Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага.

(Поступило в редакцию 27/II 1956 г.) DT: 517.39

В настоящей работе доказываются некоторые равенства, тесно связанные с известной формулой $\int\limits_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \Phi(f(x))\,f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Теорема. *Пусть f — непрерывная вещественная функция с ограниченным изменением в интервале $\langle a, b\rangle$. Пусть p, n, v — положительное, отрицательное и полное изменение функции f. Определим в $\langle a, b\rangle$ функции ϱ, $\varkappa$, η следующим образом: Если $x \in (a, b)$ и если функция f строго возрастает (убывает) в точке x, пусть $\varrho(x) = \eta(x) = 1$, $\varkappa(x) = 0$ ($\varrho(x) = 0$, $\varkappa(x) = 1$, $\eta(x) = -1$); в остальных точках интервала $\langle a, b\rangle$ положим $\varrho(x) = \varkappa(x) = \eta(x) = 0$. (Следовательно, $\varrho(x) - \varkappa(x) = \eta(x)$, $\varrho(x) + \varkappa(x) = |\eta(x)|$ для всякого $x \in \langle a, b\rangle$.) Пусть F (соотв. Φ) — функция на множестве $\langle a, b\rangle$ (соотв. $f(\langle a, b\rangle)$). В этом случае для почти всех $y \in E_1$ множество $f^{-1}(y)$ является конечным и обладает тем свойством, что*

$$\eta(x) \neq 0 \quad \text{для каждого } x \in f^{-1}(y)\,; \tag{0}$$

далее, равенства

$$\int\limits_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\varrho(x) \Big)\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}p(x)\,, \tag{1}$$

$$\int\limits_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\varkappa(x) \Big)\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}n(x)\,, \tag{2}$$

$$\int\limits_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta(x) \Big)\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}f(x)\,, \tag{3}$$

$$\int\limits_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,|\eta(x)| \Big)\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}v(x)\,, \tag{4a}$$

$$\int\limits_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x) \Big)\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b F(x)\,\mathrm{d}v(x)\,, \tag{4б}$$

$$\int\limits_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \Phi(f(x))\,\mathrm{d}f(x) \tag{5}$$

справедливы в следующем смысле: Если существует (конечный или бесконечный) интеграл Лебега-Стильтьеса в правой части, то сумма за знаком интеграла в левой части имеет смысл для почти всех $y \in E_1$,[1]*) интеграл (Лебега) в левой части существует и равен интегралу в правой части.*

Доказательство. Пусть $q(y)$ — число элементов множества $f^{-1}(y)$. В силу известной теоремы Банаха (см., напр., [2], стр. 280), имеем

$$\int_{E_1} q(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b 1\,.\,\mathrm{d}v(x)\,. \tag{6}$$

Положим $L = E[y; q(y) = \infty]$; пусть A — множество тех точек $x \in (a, b)$, в которых f имеет экстремум. Нетрудно обнаружить, что множество $f(A)$ счетно; из (6) следует, что мера множества L равна нулю. Мера множества

$$M = L \cup f(A) \cup \{f(a), f(b)\}$$

равна поэтому также нулю. Докажем, что

$$q(y) = \sum_{f(x)=y} |\eta(x)|\,, \tag{7}$$

$$\tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}(f(b) - y) - \operatorname{sgn}(f(a) - y)) = \sum_{f(x)=y} \eta(x) \tag{8}$$

для всякого $y \in E_1 - M$. Для этой цели возьмем $y \in E_1 - M$; пусть $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, где $a < x_1 < \ldots < x_r < b$ (r — целое число $\geqq 0$). Так как функция f непрерывна, то $f - y$ сохраняет знак в каждом из интервалов $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_r, b)$. Потому что f не достигает экстремума ни в одной из точек $x_1, \ldots, x_r$, вытекает отсюда, что функция $f - y$ меняет знак в точках $x_1, \ldots, x_r$. Итак, $|\eta(x_j)| = 1$ для $j = 1, \ldots, r$; этим доказано (0) и (7). Далее, очевидно, $\eta(x_{k+1}) = -\eta(x_k)$ для $k = 1, \ldots, r - 1$ и

$$\eta(x_1) = \operatorname{sgn}(y - f(a))\,, \quad \eta(x_r) = \operatorname{sgn}(f(b) - y)\,. \tag{9}$$

Если r — четное, то $\eta(x_r) = -\eta(x_1)$, $\sum_{k=1}^{r} \eta(x_k) = 0$; следовательно,

$$\sum_{k=1}^{r} \eta(x_k) = \tfrac{1}{2}(\eta(x_1) + \eta(x_r))\,. \tag{10}$$

Если r — нечетное число, имеем $\sum_{k=1}^{r} \eta(x_k) = \eta(x_1) = \eta(x_r)$, так что равенство (10) опять справедливо. Из (9), (10) следует (8).

Соотношения (6), (7) показывают, что формула (4а) имеет место для функции $F(x) = 1$ $(x \in \langle a, b \rangle)$. Так как

$$\int_{E_1} \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}(f(b) - y) - \operatorname{sgn}(f(a) - y))\,\mathrm{d}y = f(b) - f(a)\,,$$

---

[1]) Положим $(\pm\infty)\,.\,0 = 0$; если, напр., $F(x) = -\infty$, $\varrho(x) = 0$, то напишем $F(x)\,.\,\varrho(x) = 0$.

видим [см. (8)], что и равенство (3) справедливо для функции $F(x) = 1$! Подобным образом можно доказать, что равенства (3), (4a), а, следовательно, и равенства (1), (2), верны тоже для всякой функции F, являющейся характеристической функцией некоторого интервала $I \subset \langle a, b \rangle$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — система всех ограниченных функций F, для которых (1) справедливо.[2]) Докажем следующее утверждение:

(У) *Если* $F_n \in \mathfrak{F}$, $C > 0$, $|F_n(x)| \leqq C$ $(n = 1, 2, \ldots; a \leqq x \leqq b)$ *и если* $F_n(x) \to F(x)$ *для всякого* $x \in \langle a, b \rangle$, *то* $F \in \mathfrak{F}$.

Действительно, в этом случае

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F_n(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y = \int_a^b F_n(x)\, \mathrm{d}p(x) \tag{11}$$

для $n = 1, 2, \ldots$ Так как последовательность $F_1, F_2, \ldots$ ограничена, имеем

$$\int_a^b F_n(x)\, \mathrm{d}p(x) \to \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x)\,. \tag{12}$$

Если положить $G_n(y) = \sum\limits_{f(x)=y} F_n(x)\, \varrho(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $G(y) = \sum\limits_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x)$ $(y \in E_1 - M)$, то, очевидно, $G_n(y) \to G(y)$ и $|G_n(y)| \leqq \sum\limits_{f(x)=y} |F_n(x)| \leqq Cq(y)$ для $y \in E_1 - M$, и, следовательно, для почти всех y. В силу неравенства $\int\limits_{E_1} Cq(y)\, \mathrm{d}y < \infty$ [см. (6)], получаем $\int\limits_{E_1} G_n(y)\, \mathrm{d}y \to \int\limits_{E_1} G(y)\, \mathrm{d}y$ или

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F_n(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y \to \int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x) \Big)\, \mathrm{d}y\,.$$

Отсюда и из (11), (12) следует, что $F \in \mathfrak{F}$. Этим доказано утверждение (У).

Так как $\mathfrak{F}$ содержит всякую линейную комбинацию своих элементов, то и всякая „ступенчатая" функция (т. е. линейная комбинация характеристических функций и н т е р в а л о в $I \subset \langle a, b \rangle$) принадлежит $\mathfrak{F}$. Нетрудно обнаружить, что всякая непрерывная функция может быть представлена в виде равномерного предела последовательности „ступенчатых" функций и, согласно утверждению (У), является также элементом системы $\mathfrak{F}$.

Пусть, далее, F — ограниченная функция, измеримая по отношению к функции p (p-измеримая). Существуют функции F_1, F_2 второго класса Бера такие, что $F_1(x) \leqq F(x) \leqq F_2(x)$ для каждого $x \in \langle a, b \rangle$ и что $\int\limits_a^b F_i(x)\, \mathrm{d}p(x) = \int\limits_a^b F(x)\, \mathrm{d}p(x)$ $(i = 1, 2)$[3]); очевидно можно предположить, что

---

[2]) Если функция F конечна, то сумма $\sum\limits_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x)$ имеет смысл для всякого $y \in E_1 - M$.

[3]) Существование функций F_1, F_2 вытекает, напр., из теоремы Витали-Каратеодоры (см. [2], стр. 75). Если же, однако, определим интеграл как в [1], то существование функций F_1, F_2 почти очевидно.

и функции F_1, F_2 ограничены. Так как непрерывные функции принадлежат $\mathfrak{F}$, то, в силу утверждения (У), $F_i \in \mathfrak{F}$ для $i = 1, 2$, и, следовательно,

$$\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F_i(x)\, \varrho(x) \Big)\, dy = \int_a^b F_i(x)\, dp(x) = \int_a^b F(x)\, dp(x) \quad (i = 1, 2)\,.$$

Отсюда и из неравенств

$$\sum_{f(x)=y} F_1(x)\, \varrho(x) \leqq \sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x) \leqq \sum_{f(x)=y} F_2(x)\, \varrho(x)\,,$$

верных для почти всех $y \in E_1$, вытекает, что интеграл $\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x) \Big)\, dy$ существует и равен $\int_a^b F(x)\, dp(x)$. Этим доказано, что $F \in \mathfrak{F}$.

Если F — произвольная неотрицательная p-измеримая функция, положим (для $n = 1, 2, \ldots$) $F_n(x) = \min(F(x), n)$ $(x \in \langle a, b \rangle)$ и $G_n(y) = \sum_{f(x)=y} F_n(x) \cdot \varrho(x)$, $G(y) = \sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x)$ $(y \in E_1 - M)$. Так как $F_n \in \mathfrak{F}$, имеем

$$\int_{E_1} G_n(y)\, dy = \int_a^b F_n(x)\, dp(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{13}$$

Очевидные соотношения $F_n(x) \nearrow F(x)$ $(x \in \langle a, b \rangle)$, $G_n(y) \nearrow G(y)$ $(y \in E_1 - M)$ показывают, что $\int_{E_1} G_n(y)\, dy \to \int_{E_1} G(y)\, dy$, $\int_a^b F_n(x)\, dp(x) \to \int_a^b F(x)\, dp(x)$. Согласно (13), равенство (1) справедливо также для функции F.

Возьмем теперь произвольную функцию F такую, что интеграл Лебега-Стильтьеса $\int_a^b F(x)\, dp(x)$ существует; положим, как обычно, $F_+(x) = \max(F(x), 0)$, $F_-(x) = \max(-F(x), 0)$ $(x \in \langle a, b \rangle)$. Пусть, напр., $\int_a^b F_+(x) \cdot dp(x) < \infty$. Тогда и $\int_{E_1} \Big(\sum_{f(x)=y} F_+(x)\, \varrho(x) \Big)\, dy < \infty$; следовательно, $\sum_{f(x)=y} F_+(x) \cdot \varrho(x) < \infty$ для почти всех $y \in E_1$. Итак, сумма $\sum_{f(x)=y} F(x)\, \varrho(x) = \sum_{f(x)=y} F_+(x)\, \varrho(x) - \sum_{f(x)=y} F_-(x)\, \varrho(x)$ имеет смысл для почти всех $y \in E_1$, так что (1) верно и для функции $F = F_+ - F_-$.

Этим полностью доказано наше предложение, касающееся формулы (1). Точно так же можно доказать формулу (2), если интеграл $\int_a^b F(x)\, dn(x)$ существует. Формула (4а) [соотв. (3)] является суммой (соотв. разностью) формул (1) и (2).

Далее, из (0) и (4а) следует, что и формула (4б) справедлива (поскольку интеграл в правой части существует).