac{dy}{d\tau} = f(y(\tau), \tau), \tag{7}$$

je-li splněno (6) a jsou-li distribuce na obou stranách rovnice (7) rovné. $y(\tau)$ je řešením rovnice (7) právě tehdy, je-li regulárním řešením rovnice (4).

Jaroslav Kurzweil, Praha.

RECENSE

Ivo Babuška, Karel Rektorys, František Vyčichlo: **Matematická theorie rovinné pružnosti.** Vydalo nakladatelství ČSAV, Praha 1955, 528 stran, cena 39 Kčs.

Tato kniha má splnit několik úkolů zároveň. Podává výklad o jedné z disciplin mechaniky, rovinné elasticitě, a to takový, že jsou v ní rozřešeny otázky existence a unicity základních problémů rovinné pružnosti, jakož i nalezeny numerické methody pro výpočet řešení těchto problémů, a to za předpokladů, které dobře vyhovují technické praxi. To vše nemá být na úkor srozumitelnosti a upotřebitelnosti pro techniky. Je možno říci, že tento úkol se podařilo autorům zvládnout. Pokud zbývají ještě některé závažné otázky rovinné elasticity, které nejsou v této knize řešeny, pak je to tím, že methodou N. I. Muschelišviliho, o níž možno bez nadsázky říci, že je dnes nejpropracovanějším a nejefektivnějším nástrojem rovinné elasticity, se zatím ani autorům ani komukoliv jinému tyto otázky nepodařilo uspokojivě rozřešit.

Knihu je možno hodnotit kladně ještě s jiného hlediska. Řešení problémů rovinné elasticity je prakticky totožné s řešením biharmonického problému v rovině. A tu s hlediska čistě matematického je kniha významným krokem vpřed v theorii parciálních diferenciálních rovnic.

Látka celé knihy je rozdělena do pěti kapitol. V první kapitole jsou definovány základní pojmy rovinné pružnosti, která je speciálním případem prostorové pružnosti, za předpokladu rovinné deformace nebo rovinné napjatosti; je to tensor deformace a tensor napětí. Jsou zde dále odvozeny základní diferenciální vztahy mezi těmito veličinami. Pozoruhodné na této kapitole je jednak to, že už zde jakož i nadále všechny definice, tvrzení a jejich důkazy jsou prováděny řečí matematickou, velmi jasně a promyšleně, jednak to, že jsou zde zavedeny základní pojmy elasticity přímo pro rovinný případ. To je cesta s hlediska matematického daleko schůdnější, než rigorosní zavedení těchto pojmů pro prostorovou pružnost. Přesné zavedení základních pojmů prostorové pružnosti je přibližně o tolik složitější ve srovnání s jejich zavedením v rovinné pružnosti, oč je těžší vyšetřování ploch ve srovnání s rovinnými křivkami.

Vůdčí idejí kapitoly druhé, jež je základním kamenem celého spisu, je vyjádření známé Airyho funkce napjatosti pomocí dvou analytických funkcí $\chi(z)$ a $\varphi(z)$ Goursatovým vzorcem $\operatorname{Re}(\bar{z}\varphi(z) + \chi(z))$ a vyjádření prvků napětí resp. deformace vzorcem N. I. Muschelišviliho resp. G. V. Kolosova. Podstatným přínosem autorů ve srovnání se známou knihou N. I. Muschelišviliho „Некоторые основные задачи математической теории упругости" je zobecnění prvního problému pružnosti (na hranici tělesa je dáno zatížení) a druhého problému pružnosti (na hranici tělesa je dáno posunutí) co do okrajových podmínek a vyšetřování nekonečných těles. První problém pružnosti, který v podstatě spočívá v nalezení tensoru napětí uvnitř tělesa, když na hranici je dáno zatížení, je dán tak zv. funkcí hlavního vektoru $f(s)$, jež je funkcí oblouku hranice oblasti. Funkce $f(s)$ má dvě spojité derivace až na konečný počet bodů. Ve výjimečných bodech s_k platí: $|f(s)| \leq \left|\frac{1}{s - s_k}\right|^{\frac{1}{2}-\alpha}$, $|f'(s)| \leq \left|\frac{1}{s - s_k}\right|^{\frac{3}{2}-\alpha}$, kde $\alpha > 0$. Na př. osamělé břemeno na hranici se projeví konečným skokem této funkce. O hranici oblasti se předpokládá, že její křivost má spojitou derivaci.

Uveďme zde definici prvního problému pružnosti pro konečná tělesa v plném znění: Budiž T konečné $m + 1$ násobně souvislé těleso ohraničené dostatečně hladkými křivkami $c_0, c_1, \ldots, c_m$. Budiž na hranici definována funkce hlavního vektoru $f(s)$ po částech dostatečně hladká. (Viz předchozí poznámky o chování funkce hlavního vektoru.) Pak prvním problémem theorie pružnosti nazýváme úlohu určit holomorfní funkce $\varphi(z)$, $\psi(z)$ definované na T a takové, že:

1. funkce $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\psi(z)$ a $F(z)$, $[F(z) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]$ jsou spojitě prodlužitelné na hranici s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů t_k $(k = 1, 2, \ldots p)$, v jejichž okolí se funkce $\varphi(z)$ a $F(z)$ chovají tak, že $|\varphi(z)| \leqq \left|\dfrac{1}{z - t_k}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}$, $|F(z)| \leqq \left|\dfrac{1}{z - t_k}\right|^{\frac{1}{2}-\beta}$, $\beta > 0$;

2. spojité prodloužení funkce $F(z)$ je všude (s výjimkou bodů t_k) na c_0 rovno funkci $f(s)$ a na c_k rovno $f(s) + \beta_k$, kde β_k jsou neurčené komplexní konstanty.

Analogicky zobecněna a formulována je definice druhého problému pružnosti. Zajímavé na těchto definicích jsou podmínky růstu funkcí $\varphi(z)$ a $F(z)$ v okolí výjimečných bodů. Ty jsou postačitelné k tomu, aby existovalo právě jediné řešení, jak je dokázáno v kapitole třetí, a aby nalezené řešení bylo limitou řešení jistých problémů pružnosti, jichž fysikální smysl je zřejmý. Nedbání podmínek růstu by mohlo vésti k naprosto falešným výsledkům. Tak na př. funkce $1 + \cos 2\Theta$ je Airyho funkce v polorovině $\operatorname{Re} z > 0$ „odpovídající" zatížení rovnému nule na její hranici.

Další náplní kapitoly druhé je zavedení typů nekonečných těles jakož i definice problémů pružnosti pro tato tělesa.

Kapitola třetí řeší existenční otázky a dává definitivní řešení otázek unicity. To se děje převedením problémů na integrální rovnici Muschelišviliho a Lauricelli-Šermanovu. Při tom hraje podstatnou roli ta okolnost, že křivost hraničních křivek má spojitou derivaci. V této kapitole však nejsou řešeny pouze otázky existence a unicity. Významným a novým je zde důkaz Saint-Venantova principu a vypracování numerických method. Jedna z nich je založena na dokázaném faktu, že řešení příslušné hraniční funkci $f_1(s)$ a řešení příslušné hraniční funkci $f_2(s)$ se od sebe libovolně málo liší, pokud integrál $\int_0^l |f_1(s) - f_2(s)|\, ds$ je dostatečně malý. Zde l je délka hranice. Jiná methoda je tak zv. Schwarzův algoritmus, který fysikálně je založen v podstatě na Saint-Venantově principu. Matematicky je to vhodně upravená methoda postupných aproximací. K ilustraci numerických method jsou zde uvedeny příklady.

Kapitola čtvrtá je věnována užití konformního zobrazení na řešení dříve definovaných problémů. Ve srovnání s výše připomenutou prací N. I. Muschelišviliho nepřináší tato kapitola celkem nic nového. Tato methoda má do jisté míry soběstačný charakter, neboť za poněkud silnějších předpokladů o hraničních funkcích se pomocí ní dají rozřešit otázky existence. To je mimo jiné také náplní kapitoly čtvrté. S hlediska vývoje theorie biharmonického problému je tato methoda jednou z nejstarších a byla s úspěchem užita N. I. Muschelišvilim již v roce 1931—1932.

Dále je ukázáno, že jestliže konformní zobrazení vyšetřované jednoduše souvislé oblasti na jednotkový kruh je dáno racionální funkcí, potom lze nalézti řešení definovaných problémů v konečném tvaru.

Kapitolou pátou vycházejí autoři vstříc především čtenářům technikům a vykládají v ní potřebné partie z theorie funkcí komplexní proměnné a integrálních rovnic.

Za nedostatek této knihy považuji, že v ní nebyly řešeny problémy pružnosti v oblastech s úhlovými body. Jediná práce, která je mi známa a jež pojednává o tomto problému, je práce L. G. MAGNARADZEHO „Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками (Труды Тбилисского математического института *IV*, 1938, 43—76). Ta se opírá o práce J. RADONA a T. CARLEMANA, které jsou staršího data. Moderní přístup k tomuto problému by byl nejvýše užitečný.

V knize je dosti tiskových chyb, které při pozorném čtení je možno velmi lehce objevit. Tak na příklad na str. 277 je místo $\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f_n(t)\, t^{p-1}\, \mathrm{d}t$ nesprávně $\int_{f_n}^{\beta_n} f_n(t)\, t^{p-1}\, \mathrm{d}t$.

Závěrem je možno konstatovat: Kniha je podstatným doplněním výsledků školy N. I. Muscheliśviliho a dává efektivní methody numerické, pomocí nichž možno vypočítat technicky důležité případy až do konce. Tyto methody nejsou bohužel vždy jednoduché. Nemůžeme však očekávat jednoduché výpočty tam, kde popisované fysikální jevy jsou kvalitativně složité. O úspěchu knihy svědčí nejlépe to, že je překládána do němčiny a vyjde v NDR.

Jindřich Nečas, Praha.

Karel Havlíček: **Úvod do projektivní geometrie kuželoseček.** Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1956, stran 216, obrázků 203, náklad 2700, cena Kčs 32,20.

Podle autorovy předmluvy je knížka určena především studentům vysokých škol technického směru a dále pracovníkům v technických kancelářích. Autor se vypořádal s úkolem daným tímto účelem knihy velmi dobře. Kniha má proto formu učebnice pro samouky a celý výklad je přizpůsoben potřebám techniků.

Projednávaná látka je rozvržena do pěti kapitol. Kapitola I, „Úvahy přípravné“, obsahuje populární úvod, což vzhledem k tomu, že se na našich jedenáctiletkách v nedávné době kuželosečky téměř vůbec neprobíraly (a deskriptivní geometrie se začíná teprve nyní postupně zavádět), je z důvodů methodických docela na místě. Je proto čtenář napřed seznámen i s některými elementárními vlastnostmi kuželoseček, které jsou pak v pozdějším výkladu ukázány v projektivním pojetí. Tato kapitola obsahuje dále odstavec o průmětu kružnice, o incidenci, o dělicím poměru a dvojpoměru, zavádějí se tu nevlastní elementy, dokazuje se věta Pappova a uvádějí se její důsledky, vykládá se princip duality v projektivní rovině; je ukončena výkladem vlastností úplného čtyrrohu a úplného čtyrstranu.

V kapitole II, „Projektivnost útvarů jednoparametrických“, zavádějí se jednoparametrické lineární útvary, útvary perspektivní a projektivní, ukazuje se doplňování projektivních útvarů, existence samodružných prvků soumístných útvarů a pojednává se o involuci, úběžnících, řadách podobných a shodných a o shodných svazcích; je ukončena pojmem pravoúhlé involuce.

Projektivní theorie kuželoseček vyvrcholuje v kapitole III, kde zejména výklad polarity poskytuje čtenáři jednoduchý prostředek k zvládnutí theorie i praxe kuželoseček. Polarita je odvozena z vlastností involuce. V této kapitole je čtenář také seznámen s užitečností důležité složky projektivní geometrie, s principem duality. Dualisaci příslušných úvah provádí však autor podrobně jen na některých místech (na př. v článku 23 a 24), jinak uvádí pouze výsledky a důkazy přenechává čtenáři. Pro studujícího to znamená většinou snadné cvičení a autor tak současně ušetří značně na rozsahu knihy. Tato kapitola obsahuje dále projektivní vytvoření kuželosečky (bodové a tečnové), zavádějí se tu jednoparametrické kvadratické útvary, provádí se konstrukce samodružných prvků a doplňování projektivnosti soumístných útvarů, konstrukce průsečíků přímky s kuželosečkou a konstrukce tečen z bodů ke kuželosečce; dokazuje se věta Pascalova a Brianchonova a ukazuje se aplikace těchto vět, zavádí se involuce na kuželosečce, probírají se polární vlastnosti kuželoseček a uvádějí se konstrukce založené na polaritě; kapitola je ukončena úvahami o svazku a řadě kuželoseček s příslušnými aplikacemi v konstrukcích.

Ve výkladu této kapitoly byly vynechány takové konstrukce kuželoseček, které se prakticky málo vyskytují, a u jednotlivých konstrukcí nejsou dále většinou uváděny podmínky určenosti kuželosečky. Autor tak učinil úmyslně, jak říká v doslovu k této kapitole, neboť se domnívá, že by příslušnou diskusí v tomto směru jednak vzrostl příliš rozsah knihy, jednak by se příliš zkomplikoval výklad. Vzhledem k účelu knihy je tento názor autora zcela správný, neboť čtenář si může ve většině případů provést příslušnou diskusi sám.

Kapitola IV, „Konstrukce kuželoseček“, obsahuje odstavce jednající o rozdělení kuželoseček, o asymptotách a středu kuželosečky, o průměrech kuželosečky, o dalších vlastnostech involuce, o osách kuželoseček, o ohnisku kuželosečky a hovoří se tu o dalších vlastnostech polárního trojúhelníku a uvádějí se elementární konstrukce kuželoseček. Kapitola je ukončena články jednajícími o kuželosečce Apolloniově (souvisící s problémem normál), o parabole Steinerově-Pelzově a o konstrukci kružnic křivosti.

V poslední V. kapitole, „Kolineace a afinita“, se autor zabývá v podstatě konstrukcemi kuželoseček na základě jejich kolineárního vztahu ke kružnici a konstrukcemi elipsy vyplývajícími z jejího afinního vztahu ke kružnici. Jsou tu články jednající o středové kolineaci, o kolineaci kružnice a kuželosečky, o užití kolineace k řešení úloh o kuželosečkách, o afinitě kružnice a elipsy. Kapitola je zakončena článkem o kuželosečkách homothetických.

Autorovy výklady se opírají o vrozenou geometrickou představivost studujícího a nevšímají si logických základů projektivní geometrie. Toto autorovo pojetí vyplývá z jeho názoru na nejvýhodnější vyučování geometrie, je-li čtenářem nebo studujícím technik. Autor má mnohaleté pedagogické zkušenosti, pracoval dlouho s různými studenty a proto může plným právem tvrdit, že není výhodné učit technika projektivní geometrii budováním projektivní geometrie na základě soustavy axiomů, protože se fakticky žádný začátečník ještě nenaučil geometrii pouhými logickými dedukcemi z axiomů. Protože bez samostatného provedení konstruktivních úloh by učebnice geometrie pro technika mnoho neznamenala, je kniha téměř za každým článkem doplněna řadou úloh a cvičení velmi pečlivě vybraných, aby po jejich vypracování zvládl čtenář dokonale předcházející látku nebo si tuto látku dokonce doplnil. Z toho důvodu je kniha i velmi dobrým doplňkem theoretického vzdělání studentů matematiky na vysokých školách jiného směru než technického, neboť poskytuje procvičení na praktických konstrukcích.

Způsob podání celé látky vyrůstá z naší geometrické tradice. Při důkazech pouček se snažil autor omezit abstraktní pojmy na minimum, aby tak technikovi ulehčil studium co nejvíce. Pro zájemce jsou však uváděny odkazy na příslušnou literaturu, která je souhrnně uvedena na konci knihy. Důkazy jsou vedeny většinou metodami synthetické geometrie. Při důkazech, jež nelze podat syntheticky, je čtenář odkazován na geometrii analytickou. Celá knížka se zabývá pouze vlastnostmi reálných kuželoseček. Je doplněna řadou pečlivě provedených a názorných obrázků.

V době, kdy jsou již dávno rozebrány učebnice projektivní geometrie jako na př. Weyrova, Jarolímkova, Procházkova, učebnice Kadeřávka-Klímy-Kounovského, a kdy se tato disciplina geometrie uvádí v menších nebo větších částech v nejrůznějších učebních textech vysokých škol, přichází Havlíčkova kniha velmi vhod. Je napsána velmi srozumitelně, podává ucelený výklad nejdůležitějších vlastností kuželoseček a obsahuje hlavně řešení praktických úloh a popis typických konstrukcí. Přinese jistě velký užitek studentům našich technik, studentům matematiky, i technikům.

Bořivoj Kepr, Praha.

N. A. Kilčevskij: **Základy tensorového počtu a jeho použití v mechanice.** Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1956, náklad 3500, 1. vydání, stran 148, obrázků 16, cena brož. Kčs 12,45.

Knížka je rozdělena do čtyř kapitol, z nichž první dvě jsou věnovány theoretické přípravě pro třetí a čtvrtou kapitolu, které obsahují příklady z mechaniky soustav hmotných bodů a mechaniky kontinua.

V první kapitole jsou vyloženy *základy vektorového počtu.* V první části po definici pojmu skaláru a vektoru je uvedeno sčítání (a odčítání) vektorů a oba důležité součiny vektorů, skalární a vektorový. Pro tyto součiny jsou odvozeny jejich základní vlastnosti (zvláště z nich plynoucí kolmost, příp. kolineárnost vektorů), dále vzorce pro smíšený součin a dvojný vektorový součin. Velmi instruktivně je objasněna okolnost, že ve vektorové algebře neexistuje inversní operace ke skalárnímu, příp. vektorovému násobení. Použití pravoúhlé kartézské souřadnicové soustavy umožňuje složkové vyjádření každého vektoru, příp. průvodiče bodu. V tomto vyjádření je uveden součet n vektorů, skalární a vektorový součin. Druhá část této kapitoly je věnována vektorové analyse, a to pouze derivaci vektoru, derivaci vektorového součinu a velmi stručně integrování vektorové funkce a integrálu vektorového součinu.

Druhá kapitola vykládající základy tensorového počtu je rozdělena do tří částí. V první části je zaveden pojem *tensoru.* Nejdříve jsou definovány kontravariantní a kovariantní složky vektoru a vztahy mezi složkami téhož vektoru ve dvou různých kartézských souřadnicových soustavách, což umožňuje podání úplné analytické definice vektorové veličiny. Je podstatné, že je ukázáno, že geometrická definice vektoru je ekvivalentní s definicí analytickou. Důležité je zavedení (první) základní kvadratické formy, jejíž koeficienty g_{ik} určují metriku uvažovaného prostoru, určení koeficientů g^{ik} a jejich vztahu ke koeficientům základní formy. Tyto koeficienty jsou použity při stanovení závislosti mezi kontravariantními a kovariantními složkami téhož vektoru. Pomocí kontravariantních a kovariantních složek vektorů jsou definovány nejjednodušší tensory, t. zv. multivektory. Z výkladu proto plyne, že také absolutní skaláry a vektory patří k tensorům. Tím je dána možnost zavést obecnou definici tensorů, jejichž složky jsou podřízeny danému zákonu transformace při přechodu z jedné souřadnicové soustavy do druhé, při čemž tento zákon je týž pro všechny tensory. Koeficienty g_{ik} základní formy, příp. z nich odvozené veličiny g^{ik}, $g^{i}_{.k}$ tvoří složky nejdůležitějšího kvadratického tensoru (t. zv. metrického tensoru). Dále je ukázána invariantnost symetrie, příp. antisymetrie tensoru druhého řádu a důležitá věta o ekvivalenci takového antisymetrického tensoru s vektorem (příp. pseudovektorem). V druhé části zabývající se tensorovou algebrou je nejprve pojednáno o základních operacích s tensory (sčítání a násobení), o permutaci indexů a o t. zv. úžení tensorů. Pak je proveden rozklad obecného tensoru druhého řádu na symetrickou a antisymetrickou část, je zaveden pojem symetrisace a alternace a ukázáno, že každý tensor lze vyjádřit jako součet multivektorů. Další operace, t. zv. snižování a zvyšování indexů, je prováděna pomocí metrického tensoru. Po důležité poznámce o vztahu mezi tensory a algebraickými plochami je uvedena další analytická definice tensoru a proveden výklad rovnic $x'^{i} = A^{i}_{.j}x^{j}$ (příp. $x'_{k} = A^{j}_{.k}x_{j}$, $i, j, k = 1, 2, 3$), které definují buď bodové transformace souřadnic nebo (afinní) transformaci (pohyb) prostoru. Jako příklad je uveden operátor otočení (versor), který jednak určuje orthogonální transformaci, jednak pohyb, který zachovává délky a jimi sevřené úhly; pak je provedena jeho konstrukce, je-li dán pohyb tuhého tělesa. Závěrem této části je pojednáno o křivočarých souřadnicích v trojrozměrném prostoru a určeny koeficienty v transformačních rovnicích. Krátce jsou uvedeny základní pojmy pro prostor n-rozměrný.

Třetí část, která je v podstatě nejdůležitější částí celé této kapitoly, a lze říci, že i celé knížky, pojednává o tensorové analyse. Po definici absolutního diferenciálu vektoru jsou odvozeny Christoffelovy symboly druhého druhu a z nich pak symboly prvního druhu a je ukázáno, že tyto symboly nejsou tensorové veličiny. Po vyšetřování absolutního diferenciálu tensoru libovolného řádu a struktury je zaveden t. zv. paralelní přenos tensoru v křivočarých souřadnicích a podán důkaz, že v zobecněném smyslu je metrický tensor konstantní. Při hledání takové podmínky pro složky metrického tensoru g_{ik}, aby metrika byla eukleidovská, je odvozen Riemann-Christoffelův tensor křivosti. Anulování tohoto tensoru $R_{\lambda\nu\mu}^{\cdot\cdot\cdot j}$ čtvrtého řádu je nutná a postačující podmínka pro existenci eukleidovské metriky v prostoru. Při vyšetřování tensorových polí je určena kovariantní (absolutní) derivace vektoru, příp. tensoru řádu r a uvedeny její základní vlastnosti. Nyní lze už zavést další, pro aplikace důležité pojmy: gradient skalární funkce, divergence a rotace vektoru a t. zv. Hamiltonův operátor ∇ a Laplaceův operátor ∇^2. Užitím integrálních vět jsou definovány nezávisle na volbě souřadnicové soustavy pojmy: gradient, divergence a rotace vektoru a stanoveny další pojmy, a to tok vektoru danou plochou a cirkulace vektoru. Tato část končí poznámkou o orthogonálních křivočarých souřadnicích, kde se zjednodušují vztahy pro metrický tensor a Christoffelovy symboly.

Třetí kapitola obsahuje užití vyložené látky na *mechaniku bodových soustav*. Úvodem jsou stanoveny pohybové rovnice volného hmotného bodu v křivočarých souřadnicích, které jsou pak zvlášť studovány v cylindrických a sférických souřadnicích. Pak je vyšetřena reakce při pohybu vázaného hmotného bodu po dané ploše a jeho setrvačný pohyb. Protože trajektorie bodu má vlastnost, že jednotkové vektory tečen k trajektorii v různých jejích bodech jsou rovnoběžné v zobecněném smyslu, je tato trajektorie t. zv. geodetická křivka. Úvahy jsou pak rozšířeny na určení pohybových rovnic vázané soustavy hmotných bodů v křivočaré souřadnicové soustavě za předpokladu stacionárních ideálních geometrických vazeb a ukázáno, že pohybové rovnice jsou totožné s Lagrangeovými diferenciálními rovnicemi druhého druhu. Provedení počtu ukazuje, že danou úlohu lze rozdělit na dvě, na úlohu určení pohybového zákona a úlohu určující reakce vazeb. Předešlé úvahy jsou užity na stanovení pohybových rovnic fysického kyvadla. Po zavedení t. zv. anholomních souřadnic jsou studovány pohybové rovnice anholonomních soustav, t. j. soustav bodů, které jsou podrobeny lineárním neintegrovatelným vazbám. Závěr kapitoly tvoří zcela jednoduché aplikace dynamiky tuhého tělesa, kde jsou odvozeny smíšené složky tensoru setrvačnosti s jeho vlastnostmi, dále elipsoid setrvačnosti (s hlavními osami setrvačnosti) a napsány Eulerovy dynamické rovnice v kosoúhlé kartézské souřadnicové soustavě.

Čtvrtá kapitola je věnována studiu mechaniky deformovatelných těles (spojitých prostředí) pomocí tensorového počtu. Nejdříve jsou uvedeny obecné rovnice rovnováhy a pohybové rovnice spojitých prostředí s odvozením tensoru kinetických napětí. Pohybové rovnice jsou stanoveny bez ohledu na fysikální podstatu spojitého prostředí. Tyto rovnice však neurčují napětí, rychlosti a hustoty jeho prvků, jsou-li dány deformující síly; pak je totiž neznámých funkcí více než rovnic a je třeba přidat dodatečné rovnice. K tomu se určuje vektor posunutí a dva tensory; tensor malých deformací a tensor rychlosti deformace, které jsou symetrickými tensory druhého řádu. Rovněž je zaváděn tensor konečných deformací, který je pro malá posunutí roven tensoru malých deformací. Při dané metrice deformovaného prostředí lze pak odvodit podmínky pro existenci funkcí, umožňující přechod do eukleidovské metriky. Tyto podmínky (šest rovnic) určují bodovou transformaci a pro malé deformace theorie pružnosti jsou známy pod pojmem Saint-Venantových podmínek kompatibility. Při vyšetřování pohybu vazké kapaliny za předpokladu, že je isotropní a homogenní, dále že symetrické tensory druhého řádu napětí a rychlostí deformace mají totožné hlavní osy, lze napsat pohybové rovnice v invariantním tvaru (t. zv. Navier-Stokesovy rovnice). Hledáme-li základní rovnice theorie pružnosti pružného tělesa, získáme pro neisotropní těleso tensor pružnosti čtvrtého řádu, který má maximálně 21 nezávislých složek. Pro případ isotropního a homogenního tělesa podrobeného malým deformacím jsou určeny t. zv. Laméovy rovnice. Protože funkce kinetických napětí umožňují vyjádření složek tensoru kinetických napětí, nepůsobí-li objemové síly, je uveden algoritmus pro jejich zavedení a řešeny dva příklady (úloha statická s odvozením Maxwellových vzorců a nejjednodušší dynamická úloha se stanovením Airyho vzorců). Závěr knihy tvoří aplikace na theorii malých pružně plastických deformací a je ukázáno, že získané rovnosti lze považovat za zobecnění Hookova zákona.

Překlad Kilčevského knížky je třeba považovat za velký přínos pro pracovníky ve výzkumu i v konstrukci, protože formou velmi stručnou, avšak velmi přehlednou a názornou jsou tu vyloženy základy tensorového počtu, jehož praktické užití je velmi široké. Je dobře, že autor aplikoval tyto základy na příklady z jednoho technického oboru a nesnažil se podat užití ve všech možných disciplinách, protože mohl ve zvolené partii jít do větší hloubky a nevznikla tříšť příkladů. Výklad v knize přes zmíněnou již stručnost je veden snahou po pokud možno největší přesnosti. Je třeba poznamenat, že i ve vykládaných aplikacích se látka rozšiřuje. Překlad sám je proveden dobře, také úpravě knížky byla věnována příslušná péče a bylo by proto záhodno, aby knihu studovali všichni ti, kterým je určena, a aby také tensorového počtu ve větší míře používali.

Karel Drábek, Praha.

Leonard J. Savage: **The Foundations of Statistics.** John Wiley & Sons, New York 1954, stran XV + 294.

Kniha obsahuje autorovo osobní (není zatím jiných) pojetí *základů statistiky*. Savageovo pojetí má dva základní rysy:

1. statistika je teorie rozhodovacích funkcí a 2. pravděpodobnost se interpretuje subjektivisticky. Podrobněji můžeme říci, že statistika je normativní disciplinou studující pravidla rozhodování v jistých situacích. Normy, jež statistika dává, nejsou úplné, t. j. nepředpisují obecně v dané situaci jediné řešení. Ke skutečnému výběru jednoho rozhodnutí je třeba, aby rozhodující se jedinec měl svoje vlastní pravidla. Statistika má pak uchránit od používání nevhodných pravidel; alespoň pro toho, jenž uznává vhodnost základních axiomů statistiky, je nedůsledné používati pravidel rozhodování, která nevyhovují normám z přijatých axiomů vyplývajícím. Statistikou ve vlastním slova smyslu se pak nazývá teorie zabývající se rozhodováním ne jedince, ale souhrnu více jedinců.

Je třeba již nyní připomenout, že se autor neomezuje jen na výklad svého stanoviska, avšak konfrontuje a srovnává je s jinými stanovisky, zejména pak s objektivistickým. Zajímavé je, že autor v diskusních částech své knihy podal podrobnější a přesnější výklad objektivistického stanoviska, než jsem doposud našel u statistiků, kteří jsou přesvědčenými objektivisty.

Přistoupíme k podrobnějšímu popisu knihy. V autorově pojetí formálním objektem statistiky jsou: Množina S, jejíž elementy jsou nazývány *stavy* (stavy přírody); *jevy*, což jsou části množiny S; množina *důsledků* F; funkce definované na S s hodnotami v F, které se nazývají *rozhodnutí* (autor používá slova acts; je-li f rozhodnutí, pak $f(s)$ pro $s \in S$ má význam důsledku rozhodnutí f v případě, že stav přírody je s). Množina všech rozhodnutí je uspořádána relací $\leqq$. Od S, F, $\leqq$ se vyžadují některé další vlastnosti zformulované do sedmi postulátů, z nichž prvý požaduje, aby $\leqq$ bylo prosté uspořádání. Interpretace množin S a F je zřejmá. Pokud se týče pojmu rozhodnutí, jedná se o abstrakci: V reálném modelu mimo jiné určuje každé rozhodnutí pro každý stav přírody důsledek; v abstraktním modelu toto přiřazení se ztotožňuje s rozhodnutím. Relace $f \leqq g$ se interpretuje takto: Rozhodnutí f není dávána přednost před rozhodnutím g.

Subjektivismus autorův je dán samozřejmě nikoliv matematickým modelem, ale jeho interpretací. Subjektivismus autorovy interpretace spočívá v tom, že relace $\leqq$ se interpretuje jako subjektivní pravidlo jednotlivce pro výběr rozhodnutí. Model připouští ovšem i jiné, nesubjektivistické interpretace, podobně, jako je tomu u axiomatiky Kolmogorovovy. Tak na příklad mohou být prospěšné snaze podat objektivistickou interpretaci pojmu pravděpodobnosti tyto autorovy úvahy: Z relace $\leqq$ mezi rozhodnutími se odvozuje relace $\leqq$ mezi jevy, při čemž $A \leqq B$ se čte: A není pravděpodobnější než B. Relace $\leqq$ se nazývá kvalitativní pravděpodobnost. Ukazuje se, že za jistých předpokladů existuje *pravděpodobnostní míra* (aditivní), definovaná na všech jevech tak, že $P(A) \leqq P(B)$ platí tehdy a jen tehdy, když $A \leqq B$. Obdobně se dále dokáže, že existuje (až na lineární transformaci) právě jedna reálná funkce U definovaná na množině všech důsledků F taková, že pro libovolná dvě rozhodnutí f, g je $f \leqq g$, když a jen když $EU(f) \leqq EU(g)$.[1])

Vzhledem k tomuto tvrzení je možno v knize dále předpokládat, že $U(f) = f$, takže pak rozhodnutí jsou reálné funkce na S a $f \leqq g \Leftrightarrow Ef \leqq Eg$ (kap. 1—5).

V dalších dvou kapitolách je studován důležitý speciální případ rozhodovacího problému, v němž jsou rozhodnutí volena na základě *pozorování* náhodných proměnných. Různé běžné statistické pojmy jako sufficience, podíly věrohodností, sekvenční testy jsou zde studovány s jednotného hlediska maximálního očekávaného užitku.

V kapitole 8 počíná se autor zabývat t. zv. *multipersonálním problémem*, v němž rozhodnutí má učinit skupina lidí, z nichž každý má případně jinou subjektivní pravděpodobnost. Z kontextu pak vyplývá, že za nejdůležitější a typickou situaci se považuje ta, v níž různé subjektivní pravděpodobnosti se liší pouze tím, co bývá obvykle nazýváno *apriorní pravděpodobnosti*. V multipersonálním problému není již volba rozhodnutí tak jednoduchá; jedno z možných řešení je *minimax*.

Minimaxové teorii jsou pak věnovány tři kapitoly. Nelze zde podat podrobný popis těchto kapitol; všimneme si pouze autorovy diskuse pojmu ztráty. Autor se staví proti pojetí ztráty jako záporného zisku a navrhuje definovat (zhruba řečeno) ztrátu při rozhodnutí a a stavu přírody s jako rozdíl mezi maximálním možným ziskem za stavu s a ziskem plynoucím z rozhodnutí d za stavu s. Velmi zdařilou a užitečnou je kapitola 11, jež vymezuje paralelismus mezi rozhodovacími problémy na jedné a teorií her na druhé straně; správně je zde ukázáno, že důvody pro užití minimaxu v teorii her nemohou být použity ve statistice.

V kapitole 12 jsou uvedeny některé důležité matematické věty minimaxové teorie a v kapitole 13 jsou diskutovány výtky proti teorii minimaxu.

Kapitola 14 souvisí úzce s kap. 6 a všímá si principu minimaxu aplikovaného na problémy, v nichž je volba rozhodnutí založena na pozorování.

V posledních třech kapitolách se studují a konfrontují běžná a navrhovaná kriteria týkající se bodových odhadů, testů a intervalových odhadů s aspekty rozhodovací teorie

[1]) E značí očekávanou hodnotu.

v knize vybudované. Celá kniha je prostoupena odstavci, případně i kapitolami, kde se uvažuje vztah stanoviska autorova k jiným, zejména objektivistickým stanoviskům. Jsou diskutovány námitky proti oběma pojetím.

Tím jsem skončil stručný výklad o obsahu knihy; obávám se však, že obraz, jejž je možno si z tohoto výkladu učinit, je velmi nedokonalý. Pokusím se doplnit jej několika poznámkami, které budou však již silně ovlivněny mými vlastními stanovisky.

Zdá se, že mnozí čtenáři budou nakloněni uvažovat asi takto: „Tato kniha je založena na subjektivistickém pojetí pojmu pravděpodobnosti. Protože takové pojetí je pro mne zásadně nepřijatelné (nebo je pokládám za zásadně neschopné zakládat vědeckou disciplínu), nemohu použít ani důsledků, jež autor obdržel, a celý výklad knihy je pro mne bezcenný." Domnívám se, že takovýto názor by nebyl správný. V diskusních částech je velmi často podrobně uvedeno stanovisko objektivistické; při výkladu minimaxové teorie je tento výklad vůbec nejprve podán s hlediska objektivistického a teprve později je přikročeno k subjektivistické reinterpretaci. Podobně mnohé úvahy (ne ovšem všechny) pronesené autorem subjektivistickým jazykem lze reinterpretovat objektivisticky. Autorův subjektivism je v podstatě, myslím, různý od striktního subjektivismu, o němž je pouze zmínka na straně 51.

Pokud však mluvíme o subjektivistickém pojetí, tak jak je vyjádřeno sedmi autorovými postuláty a autorovou interpretací těchto postulátů, pak jediný postulát, jenž bude (ne vždy) odporovat pojetí objektivistickému, je předpoklad P1 existence relace na širším souboru, než připouštějí objektivisté. Z tohoto předpokladu pak plyne jednoduchost řešení rozhodovacího problému pro jednu osobu (to je dáno právě relací $\leq$), kdy je situace analogická jako při znalosti „apriorní pravděpodobnosti".

Při studiu multipersonálního problému se analogie mezi subjektivistickým a objektivistickým pojetím zvětšuje; jistý rozdíl ovšem je patrný a projevuje se, myslím, i v Savageově pojetí ztráty. Tato ztráta je závislá na skupině uvažovaných rozhodnutí; ta je přirozeným způsobem definována v subjektivistickém multipersonálním problému, zatím co v případě objektivistického rozhodovacího problému tomu tak není.

V objektivistickém rozhodování problému Savageovo pojetí ztráty odstraňuje některé možné nepříjemnosti, jiné však s sebou přináší. (Viz články *Roy Radner* and *Jacob Marschak*: Note on some proposed decision criteria, 61—68; *J. Milnor*: Games against Nature, 49—59; obě práce ve sborníku *Thrall, Coombs, Davis*: Decision processes, John Wiley, New York 1954.)

Konečně bych si chtěl povšimnout zamítavého stanoviska, které autor zaujímá k intervalovým odhadům. Souhlasím, že tam, kde jde o rozhodování v užším, praktickém slova smyslu, bude velmi zřídka vhodné použíti intervalového odhadu. Na druhé straně se domnívám, že tyto odhady mohou být velmi užitečné pro shrnutí experimentálních výsledků při teoretických výzkumech a pod. Autor si této druhé možnosti též všímá, avšak říká, že v tomto případě je lépe uvést místo odhadů prostě nějakou sufficientní statistiku; to by ovšem mohlo být dobré, kdyby každý čtenář byl schopen konstruovati pro svůj problém vhodnou rozhodovací funkci. Tomu tak zatím není; zde zřejmě vede k absurdnosti konvence jinde užitečná, abstrahovat při hodnocení rozhodovacích funkcí od potíží a nákladů spojených s jejich konstrukcí.

Shrneme-li, je Savageova kniha patrně zatím nejpodrobnější studií základů statistiky chápané jako teorie rozhodování. Základním pojetím autora je subjektivismus, avšak jiná pojetí jsou diskutována podrobněji, než zatím učinili jejich zastánci.

Zbývá dodat, že sloh knihy je vtipný a vyznačuje se elegancí v publikacích přírodovědeckých nezvyklou. Okruh čtenářů však nebude patrně moci být tak široký, jak si autor představuje v předmluvě, neboť přes úspěšnou snahu autorovu o srozumitelnost nejsou věci autorem vykládané jednoduché.

Václav Fabian, Praha.

A. I. Fetisov: **O důkazu v geometrii.** Z ruštiny přeložil ing. *Milan Ullrich.* Vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1956, nákladem 2200 výtisků; 84 stran, 31 obrázků, cena Kčs 2,38. Předmluvu k českému vydání napsal doc. *Jan Vyšín.*

Fetisovova knížka, která vyšla jako 14. svazek „Populárních přednášek o matematice", je určena především žákům jedenáctiletek, jimž má pomoci odstranit obtíže spojené s důkazovými úlohami v geometrii. Po krátkém úvodu následují čtyři kapitolky, nadepsané postupně otázkami, na něž autor odpovídá: Co je to důkaz, k čemu je třeba důkazu, jaký musí být důkaz, které věty lze v geometrii přijmout bez důkazu. Dát na tyto otázky odpověď věcně správnou a současně srozumitelnou úplnému začátečníkovi je při malém rozsahu knížky velmi těžké. Knížka je psána jasně a čtenář v ní najde na mnoha místech vtipné myšlenky a příklady pronikavého rozboru důkazů; je ovšem pochopitelné, že nebylo možno dát všude podrobnou odpověď. — Na autorovu adresu je třeba poznamenat, že výklad o požadavcích kladených na axiomatické soustavy je dostatečně jasný a není nutno uvádět vzdálenou analogii s vlastnostmi soustav lineárních rovnic. Symbolů, zavedených na str. 66, se v knížce používá tak málo, že se jejich užitečnost nemůže projevit a je tedy zbytečné je zavádět.

Při překladu došlo k několika nedopatřením. Na str. 27, 1. a 2. ř. shora, je nesprávně řečeno „Všechny čtyrúhelníky, v nichž součet protějších úhlů je různý od 180°, nelze vepsat do kružnice" místo „Žádný čtyrúhelník, v němž součet protějších úhlů je různý od 180°, nelze vepsat do kružnice". Na str. 44, 1. ř. shora, má být „součty protějších stran" místo „protější strany". Ve formulaci Cantorova axiomu by bylo dobře (ve shodě s originálem) říci „libovolně daná úsečka", nikoliv jen „daná úsečka" (str. 73, ř. 5 shora); mimo to je nesprávně psáno jméno velkého matematika, po němž je tento axiom nazván. Tiskové chyby jsou většinou opraveny v seznamu oprav, který je do knížky vložen; na str. 49, ř. 17 shora, má být „průměty" místo „průmětu".

Lze očekávat, že Fetisovova knížka splní velkou část svého poslání, i když její hodnota je snížena vadami překladu.

Ladislav Kosmák, Brno.

V. G. Šervatov: **Hyperbolické funkce.** Z ruštiny přeložil ing. *M. Ullrich.* Vyšlo jako 15. svazek knižnice „Populární přednášky o matematice" v SNTL, Praha, 1956, nákladem 2200 výtisků, 80 stran, 39 obrázků. Cena 2,32 Kčs.

Hyperbolické funkce se obvykle zavádějí pomocí nekonečných řad; souvislost s goniometrickými funkcemi se pak jeví jen formální a důvod jejich pojmenování zůstává neobjasněn. Elementární výklad, jak je podán v Šervatovově knížce, je prost tohoto nedostatku, i když je méně přesný; opírá se o názorný pojem hyperbolického úhlu a hyperbolického otočení a umožňuje plně vystihnout analogii s goniometrickými funkcemi.

V první kapitole se studuje pojem hyperbolického otočení. Ve druhé se zavádějí hyperbolické funkce a odvozují se pro ně základní vztahy a součtové vzorce; text je v této kapitole většinou rozdělen do dvou sloupců, v nichž se souběžně dokazují obdobné vztahy pro goniometrické a hyperbolické funkce. Třetí kapitola pojednává o souvislosti s logaritmy, jsou v ní nalezeny analytické výrazy pro hyperbolické funkce a dokázány Eulerovy vzorce pro goniometrické funkce. — K českému vydání napsal předmluvu doc. dr *Karel Hruša.*

Knížka je opatřena seznamem oprav, který je třeba doplnit upozorněním na tyto tiskové chyby: Na str. 24, ř. 10 zdola, má být $\left[\frac{x}{k}, yk\right]$ místo $\left[\frac{x}{k}, yx\right]$; na str. 48 v levém sloupci vztah IX má znít $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$; na začátku 6. ř. zdola na str. 53 má být za písmenem z čárka.

Čtenáře, který již učinil několik prvních kroků ve studiu matematiky, Šervatovova knížka upoutá zajímavým obsahem i svěžím stylem výkladu; těmito vlastnostmi pokračuje v dobré tradici předcházejících svazků „Populárních přednášek o matematice“.

Ladislav Kosmák, Brno.

E. Kraemer, *F. Hradecký* a *V. Jozífek*: **Sbírka řešených úloh z matematiky** (6. až 8. postupný ročník). Vydalo státní pedagogické nakladatelství ve sbírce „Na pomoc učiteli“ (Knižnice pro další vzdělávání učitelstva), Praha 1956. Stran 245. Obrázků 75. Cena Kčs 7,53.

Při posuzování této knihy je nutno stále mít na paměti, že je určena učitelům, třebaže ji mohou s úspěchem studovat i žáci.

Úlohy jsou tu rozděleny do tří částí (aritmetika, algebra, geometrie) a přimykají se většinou k látce 6.—8. třídy našich všeobecně vzdělávacích škol; přesahují tuto látku jen na některých místech. Autoři vybrali hlavně úlohy obtížnější, než jaké se probírají ve škole. To je jistě velmi účelné.

Jednotlivé úlohy z aritmetiky (autor V. Jozífek) a algebry (autor F. Hradecký) jsou seřazeny systematicky v tomto pořadí: číselné soustavy, dělitelnost čísel, zlomky, slovní úlohy, rozklad mnohočlenů, úprava algebraických výrazů, lineární rovnice o jedné neznámé, nerovnosti a slovní rovnice. Naproti tomu úlohy z geometrie jsou seřazeny s hlediska methodického. Jsou rozděleny do tří kapitol; v první jsou úlohy důkazové, ve druhé úlohy o množinách bodů dané vlastnosti a ve třetí úlohy konstruktivní. Přitom ve všech kapitolách jsou úlohy týkající se různých geometrických útvarů, ať už trojúhelníků, čtyrúhelníků, kružnic a pod. Geometrická část, jejímž autorem je E. Kraemer, je vůbec zpracována odlišně od ostatních částí. Stručný výklad před každou kapitolou je zde výstižnější než podobné výklady u části aritmetické a algebraické a dává učiteli také velmi dobré praktické rady (na příklad zdůraznění pochopení základní myšlenky důkazu na str. 128). Kraemer tu neuvádí jen vzorná řešení, ale upozorňuje i na chyby, jichž jsme se hlavně dříve při vyučování dopouštěli (viz str. 127). Jeho příkré zavržení některých našich starších sbírek (viz str. 187), v nichž konstruktivní úlohy bývaly řešeny neúplně, je však snad poněkud přehnané, neboť i tyto sbírky, třebaže zdaleka nedosahovaly podání Kraemerova, měly svého času svůj význam a pomohly nám vychovat řadu dobrých matematiků.

Hlavním rysem celé této nové sbírky je přesná logická stavba řešení jednotlivých úloh a podrobná diskuse každé úlohy a jejího řešení. Také po methodické stránce může kniha přinést učitelům značný užitek. Složitější úlohy jsou velmi přehledně rozloženy na řadu jednodušších úloh. Důležitým kladem je, že u mnohých úloh je udáno několik různých způsobů řešení. Na příklad u slovních úloh je obyčejně uvedeno jak řešení úsudkem tak i řešení rovnicí a užívá se i mnemotechnických a heuristických pomůcek, jako jsou různé náčrty a schemata, jež řešení usnadňují. Přitom jsou přísně rozlišeny tyto pomocné prostředky od vědecky správných úvah a důkazů. To všechno je pro naše školy velmi užitečné. Učitel si zde na příklad jasně uvědomí, že nestačí, aby se omezil při řešení úloh ve škole jen na svoji vyježděnou šablonu a že musí při nejmenším vzít v úvahu i samostatná řešení, jež přinášejí žáci. Autoři vzali ohled i na to, že se v matematice nevystačí jenom s pouhou logikou. Pro školskou práci přichází v úvahu hlavně uplatnění početní praxe a rutiny, jež je na našich školách dnes částečně zanedbávána. Autoři zdůrazňují její význam na několika místech (nejvýstižněji na str. 58).

Pozorný čtenář může prostudováním této sbírky rozšířit i svoje vědomosti. To se týká hlavně těch učitelů, kteří neprodělali důkladné matematické školení. Mám na mysli na př. úlohy týkající se rozkladu mnohočlenů v množině celých čísel. U každého mnohočlenu, který už rozložit nejde, je odůvodněno, proč to nejde. I když tyto důkazy nejsou pojaty do učebnic, přece pro učitelovu práci jsou důležité.

Všechny tyto klady nové naší sbírky jistě přispějí podstatně ke zlepšení práce na našich školách a můžeme jen vyslovit přání, aby podobné sbírky byly sestaveny i z látky probírané v 9. až 11. třídě.

Ale vedle všech těchto předností má sbírka i některé nedostatky. Týká se to jen první části, kde úlohy o dělitelnosti se řeší v oboru čísel přirozených, ačkoli jsou formulovány v oboru čísel celých. Autor byl k tomu pravděpodobně sveden tím, že se na školách dělitelnost probírá dříve než čísla záporná, ale chtěl-li už to tak provést, měl na to aspoň upozornit. Tak na př. úloha čís. 9 (str. 9—11) obsahuje tvrzení platná pro kterákoli dvě lichá čísla, ale autor je dokazuje jen pro kladná lichá čísla navzájem různá. Při tom i v tomto důkaze je mezera na str. 10 (řádek 6 zdola), kde je třeba místo ostré nerovnosti $u > v$ vzít v úvahu nerovnost $u \geqq v$. Dále v úloze 18 na str. 14 autor vysvětluje, že zlomek v základním tvaru je takový, jehož čitatel i jmenovatel jsou navzájem nesoudělná *přirozená* čísla; pak by ovšem jeho úloha se omezovala jen na případ $a < b$, neboť je tam řeč o zlomku $\dfrac{b-a}{b}$ v základním tvaru, ale hned na začátku textu řešení připouští nesoudělná čísla taková, jejichž jediný společný dělitel je -1, což budí u čtenáře dojem, že přec jen při dělitelnosti připouští i čísla záporná. Celou tuto nejasnost stupňuje konečně kolise s úlohami o rozkladu mnohočlenů v množině celých čísel, kde se nutně užívá dělitelnost čísel celých a ne jen přirozených. Při tomto rozkladu mnohočlenů se ovšem záporným číslům vyhnout nemůžeme a proto úlohy o dělitelnosti v první části bylo dobře tomu přizpůsobit, aby výklad všech pojmů byl v celé knize jednotný.

Jiné nedopatření je na str. 13 v druhé části řešení úlohy 15. Jde o vyvrácení věty, že přirozené číslo dělitelné pěti má na svém základním místě číslici 0. Každého učitele totiž ihned napadne, že na příklad existence čísla 35 stačí k důkazu. To je jistě správné. Ale autor nejdřív zbytečně probere všechna čísla končící nulou, pak zjistí, že je nepotřebuje, a na to teprve zkonstruuje důkaz. Je nebezpečí, že takový učitel, který nemá dosti sebedůvěry, bude všechny zbytečnosti v důkaze uvedené pokládat za nutnou část důkazu.

Přes tyto nedostatky se domnívám, že tato nová sbírka splní výborně své poslání a že přispěje ke zlepšení vyučování matematice na našich školách, jak už jsem výše konstatoval.

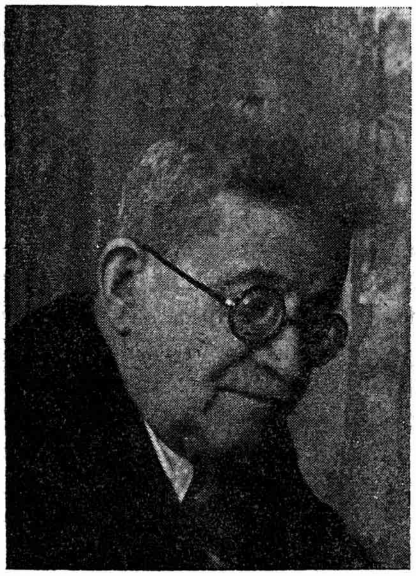
Karel Havlíček, Praha.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

ZPRÁVY

VĚDECKÁ A PUBLIKAČNÍ ČINNOST PROFESORA DR KARLA ČUPRA

Životní dílo zesnulého profesora dr KARLA ČUPRA zahrnuje mimo matematiku též dějiny matematiky a věd jí blízkých. V obou těchto oborech pracoval souběžně po dobu čtyřiceti let a výsledky svého bádání pilně publikoval v časopisech odborných i v denním tisku.



V pracích matematických dával prof. Čupr — zvláště po dosažení habilitace na brněnské technice — přednost thematům poskytovaným vědami technickými. Nejčastěji to byly otázky mající význam pro elektrotechniku a prof. Čupr je čerpal nejen z odborných časopisů, nýbrž i z přímého styku s inženýrskými kruhy. S hlediska matematického tvoří větší skupinu práce z oboru diferenciálních a diferenčních rovnic (viz v seznamu čísla *18, 19, 22—24, 28, 31, 33, 35, 38, 40*), v nichž studoval metody řešení, tvar integrálů a Haevisideovu metodu. Pro použití v elektrotechnice a geodesii zabýval se zevrubně řetězovkou o malém i velkém průhybu (*25—27, 36, 37*) a k účelům matematické statistiky logistickou křivkou (*34, 39*), o níž mimo jiné ukázal, že je totožná s hyperbolickou tangentoidou.

Ostatní pojednání matematická vyznačují se rozmanitostí themat, takže je možno výslovně se zmínit pouze o některých z nich. Práce č. *2* je disertační a jedná o spojitých funkcích jedné proměnné, jež nemají derivaci v některých nebo ve všech bodech svého oboru. V pojednání č. *7* je dosaženo nových výsledků při Laguerrově úloze: Je dána rovnice $b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n = 0$; máme konstruovati posloupnost $\{c_\nu\}$ takovou, aby rovnice $c_kb_0 + c_{k+1}b_1x + \ldots$ $\ldots + c_{k+n}b_nx^n = 0$ měla současně s danou rovnicí všechny kořeny na př. reálné.

Práce č. *8* představuje výňatek z habilitačního spisu, jenž v plném rozsahu publikován nebyl a jenž má název „*O rodu celistvých transcendentních funkcí*". V publikované části opravuje prof. Čupr Laguerrovo tvrzení, že celistvá transcendenta $f(z)$ má rod 1, platí-li $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z^l} \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = 0$ (l celé) a ukazuje, že v tom případě má $f(z)$ rod nejvýše 1.

Knižní spisy prof. Čupra (s výjimkou *3*, *9*, *10*) mají povahu učebnic, po případě praktických příruček. Spisy *6—8* vykonaly na brněnské technice dobrou službu v prvních letech po válce, kdy nedostatek učebnic při obrovském počtu posluchačů byl opravdu tíživým problémem. Rychlým vydáním pomůcek nevelkého rozsahu byl pedagogický úkol velmi usnadněn. Knihy *3*, *9* a *10* se těší velikému zájmu četných čtenářů a vhodně vyplňují mezeru, která existovala v naší literatuře na tomto úseku.

Druhý obor činnosti prof. Čupra, dějiny matematiky a částečně i věd přírodních, se postupem času stal vlastním polem jeho působnosti. V této práci nacházel opravdové uspokojení, snad proto, že v ní došla uplatnění silná humanistická složka jeho vzdělání. Existující již publikace o otázkách, jimiž se zabýval, byly mu ovšem východiskem, avšak studium archivů bylo jádrem vlastní práce a přineslo mnoho nových poznatků. Zvláště rád bádal o thematech z dějin matematiky na Moravě. Studium historie filosofických ústavů přivedlo prof. Čupra k některým otázkám z dějin matematiky v Čechách. V tomto směru ho zaujala především postava STANISLAVA VYDRY o němž napsal řadu cenných a zajímavých článků. V připojeném seznamu prací jsou uvedeny názvy jen některých delších statí historických. Úplný seznam článků vyšlých z pera prof. Čupra by jich obsahoval nejméně 250. Většina z nich byla uveřejněna v denním tisku, byly čteny s opravdovým zájmem a měly tedy nemalou cenu popularisační. Mimo historické články a nekrology je mezi nimi mnoho recensí, jubilejních vzpomínek a také článků z oboru matematických her a zábav. Jubilea matematiků a pracovníků v příbuzných oborech připomínal prof. Čupr s pohotovostí snad nepřekonatelnou.

Poslední dva spisy zesnulého prof. Čupra zůstaly v rukopise. Jeden z nich pojednává o životě a díle moravského astronoma a geodeta z 18. století CHRISTIANA MAYERA a druhý o třech dosud neznámých dílech J. A. KOMENSKÉHO. Přírodovědná díla našeho velkého pedagoga znal prof. Čupr dokonale a rovněž o nich několikrát psal.

V profesoru Karlu Čuprovi odešel z řad matematiků pracovník, jehož jméno proniklo do širokých vrstev národa. V kruzích odborných získal si čestné místo svými pracemi historickými, jež budou trvale pramenem cenných poznatků.

Ludvík Frank, Brno.

SEZNAM PRACÍ PROFESORA KARLA ČUPRA

Použité zkratky:

Čas. = Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.

PMPS = Práce Moravské přírodovědecké společnosti.

Sborník VŠT = Sborník České vysoké školy technické v Brně (v letech 1945—51 Sborník Vysoké školy technické dra Edvarda Beneše v Brně).

EO = Elektrotechnický Obzor.

Matematické články a pojednání:

1. Součty některých řad. *Čas. 36* a *37*, 1907 a 1908, 2 a 11 str.
2. O funkcích anorthoidních. *Výroční zprávy II. české stát. reálky v Brně,* 1912, 27 str.
3. Příspěvek k analytické geometrii kuželoseček. *Čas. 44,* 1915, 16 str.
4. O determinantech mocninných. *Čas. moravského musea zem. 15,* 1916, 7 str.
5. Ubývání venkovského obyvatelstva. (Příspěvek k matematickému zpracování statistického materiálu.) *Nákladem vlastním,* 1916, 4 str.
6. O rovnicích majících jen reálné kořeny. *Čas. 46,* 1917, 15 str.
7. Příspěvek k Laguerrovým posloupnostem. *Rozpravy II. tř. České akademie věd a umění 31,* 1922, 7 str.
8. O Laguerrově methodě stanovení rodu celistvé transcendenty. *Čas. 52,* 1923, 10 str.
9. O některých řadách a součinech konvergujících podmíněně. *Čas. 53,* 1924, 6 str.
10. Příspěvek k numerickému řešení rovnic. *Jubilejní vědecký sborník 1899—1924 České vys. školy technické v Brně,* 1924, 2 str.
11. Příspěvek k nauce o půjčkách annuitních. *Pojistný Obzor,* 1924, 9 str.
12. O některých důsledcích plynoucích z Lagrangeovy interpolační formule. *Čas. 54,* 1925, 17 str.
13. Příspěvek k nauce o řetězových zlomcích. *PMPS 2,* 1925, 20 str.
14. Addiční theorém Besselových funkcí o více proměnných. *PMPS 3,* 1926, 4 str.
15. Parsevalova identita a její užití v teorii funkcí konečných. *Čas. 55,* 1926, 21 str.
16. Zobecnění jistého Hurwitzova problému. *Čas. 57,* 1928, 5 str.
17. Použití signatury kvadratických forem v nauce o algebraických rovnicích. *Čas. 57,* 1928, 8 str.
18. Z praxe diferenciálních lineárních rovnic. *Sborník VŠT 3,* 1928, 15 str.
19. O jistém Fuchsově theorému a zdánlivých singularitách lineárních diferenciálních rovnic. *Čas. 58,* 1929, 15 str.
20. Poznámky ke kuželosečkám ve svazku a v síti. *Sborník VŠT 4,* 1929, 18 str.
21. Použití Schlömilchova-Pringsheimova integrálu při sčítání podmíněně konvergentních řad. *Sborník VŠT 5,* 1930, 16 str.
22. Dvě metody řešení nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic. *PMPS 8,* 1933, 25 str.
23. O jisté diferenční rovnici. *EO 22,* 1933.
24. O jistém systému diferenčních rovnic. *EO 22,* 1933.
25. Exaktní výpočet vedení. *EO 23,* 1934.
26. Příspěvek k matematické stránce venkovního vedení. *Sborník VŠT 8,* 1934, 12 str.
27. Poznámky k výpočtu vedení na velkých rozpětích. *EO 25,* 1936, 5 str.
28. O methodě Haevisideově. *Sborník VŠT 10,* 1936, 21 str.
29. Velká věta Fermatova pro $P = 23, 29, 41$. *Sborník VŠT 11,* 1937, 9 str.
30. O diofantické rovnici $x^n + y^n = c^n$. *Sborník VŠT 12,* 1938, 15 str.
31. Haevisideova methoda pro systémy rovnic. *PMPS 11,* 1938, 10 str.

32. Pohyb tělesa pružně zavěšeného. *Sborník VŠT 13*, 1939, 12 str.
33. Elementární důkaz Haevisideovy methody. *EO 30*, 1941.
34. Matematické základy nauky o logistické křivce. *Statistický Obzor 23*, 1942, 10 str.
35. Heavisideova methoda a Laplaceova transformace. *PMPS 14*, 1942, 30 str.
36. Užití řetězovky při měření délek invarovými měřítky. *Zeměměřický Obzor 31*, 1943, 4 str.
37. O pružné řetězovce. *PMPS 15*, 1943, 16 str.
38. O vedení tepla ve dvou soustředných dutých koulích a ve dvou souosých dutých válcích. *PMPS 17*, 1945, 10 str.
39. O logistickém vzrůstu. *Věstník Král. české spol. nauk*, 1946, 16 str.
40. Poznámky k diferenčním rovnicím ve vyrovnávacím počtu. *Sborník VŠT 15*, 1946, 8 str.

Knihy:

1. Přehled geometrie ke zkouškám. *Ústřední učitelské nakladatelství a knihkupectví*, 1941, 56 str.
2. Přehled algebry ke zkouškám. *Ústř. učit. nakl. a knihkup.*, 1942, 56 str.
3. Aritmetické hry a zábavy. *JČMF, Cesta k vědění*, sv. 21, 1942, 73 str. (2. vydání 1949.)
4. Úvod do nomografie. *Elektrotechnický Svaz českomoravský*, 1944, 92 str.
5. Numerické řešení rovnic. *Cesta k vědění*, sv. 28, 1945, 82 str.
6. Matematika I, IIA, IIB. *Donátův fond při Benešově technice v Brně*, 1946, 171 str., 100 str., 150 str.
7. Užití integrálního počtu ve vědách technických a přírodních. *Donátův fond*, 1946, 75 str.
8. Diferenciální rovnice v inženýrově praxi. *Donátův fond*, 1947, 80 str.
9. Geometrické hry a zábavy. *Cesta k vědění*, sv. 38, 1949.
10. Matematické zábavy a hry. *Nakladatelství ČSAV*, 1953, 178 str.

Hlavní články historické:

1. Málo známé jubileum. *Čas. 43*, 1914, 7 str.
2. Prof. Matyáš Lerch. *Čas. 52*, 1923, 13 str.
3. Z dějin matematiky v zemi Moravskoslezské. *Inaugurační přednáška. Nákladem Vysoké šk. techn. v Brně*, 1933, 19 str.
4. Jak vznikalo inženýrství na Moravě. *Lidové Noviny*, 1934.
5. 75 let Jednoty čsl. matematiků a fysiků. *Naše věda 19*, 1938, 4 str.
6. PhDr Antonín Rezek, budovatel České vysoké školy technické v Brně. *Čas. Technik*, 1939, 7 str.
7. K dvoustému výročí narození Stanislava Vydry. *Čas. 70*, 1941, 4 str.
8. Stanislav Vydra a jeho doba. *PMPS 13*, 1941, 28 str.
9. Česká matematika 1940—1945, *Naše věda 24*, 1946, 8 str.
10. K literatuře o filosofických ústavech v Čechách a na Moravě. *Naše věda 24*, 1946, 6 str.

Sestavil *Ludvík Frank*, Brno.

SEDMDESÁT PĚT LET PROFESORA DR QUIDO VETTRA

Nejstarší český historik matematiky, profesor dr Quido Vetter, se dožil dne 5. června 1956 sedmdesátých pátých narozenin. Významné toto jubileum zastihlo jubilanta při plném zdraví v čilé vědecké a publikační práci.

Jubilant je nejmladším synem z osmi dětí. Již jako chlapec na obecné škole si oblíbil dějepisné výklady svých učitelů i četbu historických knih. Tato záliba v historii usměrnila i uplatnění jeho matematického nadání. V roce 1919 se habilitoval na filosofické fakultě KU pro dějiny matematiky a tuto habilitaci rozšířil v roce 1924 i pro školu speciálních nauk při Vysokém učení technickém v Praze a to pro obor matematiky se zvláštním zřetelem k historii matematiky aplikované. V témž roce mu také byl udělen titul mimořádného profesora. Po osvobození roku 1945 byl opět pověřen přednáškami z historie matematiky na pražských pedagogických učilištích.

Úctyhodná řada kolem 200 článků, pojednání a knih a na 400 recensí prací domácích i zahraničních vědců-historiků matematiky — svědčí o neobyčejném pracovním úsilí a rozsáhlém zájmu tohoto historika matematiky i vzácného pedagoga.

Nejrozsáhlejší jeho práce, kniha „Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury" (1926), přehledný „Úvod do dějin matematiky" (Sborník „K vyššímu poznání", Praha, 1930) a „Šest století matematického a astronomického učení na universitě Karlově v Praze" (Královská česká společnost nauk v Praze, 1953) jsou spolu s ostatními speciálními pojednáními svědectvím o dokonalé informovanosti i přesné vědecké pracovní metodě profesora Vettra. Nynější své úsilí věnuje k shrnutí svých poznatků a výzkumů z oboru dějin české matematiky. To dokazuje nejen jmenovaná práce o matematickém učení na Karlově universitě v Praze, ale i další práce uveřejněné v posledních letech v časopisech našich i zahraničních, jakož i práce k tisku připravené.

Pilná vědecká a publikační činnost profesora Vettra došla uznání u četných zahraničních i našich vědeckých společností. Těšíme se na jeho další vědecké práce, k jejichž vytvoření mu přejeme hodně zdraví a radosti z vědeckých úspěchů.

Fr. Balada, Brno.

OSMÝ MEZINÁRODNÍ SJEZD PRO DĚJINY PŘÍRODNÍCH VĚD

Ve dnech 3. až 9. září 1956 konal se ve Florencii a v Miláně 8. mezinárodní sjezd pro dějiny přírodních věd (8. congresso internazionale di storia delle scienze). Z Československa se zúčastnili sjezdu tři delegáti: akademik prof. dr B. Němec, dr J. Kořán ze Státního geologického ústavu, autor knihy o dějinách našeho hornictví, a pisatel těchto řádků.

První část sjezdu ve dnech 3. až 7. září konala se ve Florencii a druhá část ve dnech 8. a 9. září v Miláně. Sjezd pořádala *Mezinárodní unie pro dějiny přírodních věd* (L'Union internationale pour l'histoire des sciences), která organisuje takovéto sjezdy každé tři roky. U příležitosti sjezdu zasedala také *Mezinárodní akademie pro dějiny přírodních věd* (L'académie internationale de l'histoire des sciences), která má své sídlo v Paříži. Sjezdu se zúčastnilo asi 400 osob, hlavně z Evropy, ale též ze Spojených států a z Asie (Střední Východ, Čína, Japonsko). Několik málo delegátů bylo i z Kanady a z latinské Ameriky. Sovětský svaz se zúčastnil sjezdu dvěma delegáty: prof. Figurovským a prof. Zubovem. Z lidových demokracií bylo zastoupeno vedle Československa i Polsko, dvěma delegáty: prof. Bukowským a prof. Olszewským, a pak i Čína.

Sjezdová jednání se konala, jak je to zvykem na mezinárodních vědeckých sjezdech, na plenárních zasedáních a pak v sekcích. Na plenárních zasedáních byly asi hodinové přednášky, především z dějin italské vědy. Jako příklad uvádím: *G. del Guerra*, Vědecká tradice Pisy; *L. Belloni*, Objev Agostina Basiho v dějinách živé nákazy (předchůdce Pasteurův); *G. Abetti*, Žáci Galilea Galilei. Kratší vědecká sdělení byla konána v sekcích, jichž bylo šest:

1. Dějiny matematiky, fysiky a astronomie. 2. Dějiny chemie a farmacie. 3. Dějiny geografie a geologie. 4. Dějiny biologie a mediciny. 5. Dějiny technologie a aplikovaných věd. 6. Dějiny věd obecně.

Nebylo přirozeně možno účastnit se zasedání všech sekcí, které se obyčejně konaly společně. Proto se omezím na vylíčení jednání v 1. sekci a to ještě jen v podsekci pro dějiny matematiky. Tato sekce byla totiž rozdělena na tři podsekce: pro dějiny matematiky, pro dějiny fysiky a pro dějiny astronomie. Ze sdělení v podsekci pro dějiny matematiky bylo pro nás především zajímavé sdělení Francouze inž. *Paula Gillea*, který nebyl přítomen a jež bylo za něho čteno. Sdělení mělo název: Les mathématiques et la construction navale. Byl to stručný přehled aplikace matematiky na stavbu lodí. Od Archimeda až do začátku 18. stol. byla rozřešena řada otázek stability plovoucích předmětů. Tyto výsledky byly však neznámy stavitelům lodí, kteří využívali jen praktických zkušeností při své práci. Teprve v 18. stol. práce Bouguera, Bernoulliho a Eulera pronikly a byly využívány i v praktické práci v loděnicích. Z dalších prací byly pro praxi podle autora zvláště významné práce Františka Josefa Gerstnera, zakladatele pražské techniky, o pohybech moře a jejich vlivu na kolébání se lodí. Tyto teoretické práce byly velmi využívány od polovice 19. stol. v loděnicích.

Z jiných sdělení uvedu jen několik jako příklady témat, která se v podsekci vyskytovala: Francouzka *Mme Guitel* přednášela o svých srovnávacích studiích numerace staroegyptské a aztecké. *K. Vogel* ze západního Německa přednášel o byzantské matematice. Mimo jiné uvedl, že již jakýsi *Leon* v 9. století užíval písmen při popisování obecných početních postupů. Jeho studie, jak se zdá, byla založena na originálních pramenech. Řada příspěvků týkala se novověku. Šlo obyčejně o to, jak pojímal a jak rozvíjel ten který matematik nějaký matematický problém, nebo šlo o zprávy o nově objevených neb dosud neprostudovaných dílech různých vědců.

Souhrnně možno říci, že většina příspěvků měla celkem slušnou úroveň. Zabývala se skutečně, aspoň pokud se týká matematiky, historií vědeckých problémů, a kde referát jednal o osobách, středem jeho zájmu bylo vždycky dílo osoby, její stanovisko k danému problému a její příspěvek k jeho řešení. Nevyskytovala se tam vůbec sdělení taková, jako na př. zjištění nějakého bezvýznamného faktu ze života nějakého vědce. Vysloveně pochybná sdělení slyšel jsem jen dvě. Sdělení Itala *U. Cassiny* týkalo se jedné práce Wallisovy o Eukleidovi. Cassina ukázal, že důkaz VIII. věty Wallisovy je chybný, protože užívá implicite postulátu spojitosti a ukazuje, jak je nutno změnit Wallisovy úvahy, aby se staly správnými. To podle mínění pisatele těchto řádků nemá celkem ceny. Ještě daleko horší byl příspěvek francouzského řádového kněze *François Russo*, nazvaný „Le père Saccheri et la théorie des parallèles. Invention, méthode et contenu de son oeuvre." Sám jsem nemohl být bohužel sdělení přítomen, ale soudě podle výtahu, neřekl Russo o díle Saccheriho nic nového. Nové a neobvyklé bylo jen hodnocení jeho díla „Euclides ab omni aevo vindicatus." Ve výtahu stojí: „Veden (t. j. Saccheri) logickou metodou, kterou vypracoval ve svém díle Logica Demonstrativa z r. 1697, nejen že postavil problém geometrií neukleidovských, nýbrž odhalil i strukturu geometrie řečené Lobačevského, kterou by bylo spravedlivější nazvat geometrií Saccheriho. Sdělení ukazuje, jak nedostatečná přesnost v rozboru skutečností geometrických v nekonečnu přivedla jej k tomu, aby popřel pravdivost nauky, kterou vypracoval." Každému, kdo jen trochu zná dílo Saccheriho, které má tak vynikající místo mezi pokusy dokázati V. postulát Eukleidův, není třeba vykládati, jak jsou tyto závěry falešné. Nemohu se ubránit dojmu, že celé sdělení bylo především učiněno proto, aby zásluha o objevení neukleidovské geometrie byla upřena ruskému matematikovi. Avšak takové sdělení bylo jen výjimkou. Ovšem, jak se ani nedalo očekávat, neslyšel jsem žádný příspěvek, který by si všímal, jak formulování a řešení nějakého vědeckého problému vyrůstalo ze společenských a hospodářských podmínek doby.

Československo je starým, ještě předválečným, členem Unie. Na sjezdě bylo přijato za nové členy několik dalších států. Jsou to podle pořadí došlých přihlášek: Polsko, Finsko, Spolková německá republika, Sovětský svaz a Čínská lidová republika. Přihlášky Řecka a Jugoslavie byly odkázány výboru Unie, neboť tyto státy nesplnily ještě některé formální podmínky pro přijetí. Jeden stát byl škrtnut ze seznamu členů, Turecko, pro dlouholeté neplacení členských příspěvků.

Sjezd byl znamenitě organisován, takže celý jeho průběh byl naprosto hladký. Do jednání sjezdu bylo zařaděno několik exkursí: do Pisy, do Vinci, rodiště Leonarda da Vinci, na astronomickou observatoř v Arcetri. Možno tedy bez jakéhokoli přehánění říci, že byl naprosto zdařilý.

Chci-li nakonec zhodnotit význam tohoto sjezdu pro nás a ocenit perspektivně význam příštích sjezdů, mohu to udělat přirozeně jen kuse, neboť jsem mohl být přítomen jen malé části sjezdových jednání v jedné sekci. Myslím, že je pro nás důležité, abychom na tyto sjezdy vysílali naše vědecké pracovníky v dějinách přírodních věd, při čemž by měl být brán zřetel i na mladší pracovníky v těchto oborech. Unie totiž shromáždila kolem sebe slušný počet pracovníků o dějinách přírodních věd, lékařství a techniky. Úroveň prací není špatná, ačkoli v lecčems nutno hledat ještě cestu a orientaci. Nejslabší stránkou je metodologie práce. K tomu bychom myslím i my mohli něco říci.

Domnívám se, že má význam seznamovat na takovém mezinárodním foru s dějinami naší vědy a výsledky naší vědecké práce v minulosti. Nemůžeme spoléhat na to, že si v cizině všimne po druhé někdo práce takového Gerstnera, a musíme počítat i s tím, že se objeví takoví páteři Russo, kteří budou úmyslně snižovat naši vědeckou práci. Konečně je důležité politicky i ideologicky, abychom hájili a propagovali naše koncepce a naše stanoviska. Bylo by nesprávné stahovat se z tohoto ideového zápasu. Doufám, že v budoucnosti naši mladí pracovníci řeknou i po této stránce něco podstatného.

Vladimír Kořínek, Praha.

IV. SJAZD RAKÚSKYCH MATEMATIKOV VO VIEDNI

V dňoch 17-22. septembra 1956 konal sa vo Viedni IV. sjazd rakúskych matematikov. Na sjazde sa zúčastnilo viac ako 350 účastníkov z týchto 25 štátov: Belgicko, Veľká Británia, Československo, Dánsko, Fínsko, Francúzsko, Grécko, Holandsko, Itália, Juhoslavia, Maďarsko, Nemecká demokratická republika, Nemecká spolková republika, Nórsko, Polsko, Portugálsko, Rakúsko, Rumunsko, Sovietský sväz, Spojené štáty americké, Sudan, Španielsko, Švajciarsko, Švédsko, a Turecko.

Rakúskych účastníkov bolo iba niečo vyše 60, takže sjazd mal vyslovene charakter medzinárodného kongresu. Táto okolnosť bola usporiadateľmi sjazdu už vopred zdôrazňovaná. Rakúski matematici sa tým snažili zachovať tradíciu zo salzburského sjazdu z roku 1952.

Československo zastupovalo 7 delegátov a to: člen koresp. ČSAV Otakár Borůvka, člen koresp. ČSAV Štefan Schwarz, prof. VTAZ Rudolf Piska, Brno, doc. dr Miroslav Novotný, Brno, dr Miroslav Fiedler, dr Otto Vejvoda, dr Vlastimil Pták, pracovníci Matematického ústavu ČSAV v Prahe.

Sovietský sväz bol zastúpený štvorčlennou delegáciou vedenou akademikom P. S. Alexandrovom. Polskí matematici boli zastupení 5-člennou delegáciou. Veľmi početná bola maďarská delegácia, ktorá mala 23 členov a delegácia juhoslovanská s 18 účastníkmi.

Sjazd bol zahájený v pondelok 17. septembra v aule viedenskej univerzity predsedom Rakúskej matematickej spoločnosti prof. A. Duschekom. Uvítací preslov mali zástupca Ministerstva školstva a osvety a zástupca mesta Viedne.

Práce sjazdu boli rozdelené do 5 sekcií a to: I. Algebra a teória čísel, II. Analýza, III. Geometria, IV. Aplikovaná matematika, V. Základy matematiky a história matematiky. Práce II. a III. sekcie prebiehali paralelne v dvoch pododdeleniach.

Na sjazde odznelo (podľa oficialného programu) 221 referátov, z ktorých každý mal rozsah 20—30 minút. Z toho v sekcii I 42 referátov, v sekcii II 74 referátov, v sekcii III 59 referátov, v sekcii IV 39 referátov, v sekcii V 7 referátov.

Československí účastníci prednesli 6 referátov. V I. sekcii *Št. Schwarz*, O existencii invariantných mier na kompaktných pologrupách a *M. Novotný*, O aditívne ireducibilných elementoch a aditívnych bázach vo svázoch. V sekcii II *O. Borůvka*, O zovšeobecnení viet o jednoznačnosti integrálov diferenciálnej rovnice $y' = f(x, y)$ a *V. Pták*, Banachova veta o spojitosti inverzného operátoru vo vektorových topologických priestoroch. V III. sekcii *M. Fiedler*, O pravouhlých n-simplexoch a iných otázkách geometrie simplexov. V sekcii IV *O. Vejvoda*, O odhadu chyby pri Runge-Kuttovom vzorci.

Z veľkého počtu prednášok je ťažko vyzdvihnúť najdôležitejšie a najzaujímavejšie. Snažili sme sa, aby sme rovnomerne — a to každý podľa vlastného záujmu — navštevovali všetky sekcie. Všeobecne sa napr. vysoko hodnotili prednášky prof. *Pólyu* v sekcii IV na tému „Dokázané a nedokázané vety z teórie kmitania membrán“ a prednáška akademika *Alexandrova*: „O zovšeobecnení Kantorovej definície súvislosti množín“.

Účastníci sjazdu mali vopred k dispozícii sjazdový materiál obsahujúci — okrem iného — výťah zo všetkých ohlásených referátov. Po referátoch sa rozprúdili debaty, ktoré pokračovali v rade súkromných rozhovorov a plodných diskuzií v „kuloároch“. Podrobný program sjazdu, zoznam účastníkov a podrobnejšie výťahy z referátov vyjdú ako zvláštne číslo časopisu Internationale Mathematische Nachrichten.

Československá delegácia prehlbila a rozšírila svoje styky s celým radom zahraničných matematikov a nadviazala rad nových vzájomných vzťahov.

Sjazd bol výborne organizovaný. Nikde nebolo vidieť najmenšiu medzeru v organizácii.

So sjazdom bol spojený rad spoločenských udalostí. Vedúci jednotlivých delegácií a niektorí ďalší účastníci boli v pondelok večer 17. sept. pozvaní k ministrovi školstva a osvety. Niektorí členovia boli pozvaní na obed Rakúskou matematickou spoločnosťou. Všetci účastníci mali možnosť zoznámiť sa s novými význačnějšími stavbami a zariadeniami mesta Viedne. Vo štvrtok 20. sept. podnikli všetci účastníci zájazd na Semmering. Po skončení sjazdu boli usporiadané exkurzie po Rakúsku, ktorých sa zúčastnil veľký rad význačných matematikov. Je prirodzené, že i behom týchto spoločenských udalostí pokračovali odborné rozhovory.

Oficiálne zakončenie sjazdu bolo v sobotu večer na zvláštnej recepcii usporiadanej mešťanostom mesta Viedne. Tu prehovoril najstarší účastník sjazdu prof. Denjoy (Paříž), ďalej zástupci nemeckej a talianskej delegácie (ako najväčších delegácií) a konečne juhoslovanský zástupca menom všetkých ostatných zahraničných hosťov.

Št. Schwarz, Bratislava.

VĚDECKÉ ZASEDÁNÍ BULHARSKÝCH MATEMATIKŮ

Zasedání se konalo v Sofii po pět dní od 10. do 14. října 1956; předsedou zasedání byl akademik L. Čakalov. Zasedání bylo zahájeno presidentem bulharské akademie věd, akademikem Todorem Pavlovem. Jeho obsažný úvodní projev obsahoval řadu závažných myšlenek o úloze a možnostech vědy při upevňování světového míru a při rozvíjení mezinárodní spolupráce i o specifickém charakteru matematiky. Na programu byla pak přednáška akademika N. Obreškova o rozvoji a současném stavu matematiky v Bulharsku.

Další dny, od 11. do 14. října, byly cele vyplněny sjezdovými zasedáními. Bulharští matematikové nazvali tento sjezd skromně „vědeckým zasedáním", byl to však skutečný sjezd jak svým rozsahem, tak i počtem a kvalitou vědeckých příspěvků. Z ciziny se účastnilo sjezdu celkem 19 matematiků: ze Sovětského svazu S. L. Sobolev, A. G. Postnikov a A. V. Bicadze, z Československa J. Jakubík a V. Jarník, z Číny Buchin Su a Wen-Tsum-Wu, z Francie A. Denjoy, z Jugoslavie St. Belinski, z Maďarska L. Fuchs, F. Tóth a O. Varga, z Německé demokratické republiky H. Grell a R. Reissig, z Polska K. Borsuk a W. Sierpiński, z Rumunska K. Calugareanu, Ch. Gheorghiev a G. Moisil. Vedle zahajovacího zasedání se konala plenární zasedání ještě dne 11. a 14. října dopoledne. Ostatní zasedání byla rozdělena do dvou sekcí; v druhé byla geometrie a aplikace matematiky, ostatní matematika byla v první sekci. Celkem se konalo 12 přednášek v plenu, 28 v 1. sekci a 25 v 2. sekci. Oba českoslovenští zástupci zasedali v 1. sekci, jak to odpovídá jejich zaměření; mohou proto o zasedáních druhé sekce říci jen málo.

Přednášky přinesly mnoho zajímavého. Z hostí přednášel *Sierpiński* o výsledcích svých a svého žáka *Schinzela* v elementární theorii čísel; *Postnikov* o problémech aditivní theorie čísel s rostoucím počtem sčítanců, o rozdělení zbytků exponenciální funkce modulo 1 a o neúplném systému zbytků; *Jarník* o lineárních diofantických aproximacích. *Grell* přednášel o struktuře okruhů v algebraických tělesech, *Fuchs* o universálních obrazech Abelových grup, *Jakubík* o grafickém isomorfismu struktur a multistruktur. Z analysy přednášel *Sobolev* o okrajových problémech eliptických rovnic s obecného hlediska, které jím bylo zavedeno do theorie parciálních rovnic; *Bicadze* přednášel o systému rovnic eliptických a „silně eliptických" a o smíšených parciálních rovnicích. *Moisil* pojednal o monogenních funkcích ve smyslu Feodorově a o aplikaci na problém rovinné pružnosti, *Calugareanu* o násobnosti (valence) riemannovských oblastí v rovině, *Denjoy* o zobecnění jedné funkce Minkowského, související s pravidelnými řetězovými zlomky. *Reissig* měl sdělení o samobuzených kmitech. O diferenciální geometrii prostorů s areální metrikou přednášel *Buchin Su*; *Gheorghiev* přednášel o diferenciální geometrii vektorových polí a o komplexech přímek s konstantní křivostí, *Belinski* o polárně adjungovaných sférických křivkách, *Varga* o zobecněných Riemannových normálních souřadnicích; *Wen-Tsum Wu* měl sdělení o vnoření polyedrů do eukleidovských prostorů. *Tóth* přednášel o extremálních vlastnostech regulárních polyedrů. Z oboru topologie přednášel *Borsuk* o theorii retraktů.

Pro zahraniční hosty byla ovšem zvláště poučná sdělení bulharských matematiků, která poskytla zajímavý pohled na současné matematické dění v Bulharsku, neboť zde vedle osobností, jejichž vědecký profil je všeobecně znám, vystoupila v značném počtu bulharská mladá a nejmladší generace. Přehled, který podám, bude ovšem značně jednostranný, ježto, jak jsem již řekl, účastnila se československá delegace pouze zasedání první sekce, takže o druhé sekci ví pouze tolik, kolik je obsaženo v tištěných résumé.

Jednotlivé obory matematiky byly číselně v přednáškách bulharských matematiků zastoupeny asi takto: Theorie čísel 3, algebra 1, analytické funkce 2, diferenciální rovnice obyčejné 2, funkcionální analysa 8, geometrie 6, pravděpodobnost 2, mechanika a thermodynamika 9, ostatní aplikace 2.

V theorii čísel referoval akademik *Obreškov* o svých dalších pracích z theorie diofantických aproximací, další sdělení se týkala řešitelnosti diofantické rovnice $F(x, y) = 0$ (F polynom) a věty o prvoideálech 1. stupně. Sdělení z algebry se týkalo symetričnosti jedné matice z thermodynamiky. Sdělení z theorie analytických funkcí se týkala prostých funkcí (akademik *Čakalov*) a mocninných řad, které mají konvergenční kružnici za přirozenou hranici. Sdělení o diferenciálních rovnicích se týkala některých rovnic, řešitelných kvadraturami. Diferenciálních rovnic se ovšem týkala mimo to ještě četná sdělení z aplikací matematiky. Nápadný byl velký počet sdělení z funkcionální analysy. Jde o skupinu mladých matematiků, soustředěnou okolo prof. J. TAGAMLICKÉHO. Prof. Tagamlicki sám měl sdělení o „kuželích" ve funkcionální analyse a o „ireducibilních bodech" kuželů. V jeho pracích i v pracích jeho žáků se zračí snaha pěstovat funkcionální analysu v těsném sepětí s problematikou klasické analysy. Proto by bylo možno zařadit některá z těchto sdělení též do různých oborů klasické analysy. Dobrým předpokladem pro vytvoření školy právě s tímto zaměřením byly jistě dřívější práce akademiků Čakalova a Obreškova z analysy reálných funkcí. Z geometrických přednášek čtyři byly věnovány přímkovým útvarům (zborcené plochy, kongruence, komplexy), jedna novému způsobu zavedení orientace v trojrozměrném projektivním prostoru, jedna deskriptivní geometrii n-rozměrného prostoru. Sdělení z theorie pravděpodobnosti se týkala distribučních funkcí. Pokud se týče aplikací matematiky (zvláště na mechaniku a thermodynamiku), má bulharská matematika dobrou tradici díky pracím akademiků POPOVA a CENOVA. V jedné z plenárních schůzí vyložil *Popov* svou theorii ireversibilních thermodynamických procesů, *Cenov* přednášel o rovnicích analytické dynamiky. Několik sdělení se týkalo diferenciálních rovnic složených kyvadel.

Z tohoto přehledu je patrno, že se bulharská matematika rozvíjí v různých směrech; kvalita příspěvků byla velmi dobrá. Také je ovšem patrno, že některé obory jsou pěstovány se značnou intensitou, jiné zůstávají poněkud stranou. To je ostatně nevyhnutelné všude, snad kromě početně největších národů. Tato jistá nerovnoměrnost rozvoje v jednotlivých oborech vědy u různých národů je jednou z četných příčin, které činí tak naléhavou mezinárodní vědeckou spolupráci. Bulharští matematikové — a také vědečtí pracovníci z jiných oborů, pokud jsem s nimi mluvil — si velmi přejí další rozvoj styků s československými vědci; podle mého mínění by byl prospěšný pro obě strany.

Organisace sjezdu byla vzorná, přijetí zahraničních hostí a celé ovzduší sjezdu výjimečně přátelské. Po sjezdu ztrávili zahraniční účastníci ještě několik dní výlety po Bulharsku, kde se seznámili s krásami bulharské přírody, s památkami bulharských dějin i s prací a úspěchy bulharského lidu. Naši hostitelé se vyznamenali po stránce vědecké, organisační i společenské, a účastníci si odnášejí ze sjezdu nejlepší vzpomínky.

Vojtěch Jarník, Praha.

NÁVŠTĚVY ZAHRANIČNÍCH MATEMATIKŮ V ČSR

Koncem srpna 1956 navštívil Matematický ústav ČSAV maďarský matematik G. ADLER, vědecký pracovník Matematického ústavu maďarské akademie věd. Prohlédl si ústav a navštívil Ústav matematických strojů, kde si prohlédl čsl. matematické stroje.

Na své cestě na IV. kongres rakouských matematiků ve Vídni zastavila se v Praze ve dnech 13.—16. září dr E. SCHWARZOVÁ, vědecká pracovnice Matematického ústavu německé akademie věd v Berlíně. Navštívila Matematický ústav ČSAV, prohlédla si Ústav matematických strojů ČSAV a seznámila se s prací matematických kateder Vysokého učení technického.

Ve dnech 27.—30. září 1956 navštívil Prahu prof. dr E. WEINEL, ředitel Ústavu aplikované matematiky University v Jeně, s chotí. Prof. Weinel prohlédl si Prahu a navštívil Matematický ústav; v diskusi s předními vědeckými pracovníky ústavu byly porovnány zejména zkušenosti obou ústavů v oboru matematických aplikací.

I. Babuška, Praha.

V polovině září navštívil katedry matematiky ČVUT prof. dr WLADIMIERZ WRONA, vedoucí katedry matematiky Akademie báňské a hutní v Krakově. Prof. Wrona se informoval o práci pedagogické a odborné na katedrách a prohlédl si práce studentů a pohovořil s učiteli. Při té příležitosti bylo dohodnuto, že si katedra matematiky Akademie báňské a hutní v Krakově a katedra matematiky fakulty inženýrského stavitelství ČVUT vymění vědecké pracovníky na kratší (3 až 6 denní) reciproční pobyt a že obě katedry si budou podávat trvale informace o práci pedagogické i odborné a vyměňovat příležitostně publikace.

Prof. W. Wrona přednášel dne 17. září 1956 v Matematické obci pražské na tema „O anholomních systémech".

V přednášce nejdříve informoval účastníky o vědecké práci krakovských matematiků a potom promluvil o své dřívější práci v oboru diferenciální geometrie anholonomních systémů.

Jsou-li $\overset{(\gamma')}{\Omega}{}^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$, $\overset{(\gamma'')}{\Omega}{}^{\alpha''}_{\beta''\gamma''}$ t. zv. relativní anholonomní útvary a platí-li, že všechny jejich složky identicky vymizí, pak říkáme, že systémy (γ'), (γ'') jsou ekvianholonomní. Souřadnicové systémy tvoří třídu takových ekvianholonomních systémů.

Přednášející se zabýval otázkou, existují-li další takové třídy. Odpověď je kladná.

Podrobný text práce autor připravuje pro tisk v některém našem časopise.

F. Vyčichlo, Praha.

Ve dnech 11. října až 1. listopadu 1956 dleli v ČSR na studijní cestě vědečtí pracovníci oddělení aplikované matematiky Výzkumného ústavu pro matematiku Německé akademie věd v Berlíně dr GISELE REISSIGOVÁ a HELMUT THIELE. Za svého pobytu navštívili některá pracoviště ČSAV a ministerstva zdravotnictví v Praze a dva výzkumné ústavy v Brně, kde studovali metody matematické statistiky u nás používané. Oba hosté seznámili též pracovníky oddělení matematické statistiky MÚ ČSAV s prací skupiny matematické statistiky při oddělení aplikované matematiky Výzkumného ústavu pro matematiku Německé akademie věd.

Jaromír Abrham, Eva Šetinová, Praha.

OBHAJOBY DISERTAČNÍCH PRACÍ KANDIDÁTŮ MATEMATICKO-FYSIKÁLNÍCH VĚD

Na přírodovědecké fakultě MU v Brně obhájil dne 10. října 1956 dr *Karel Čulík* disertační práci „Theorie zobecněných konfigurací (sestav)" a dne 14. listopadu 1956 doc. dr *Miroslav Novotný* práci „O representaci částečně uspořádaných množin".

Na matematicko-fysikální fakultě KU v Praze obhájil dne 18. října 1956 prom. matematik *Václav Dupač* práci „O Kiefer-Wolfowitzově stochastické aproximační methodě".

Při Matematickém ústavě ČSAV v Praze obhájili dne 25. října 1956 disertační práce tito kandidáti matematicko-fysikálních věd:

Olga Pokorná práci „Řešení soustav lineárních algebraických rovnic — přehled a srovnávání method";

Jiří Sedláček práci „O konečných orientovaných grafech";

doc. dr *Karel Rektorys* práci „Stanovení teploty v přehradě při působení vnitřních zdrojů tepla".

Redakce.

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

V matematické obci pražské pokračovaly opět od začátku studijního roku 1956—57 pravidelné pondělní přednášky a diskuse (od 17 hod. 15 minut), které pořádá Matematický ústav Československé akademie věd spolu s Jednotou československých matematiků.

Konaly se tyto přednášky s diskusemi:

17. 9. 1956: *Vladimierz Wrona*, Kraków, O anholonomních systémech.

15. 10. 1956: *Jenö Szep*, Über eine neue Erweiterung von algebraischen Strukturen.

22. 10. 1956: *Josef Novák* a *I. Babuška*, Třetí všesvazový sjezd matematiků.

24. 10. 1956: *Anežka Žaludová*, Konference matematických statistiků v Nottinghamu 1956.

29. 10. 1956: *Anton Kotzig*, Súvislost a pravidelná súvislost v grafoch.

5. 11. 1956: *Jan Kořán* a *Vladimír Kořínek*, O kongresu Mezinárodní unie pro dějiny přírodních věd ve Florencii v září 1956.

12. 11. 1956: *Jan Mařík*, Dirichletova úloha.

21. 11. 1956: *Jaroslav Hájek*, O theorii výběrových šetření.

26. 11. 1956: *Ladislav Rieger*, O nenormálních modelech aritmetiky přirozených čísel.

3. 12. 1956: *Jaroslav Kurzweil*, O spojité závislosti na parametru a jistých zobecněních v theorii obyčejných diferenciálních rovnic.

10. 12. 1956: *Albína Dratvová*, Z dějin nejstarší matematiky (referát o Waerdenově práci Science Awakening) — přednášku pořádala JČMF a komise pro dějiny přírodních věd a techniky ČSAV.

ČTENÁŘŮM A PŘISPĚVATELŮM

Od letošního ročníku budou se v Časopise pro pěstování matematiky také otiskovat v omezeném počtu některé *příspěvky s textem cizojazyčným* spolu se dvěma *výtahy*, a) českým, b) cizojazyčným a to ruským, nebude-li psán text článku rusky, nebo v opačném případě s resumé v jiném světovém jazyku.

O tom, zda článek bude uveřejněn a zda bude otištěn v jazyku českém (slovenském) příp. cizím rozhoduje po provedeném recensním řízení redakční rada.

K článkům s textem českým resp. slovenským budou zpravidla připojena dvě cizojazyčná resumé, jedno ruské a druhé v jiném světovém jazyku.

*

Pro *úpravu textu článků*, které autoři posílají redakci, poznamenáváme:

1. Na začátku každého článku se v časopise tiskne t. zv. *sunto*, což je krátká asi ve 2—3 větách vyjádřená charakteristika příspěvku. Tyto charakteristiky se dále pak pravidelně otiskují v mezinárodním časopise Чехосл. мат. журнал (Czechosl. Math. Journal) pro informaci ciziny (v jazyce ruském a anglickém).

2. Citovaná *literatura*, číslovaná obvykle [1], ..., se uvádí souborně na konci článku (sovětská literatura azbukou) a příslušné odkazy se v textu označují pouze čísly [1]. ...

3. *Obrázky* mají autoři, pokud je dodávají sami, popisovat normalisovaným písmem (skloněným) podle šablony a to nejlépe perem číslo 5 (výška písmen 5 mm) pro reprodukci ve zmenšení 1 : 2.

*

Oprava. Prof. A. RÉNYI (Budapešť) nás upozornil, že sdělení „Sur l'univalence du potentiel dans l'hydrodynamique", přednesené v I. sekci na IV. sjezdu československých matematiků v Praze dne 8. září 1955 a oznámené v Časopise pro pěstování matematiky na str. 98, roč. *81* (1956), bylo sdělení jeho paní K. RÉNYI. Prosíme, aby si čtenáři uvedené nedopatření laskavě opravili.