ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 82 * PRAHA, 31. V. 1957 * ČÍSLO 2

O JISTÉ CHARAKTERISACI KOMPAKTNÍCH SOUVISLÝCH MNOŽIN V EUKLEIDOVSKÉM PROSTORU

MILAN SEKANINA, Brno.

DT: 519.51

(Došlo dne 20. prosince 1955.)

Předmětem následujících úvah jest vyšetřit možnost obrácení následující věty 1, které použil v konkretním případě K. REINHARDT ve své disertaci: Über die Zerlegung der Ebene in Polygone, Borna Leipzig, 1918, str. 18, a její zobecnění pro m-rozměrný eukleidovský prostor E_m.

I

Věta 1. *Budiž $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel. Nechť*

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 . \tag{1}$$

Potom derivace množiny všech prvků posloupnosti $\{a_n\}$ je souvislá[1]) *množina.*

Dříve než přistoupíme k důkazu této věty, uvedeme tuto definici:

Řekneme, že množina M reálných čísel tvoří ε-*síť* (ε kladné reálné číslo) v intervalu $[a, b]$, existuje-li pro každé $c \in [a, b]$ $m_c \in M$ tak, že $|c - m_c| < \varepsilon$.

Připomeňme dále, že jedinými souvislými množinami na reálné ose je prázdná množina, bod a interval (ohraničený i neohraničený). Z definice je dále patrno, že množina M jest hustá v $[a, b]$, obsahuje-li pro libovolné $\varepsilon > 0$ ε-síť v $[a, b]$.

Důkaz věty 1. Je-li M' prázdná množina nebo jediný bod, není co dokazovat. Buďtež tedy c a d hromadnými body množiny prvků z $\{a_n\}$, $d > c$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle předpokladu existuje n' tak, že pro $n > n'$ platí $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$. Zvolme a_{n_1}, a_{n_2} tak, že $|a_{n_1} - c| < \varepsilon$, $|a_{n_2} - d| < \varepsilon$, $n_2 > n_1 > n'$. Potom body $a_{n_1}, a_{n_1+1}, \ldots, a_{n_2-1}, a_{n_2}$ tvoří ε-síť v $[c, d]$. Jest tedy množina prvků z $\{a_n\}$ hustá v $[c, d]$, jest tedy $[c, d]$ částí její derivace.

[1]) Říkáme, že $M \subset P$, kde P je topologický prostor, je souvislá množina, jestliže neobsahuje neprázdné části K, L tak, že platí $K \cup L = M$, $\overline{K} \cap \overline{L} \cap M = \emptyset$. (Viz na př. KURATOWSKI: Topologie II, 1950, str. 79.)

Předpoklad (1) lze vyslovit též takto: Ke každému $\varepsilon > 0$ a každému přirozenému číslu k existuje přirozené číslo n' tak, že pro $n > n'$ a $j \leqq k$ platí $|a_{n+j} - a_n| < \varepsilon$.

Formulujme nyní pro spočetnou ohraničenou množinu (spočetnou množinou rozumíme množinu mohutnosti $\aleph_0$) obdobu Cauchyova konvergenčního kriteria takto: spočetná ohraničená množina reálných čísel má za derivaci jediný bod tehdy a jen tehdy, dá-li se uspořádat v posloupnost $\{a_n\}$ tak, že platí toto: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n' tak, že pro $n > n'$ a každé přirozené číslo j platí $|a_{n+j} - a_n| < \varepsilon$. Tedy rozdíl proti hořejšímu předpokladu je v tom, že zde je j libovolné přirozené číslo.

Obrácením věty 1 pro ohraničenou množinu je

Věta 2. *Budiž M spočetná ohraničená množina reálných čísel. Nechť derivace M' množiny M je souvislá množina. Potom M se dá uspořádat v posloupnost $\{a_n\}$ tak, že platí* (1).

Důkaz. Nechť $M \subset [a, b]$. Podle Weierstrassovy věty jest $M' \neq \emptyset$. Obsahuje-li M' jen jeden bod, jest věta správná podle shora uvedené formulace Cauchyova konvergenčního kriteria. Nechť tedy M' jest interval, $M' = [c, d]$. Uspořádejme nejprve množinu $[c, d] \cap M = N$ libovolně v posloupnost $\{a'_n\}$. Utvořme nyní konečné $\frac{1}{n}$ - sítě S_n pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ v $[c, d]$ takto:

S_1 je konečná 1-síť v $[c, d]$, $S_1 \subset N$ a $a'_1 \in S_1$.

S_n je konečná $\frac{1}{n}$ - síť v $[c, d]$, $S_n \subset N - \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k$ a $a'_{j_n} \in S$,

kde index j_n je nejmenší ze všech i, pro něž $a'_i \in N - \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k$. Množiny S_n existují, neboť $N - \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k$ jest množina hustá v $[c, d]$ pro každé n (N jest množina hustá v $[c, d]$ podle předpokladu, S_k jsou konečné množiny).

1. Nechť $a \neq c$, $d \neq b$. Potom položme $\{[a, c) - [c - \frac{1}{2}, c)\} \cap M = L_0$, $L_n = \left[c - \frac{1}{2n}, c - \frac{1}{2(n+1)}\right) \cap M$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\left\{(d, b] - \left(d, d + \frac{1}{2}\right]\right\} \cap M = P_1$, $P_{n+1} = M \cap \left(d + \frac{1}{2(n+1)}, d + \frac{1}{2n}\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Množiny L_n a P_n jsou konečné, poněvadž jsou to množiny ohraničené, jejichž derivace jest prázdná množina. Každou z množin L_n a P_n uspořádejme libovolně, S_{2n-1} uspořádejme vzestupně, S_{2n} sestupně. Položme dále $M_{2n} = S_n$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, $M_{4n+1} = L_n$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, $M_{4n-1} = P_n$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Systém všech M_n pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ uspořádejme tak, že $M_m < M_n \Leftrightarrow m < n$. Jest nyní $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ uspořádané sjednocení uspořádaných množin. Prostřednic-

tvím těchto uspořádání jest způsobem obvyklým definováno uspořádání množiny M [2]). Protože M_n jsou konečné a systém všech M_n jest uspořádán v typ ω, jest i M uspořádána v posloupnost, kterou označme $\{a_n\}$. Nechť $a_n \in M_j$, $a_{n+1} \in \in M_l$ ($l = j$ nebo $j + 1$ nebo $j + 2$). Potom pro $j > 3$ jest, jak plyne snadno z konstrukce M_n, $|a_{n+1} - a_n| < \frac{8}{j-1}$. Protože pro $n \to \infty$ též $j \to \infty$, jest $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$, tedy $\{a_n\}$ jest posloupnost, jejíž existenci jsme chtěli dokázat.

2. Je-li $a = c$ nebo $d = b$, jest postup naprosto analogický předešlému. Přejděme nyní k případu, kdy M je neohraničená.

Věta 3. *Budiž M spočetná množina reálných čísel. Nechť jest buď* 1. *hustá na reálné ose, nebo* 2. *M zdola ohraničená, $M' = [a, +\infty) = J$, nebo* 3. *M shora ohraničená, $M' = (-\infty, a] = J$. Potom se M dá uspořádat do posloupnosti $\{a_n\}$, pro niž platí* (1).

Důkaz: Případ 1. Důkaz je obdobný důkazu věty 2, proto je podán poněkud stručnější formou. Nechť $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Položme $[-s_n, s_n] = I_n$. Uspořádejme M libovolně v posloupnost $\{a'_n\}$. Definujme $\frac{1}{n}$ - sítě S_n takto: S_1 je konečná 1-síť v I_1, $S_1 \subset M \cap I_1$ a $a'_{j_1} \in S_1$, kde j_1 je první index i, pro nějž platí $a'_i \in M \cap I_1$. S_n je konečná $\frac{1}{n}$ - síť v I_n, $S_n \subset \left(M - \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} S_k\right) \cap I_n$ a $a'_{j_n} \in S_n$, kde j_n je první index, pro nějž $a'_i \in (M - \bigcup\limits_{n=1}^{n-1} S_k) \cap I_n$.

Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, jest $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n = M$. Nechť $S_m < S_n \Leftrightarrow m < n$, S_{2n} uspořádejme vzestupně, S_{2n-1} sestupně. M jest pak uspořádané sjednocení uspořádaných konečných disjunktních množin, tedy, jako při důkazu věty 2, jest těmito uspořádáními M uspořádána v posloupnost $\{a_n\}$. Protože

$$\lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ jest } \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

V případě 2. a 3. definujeme podobně jako v případě 1. množiny S_n, při čemž místo o množině M uvažujeme o množině $M \cap J$. $M - J$ potom rozložíme na množiny P_n (v případě 2) nebo L_n (v případě 3) jako při důkazu věty 2. Uspořádání systému všech množin P_n a S_n, resp. L_n a S_n, jest obdobné jako v důkazu věty 2.

Je-li M spočetná množina reálných čísel, pro niž M' je souvislá množina, potom, jak je nyní snadno patrno, jest možno psát M jako sjednocení dis-

[2]) T. j. $x, y \in M$, $x < y$, když buď $x \in M_m$, $y \in M_n$, $m < n$, nebo $x, y \in M_m$ a prvek x je před prvkem y v uspořádání množiny M_m.

junktních množin M^1, M^2, M^3, kde M^1 se dá uspořádat v posloupnost monotonně klesající, M^2 v posloupnost monotonně rostoucí, M^3 v posloupnost, pro niž platí (1). V tomto sjednocení mohou být některá M^i prázdné množiny.

II

V E_m, $m > 1$, věta obdobná větě 1 v plné šíři neplatí, jak dokazuje následující příklad.

Příklad 1: Buďtež v rovině (x, y) dány křivky $y^{(1)} = e^x$ a $y^{(2)} = -e^x$. Potom pro body $A = (x_1, e^{x_1})$, $B = (x_2, e^{x_2})$ platí

$$\varrho(A, B) \leqq |s(A, B)| , \tag{2}$$

kde ϱ je metrika v E_m, $|s(A, B)|$ je délka oblouku křivky $y^{(1)}$ mezi body A a B. Obdobná nerovnost platí pro body křivky $y^{(2)}$. Za počátek parametru s pro $y^{(1)}$ (resp. $y^{(2)}$) zvolme bod $(0, 1)$ (resp. $(0, -1)$). Při tom $s > 0$ odpovídá $x > 0$. Uvažujme o množině bodů na $y^{(1)}$ a $y^{(2)}$, pro něž s je racionální. Jako při důkazu věty 3 sestrojme $\frac{1}{n}$ - sítě (vzhledem k s) pro $y^{(1)}$ (resp. $y^{(2)}$) $S_1^{(1)}, \ldots, S_n^{(1)}, \ldots$ (resp. $S_1^{(2)}, \ldots, S_n^{(2)}, \ldots$). $S_{2n-1}^{(1)}$ a $S_{2n}^{(2)}$ (resp. $S_{2n}^{(1)}$ a $S_{2n-1}^{(2)}$) uspořádejme sestupně (resp. vzestupně) a systém všech $S_n^{(i)}$ $(i = 1, 2;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ uspořádejme následovně: $S_1^{(1)} < S_1^{(2)} < S_2^{(2)} < S_2^{(1)} < S_3^{(1)} < \ldots$ Poněvadž křivky $y^{(1)}$ a $y^{(2)}$ se asymptoticky blíží pro $x \to -\infty$ (t. j. pro $s \to -\infty$) a platí (2), je, podobně jako dříve, těmito uspořádáními definováno uspořádání množiny M do posloupnosti $\{A_n\}$, pro niž platí

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(A_{n+1}, A_n) = 0 . \tag{3}$$

Ale M', která se skládá z obou křivek $y^{(1)}$ a $y^{(2)}$, není množina souvislá. Platí však

Věta 1a. *Budiž $M = \{A_n\}$ ohraničená posloupnost bodů v E_m. Nechť platí* (3). *Potom M' je souvislá množina.*

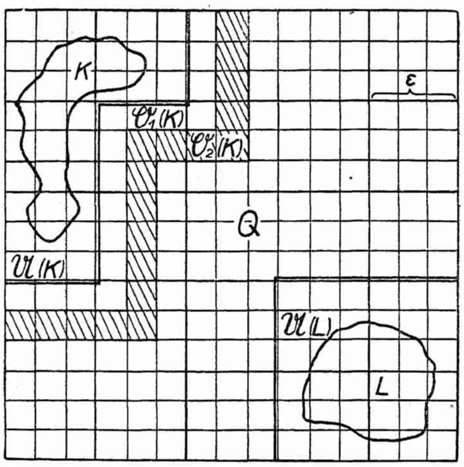
Důkaz. Připusťme, že existují dvě neprázdné, disjunktní uzavřené množiny L a K tak, že $L \cup K = M'$[3]). Poněvadž M jest ohraničená množina, existuje m-rozměrná krychle Q, která obsahuje ve svém vnitřku M i M'. Z ohraničenosti dále plyne, že $\varrho(K, L) > 0$. Zvolme krychlovou síť v Q s krychlemi o hraně $\varepsilon < \frac{\varrho(K, L)}{3\sqrt{m}}$ (viz obr. 1). Sjednocení systémů krychlí[4]), které jsou incidentní s množinou K (resp. L), označme $\mathfrak{U}(K)$ (resp. $\mathfrak{U}(L)$). Jest $\mathfrak{U}(K) \cap \cap\, \mathfrak{U}(L) = \emptyset$. Utvořme nyní v Q krychlovou síť s krychlemi o hraně $\frac{\varepsilon}{3}$ a označme

[3]) Ekvivalence těchto předpokladů s předpoklady v poznámce 1 je patrná, uvědomíme-li si, že M' je uzavřená množina.

[4]) Krychle uvažujeme jako uzavřené množiny, tedy včetně stěn.

jako $\mathfrak{D}_1(K)$ sjednocení množiny krychlí z této sítě, které mají s $\mathfrak{U}(K)$ společný alespoň jeden hraniční bod, avšak žádný bod vnitřní, jako $\mathfrak{D}_2(K)$ sjednocení množiny krychlí z této sítě, které mají s $\mathfrak{D}_1(K)$ alespoň jeden hraniční bod společný, ale žádný bod vnitřní s $\mathfrak{U}(K) \cup \mathfrak{D}_1(K)$. Z volby čísla ε je patrno, že $\mathfrak{U}(K) \cap \mathfrak{D}_2(K) = \emptyset$, $\mathfrak{U}(L) \cap \mathfrak{D}_2(K) = \emptyset$.

Nyní jest nekonečně mnoho bodů z M jednak v $\mathfrak{U}(K)$, jednak v $\mathfrak{U}(L)$. Nechť $A_{n_1} \in \mathfrak{U}(K)$, $A_{n_2} \in \mathfrak{U}(L)$, při čemž n_1 a n_2 ($n_2 > n_1$) nechť jsou větší než n', kde n' zvolme tak, že $\varrho(A_{n+1}, A_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ pro $n > n'$. Potom leží alespoň jeden z bodů $A_{n_1}, A_{n_1+1}, \ldots, A_{n_2+1}, A_{n_2}$ v $\mathfrak{D}_2(K)$. Protože toto platí pro nekonečně mnoho n_1, jest v $\mathfrak{D}_2(K)$ nekonečně mnoho bodů z M a jest tedy v $\mathfrak{D}_2(K)$ alespoň jeden bod z M', což je spor.



Obr. 1.

Věta 2a. *Budiž M spočetná ohraničená množina bodů z E_m, M' budiž souvislá. Potom se dá M uspořádat do posloupnosti $\{A_n\}$, pro niž platí* (3).

Důkaz. Nechť $M \subset Q$, kde Q je m-rozměrná krychle; její hranu zvolme za jednotku. Nechť S_ε je síť v Q s krychlemi o hraně ε. Její prvky označme $a_i^{(\varepsilon)}$. Budiž $\mathfrak{U}_\varepsilon$ sjednocení všech $a_i^{(\varepsilon)}$, které obsahují nekonečně mnoho bodů z M. $\mathfrak{U}_\varepsilon$ je souvislá množina. Konečnou posloupnost $\{a_{i_k}^{(\varepsilon)}\}$ takovou, že $a_{i_k}^{(\varepsilon)}$ a $a_{i_{k+1}}^{(\varepsilon)}$ mají společný alespoň jeden hraniční bod, nazývejme řetězcem (v řetězci se mohou prvky opakovat). Zvolme nyní libovolně, ale pevně $a_i^{(\varepsilon)} \subset \mathfrak{U}_\varepsilon$. Existuje konečný řetězec, který má za první a poslední prvek $a_i^{(\varepsilon)}$, takový, že jeho prvkem jest každé $a_j^{(\varepsilon)} \subset \mathfrak{U}_\varepsilon$[5]). Takový řetězec označme $\mathfrak{B}(a_i^{(\varepsilon)})$. Těchto řetězců jest nekonečně mnoho. V dalším výkladu zvolíme vždy jeden libovolně, ale pevně.

Uspořádejme nyní M v libovolnou posloupnost $\{A'_n\}$. Utvořme síť $S_{\frac{1}{2}}$ a množinu $\mathfrak{U}_{\frac{1}{2}}$. Zvolme libovolně $a_{i_1}^{(\frac{1}{2})}$ a utvořme $\mathfrak{B}(a_{i_1}^{(\frac{1}{2})})$. Množinu $M - \mathfrak{U}_{\frac{1}{2}} = N_0$, která je konečná, uspořádejme libovolně. Dále v každém $a_{i_k}^{(\frac{1}{2})} \in \mathfrak{B}(a_{i_1}^{(\frac{1}{2})})$ zvolme jeden bod z M (označme jej $A_{i_k}^{(\frac{1}{2})}$) a to tak, aby platilo: 1. Není-li $A'_1 \in N_0$, potom $A'_1 = A_{i_k}^{(\frac{1}{2})}$ pro jisté k. 2. $A_{i_k}^{(\frac{1}{2})} \neq A_{i_j}^{(\frac{1}{2})}$ pro $k \neq j$. Množinu všech $A_{i_k}^{(\frac{1}{2})}$ označme N_1 a uspořádejme ji takto: $A_{i_k}^{(\frac{1}{2})} < A_{i_j}^{(\frac{1}{2})} \Leftrightarrow k < j$. Položme dále $N_0 < N_1$. Utvořme $S_{\frac{1}{4}}$, $\mathfrak{U}_{\frac{1}{4}}$. Zvolme $a_{i_1}^{(\frac{1}{4})} \in \mathfrak{U}_{\frac{1}{4}}$,

$$a_{i_1}^{(\frac{1}{4})} \subset a_{i_1}^{(\frac{1}{2})}. \tag{4}$$

---

[5]) A naopak, každý prvek z tohoto řetězce je částí $\mathfrak{U}_\varepsilon$.

Utvořme řetězec $\mathfrak{B}(a_{i_1}^{(\frac{1}{4})})$, zvolme v každém $a_{i_k}^{(\frac{1}{4})}$ bod z $M - N_0 \cup N_1$ (označme jej $A_{i_k}^{(\frac{1}{4})}$) tak, že platí toto:

1. Není-li $A_2' \in M - \mathfrak{U}_{\frac{1}{4}}$, potom $A_2' = A_{i_k}^{(\frac{1}{4})}$ pro jisté k. 2. $A_{i_k}^{(\frac{1}{4})} \neq A_{i_j}^{(\frac{1}{4})}$ pro $k \neq j$.

Množinu všech $A_{i_k}^{(\frac{1}{4})}$ označme $N_2^{(1)}$. Položme dále $N_2^{(2)} = M - (\mathfrak{U}_{\frac{1}{4}} \cup N_0 \cup N_1)$. Toto jest konečná množina. Nechť $\mathfrak{D}(A_{i_k}^{(\frac{1}{4})})$ značí množinu všech těch bodů $A \in N_2^{(2)}$, pro něž platí $\varrho(A, A_{i_k}^{(\frac{1}{4})}) \leqq \varrho(A, A_{i_j}^{(\frac{1}{4})})$ pro všechna j. Protože $N_2^{(2)} \subset \mathfrak{U}_{\frac{1}{2}}$, je pro $A \in \mathfrak{D}(A_{i_k}^{(\frac{1}{4})})$

$$\varrho(A, A_{i_k}^{(\frac{1}{4})}) \leqq \frac{1}{2}\sqrt{m}\,. \tag{5}$$

Nechť

$$\mathfrak{D}'(A_{i_k}^{(\frac{1}{4})}) = (\mathfrak{D}(A_{i_k}^{(\frac{1}{4})}) - \bigcup_{l=1}^{k-1} \mathfrak{D}(A_{i_l}^{(\frac{1}{4})})) \cup \{A_{i_k}'^{(\frac{1}{4})}\}\,.$$

$\mathfrak{D}'(A_{i_k}^{(\frac{1}{4})})$ jsou konečné a navzájem disjunktní množiny. Uspořádejme jednotlivé $\mathfrak{D}'(A_{i_k}^{(\frac{1}{4})})$ libovolně. Položme dále

$$\mathfrak{D}'(A_{i_k}^{(\frac{1}{4})}) < \mathfrak{D}'(A_{i_j}^{(\frac{1}{4})}) \Leftrightarrow k < j\,.$$

Označme $N_2 = \bigcup \mathfrak{D}'(A_{i_k}^{(\frac{1}{4})})$, kde se sjednocení provede přes všechny $A_{i_k}^{(\frac{1}{4})} \in N_2^{(1)}$. Jest to uspořádané sjednocení uspořádaných disjunktních množin. Tato uspořádání definují uspořádání množiny N_2 (kterážto množina je konečná, neboť $N_2 = N_2^{(1)} \cup N_2^{(2)}$). Položme dále $N_1 < N_2$.

Podobně postupně zkonstruujeme $S_{\frac{1}{2^n}}$, $\mathfrak{U}_{\frac{1}{2^n}}$, N_n. Je patrno, že 1. N_n je konečná uspořádaná množina; 2. N_n jsou vzájemně disjunktní; 3. $M = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$. Je tedy M uspořádaným sjednocením typu ω uspořádaných konečných disjunktních množin, čímž je M uspořádána v posloupnost $\{A_n\}$, která v důsledku relací analogických k (4) a (5) a definice množin $\mathfrak{D}(A_{i_k}^{(\frac{1}{2^n})})$ a řetězce $\mathfrak{B}(a_{i_1}^{(\frac{1}{2^n})})$ splňuje (3). Tím je důkaz dokončen.

Poněvadž E_m je separabilní prostor, je každá neprázdná kompaktní (t. j. ohraničená a uzavřená) množina derivací jisté ohraničené spočetné množiny bodů v E_m. Odtud plyne

Věta 4. *$M \subset E_m$, $M \neq \emptyset$ je souvislá kompaktní množina tehdy a jen tehdy, existuje-li spočetná ohraničená množina $N \subset E_m$ taková, že* 1. *$N' = M$,* 2. *N se dá uspořádat v posloupnost $\{A_n\}$, pro niž platí* (3).

Za zmínku stojí, že věty 1a a 2a se nedají přenést do Hilbertova prostoru. To je vidět na následujících příkladech.

Příklad 2. Hilbertův prostor označme H. Sestrojme $M_1 \subset H$ a $M_2 \subset H$ takto: M_1 se skládá z úseček[6]) $U_1^1 = \left[(1, 0, \ldots, 0, \ldots), \left(\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, \ldots\right)\right]$, $U_2^1 = \left[\left(\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, \ldots\right), \left(\frac{1}{2}, 1, 0, \ldots, 0, \ldots\right)\right], \ldots, U_n^1 = \left[\left(\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, \ldots\right), \left(\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\right)\right]$ (n-tá souřadnice „pravého" koncového bodu je rovna 1), ...

Podobně M_2 se skládá z úseček $U_1^2 = \left[(-1, 0, \ldots, 0, \ldots), \left(-\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, \ldots\right)\right]$, $\ldots, U_n^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}, 0, \ldots 0, \ldots\right), \left(-\frac{1}{n}, 0, \ldots 0, 1, 0, \ldots\right)\right], \ldots$. Zavedeme-li podobně jako v příkladu 1 parametr $s_n^{(i)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots, i = 1, 2$ pro $U_n^{(i)}$ (za počátek zvolme pro všechny $U_n^1(U_n^2)$ bod $(\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots)$, resp. $(-\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots)$) a uvažujeme-li o bodech, pro něž $s_n^{(i)}$ je racionální, dostaneme spočetné množiny $M_1^* \subset M_1$, $M_2^* \subset M_2$. Množina $M_1^* \cup M_2^*$ je ohraničena a dá se uspořádat do posloupnosti, splňující (3)[7]). Dále jest $(M_1^* \cup M_2^*)' = M_1 \cup M_2$. Při tom M_1 i M_2 jsou uzavřené množiny, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Tedy $(M_1^* \cup M_2^*)'$ není souvislá množina.

Příklad 3. Množina M bodů A_n z H, kde $A_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, jest ohraničená a $M' = \emptyset$. Množina M se však nedá uspořádat v posloupnost splňující (3), neboť $\varrho(A_m, A_n) = \sqrt{2}$ $(m \neq n)$.

Také věta 3, případ 1. se dá přenést do E_m v plné šíři.

Věta 3a. *Budiž M spočetná množina bodů v E_m, hustá v E_m. Potom se M dá uspořádat do posloupnosti $\{A_n\}$ tak, že platí* (3).

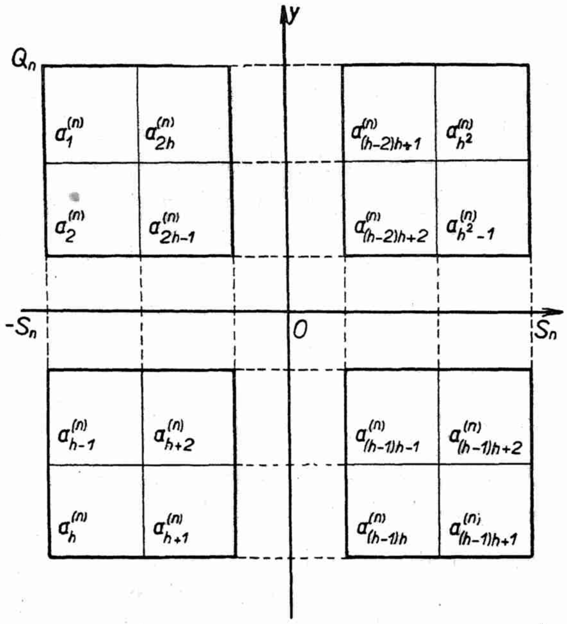
Naznačíme důkaz pro stručnost jen pro rovinu. Uspořádejme M v posloupnost $\{A_n'\}$. Utvořme soustavu čtverců (jak naznačeno na obr. 2) Q_n o straně $2s_n$ (označení jako v důkazu věty 3) a v každém sestrojme čtvercovou síť o straně $\varepsilon < \frac{1}{2n}$, kde ε zvolíme tak, aby $\frac{2s_n}{\varepsilon}$ bylo sudé. Jednotlivé čtverce sítě označme $a_k^{(n)}$, jak na obrázku naznačeno. Zvolme jeden $a_{k_1}^{(1)}$ tak, že $A_{j_1}' \in a_{k_1}^{(1)}$, kde j_1 je prvý index i, pro který $A_i' \in M \cap Q_1$. Budeme psát $A_{j_1}' \sim a_{k_1}^{(1)}$. Z ostatních $a_k^{(1)}$ vybereme po jednom vnitřním bodu $A \in M$. I tu píšeme $A \sim a_k^{(1)}$, což znamená, že bod A byl vybrán ze čtverce $a_k^{(1)}$. Množinu, skládající se ze všech těchto bodů A a z bodu A_{j_1}', označme S_1. Množinu S_n definujme pomocí S_k, $k < n$ takto:

[6]) Úsečkou $[(a_1, a_2, \ldots), (b_1, b_2, \ldots)]$ rozumíme množinu bodů tvaru $(a_1 + (b_1 - a_1)\,t$, $a_2 + (b_2 - a_2)\,t, \ldots)$, kde $t \in [0, 1]$.

[7]) Princip uspořádání je tento: Probíháme „spojitě" sítě, jejichž prvky leží v M^*_1, v $U^1_1 \cup \ldots \cup U^1_n$. Na „konci" úsečky U^1_n přejdeme na úsečku U^2_n, proběhneme „spojitě" obdobné sítě v $U^2_1 \cup \ldots \cup U^2_{n+1}$, na „konci" úsečky U^2_{n+1} přejdeme na U'_{n+1} atd. Vhodnou volbou sítí dospějeme tímto způsobem k žádanému uspořádání množiny $M^*_1 \cup M^*_2$.

1) $S_n \subset Q_n \cap (M - \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k)$. 2) $A'_{j_n} \in S_n$, kde j_n je prvý index i, pro nějž $A'_i \in Q_n \cap$ $\cap (M - \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k)$. 3) Nechť $A_{j_n} \in a_{k_1}^{(n)}$. Potom S_n obsahuje právě jeden vnitřní bod ze všech ostatních $a_k^{(n)}$. Přiřazení toto označme opět symbolem $\sim$.

Množiny S_{2n+1} uspořádejme tak, že $A, B \in S_{2n+1}$, $A < B \Leftrightarrow A \sim a_k^{(2n-1)}$, $B \sim a_p^{(2n-1)}$, $k < p$. Množiny S_{2n} uspořádejme tak, že $A, B \in S_{2n}$, $A < B \Leftrightarrow A \sim$ $\sim a_k^{(2n)}$, $B \sim a_p^{(2n)}$, $k > p$. Závěr důkazu je týž jako ve větě 3.



Obr. 2.