Пусть, наконец, Φ—функция на множестве $f(\langle a, b\rangle)$ такая, что правая часть в (5) имеет смысл. Согласно (3), будет

$$\int_{E_1} \Psi(y)\, dy = \int_a^b \Phi(f(x))\, df(x)\,, \tag{14}$$

где $\Psi(y) = \sum_{f(x)=y} \Phi(f(x))\, \eta(x)$. Если $y \in f(\langle a, b\rangle) - M$ такое, что сумма $\sum_{f(x)=y} \Phi(f(x))\, \eta(x)$ имеет смысл, то [см. (8)]

$$\Psi(y) = \Phi(y) \,.\, \sum_{f(x)=y} \eta(x) = \Phi(y) \,.\, \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}(f(b) - y) - \operatorname{sgn}(f(a) - y))\,;$$

если $y \in E_1 - f(\langle a, b\rangle)$, имеем, очевидно, $\Psi(y) = 0$. Следовательно,

$$\int_{E_1} \Psi(y)\, dy = \int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\, dy.$$

Отсюда и из (14) получаем (5).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. Mařík*, Lebesgueův integrál v abstraktních prostorech, Časopis pro pěst. mat., *76* (1951), 175—194.

[2] *S. Saks*, Theory of the integral, New York.

Výtah

TRANSFORMACE JEDNOROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ

JAN MAŘÍK, Praha.

(Došlo 27. II. 1956.)

Buď f spojitá funkce s konečnou variací v intervalu $\langle a, b\rangle$. Buďte p, n, v positivní, negativní a totální variace funkce f. Definujme v $\langle a, b\rangle$ funkce ϱ, $\varkappa$, η takto: Je-li $x \in (a, b)$ a roste-li (klesá-li) funkce f v bodě x, buď

$$\varrho(x) = \eta(x) = 1\,,\ \varkappa(x) = 0 \quad (\varrho(x) = 0\,,\ \varkappa(x) = 1\,,\ \eta(x) = -1)\,;$$

v ostatních bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ buď $\varrho(x) = \varkappa(x) = \eta(x) = 0$. Buď F (resp. Φ) funkce definovaná na množině $\langle a, b\rangle$ (resp. $f(\langle a, b\rangle)$). Potom je pro skoro všechna $y \in E_1$ množina $f^{-1}(y)$ konečná a vztahy (1) až (5) jsou správné v tomto smyslu:

Jestliže existuje (konečný nebo nekonečný) Lebesgue-Stieltjesův integrál na pravé straně, má součet za integračním znamením na levé straně smysl pro skoro všechna $y \in E_1$, integrál na levé straně existuje ve smyslu Lebesgueově a rovná se integrálu na pravé straně.