в G четыре системы углов, не имеющие попарно общего угла, причем каждое ребро графа является элементом точно одного угла каждой из этих систем.

Граф G^*, множество вершин которого есть U^*, множество ребер H^*, называется ϑ-образом графа G — где G есть связный регулярный граф третьей степени, U есть множество его вершин, H есть множество его ребер — если:

I. *Существует простое отображение α множества H на множество U^*,*

II. *существует простое отображение β системы всех углов $\mathfrak{W}$ графа G на множество ребер H^*,*

III. *вершина $u^* = \alpha(h_i)$ инцидентна с ребром $h^* = \beta(W_i)$ в графе G^* тогда и только тогда, если ребро $h_i \in H$ является элементом угла $W_j \in \mathfrak{W}$.*

3. Для графов $G^* = \vartheta(G)$ с четным числом вершин, которые являются, очевидно, связными регулярными графами четвертой степени, доказывается следующее:

Каждый граф $\vartheta(G)$ содержит линейный множитель. Если в G существует линейный множитель, то в графе $\vartheta(G)$ имеется квадратичный множитель, разложимый на два линейных множителя. Если граф G можно разложить на три линейных множителя, то граф $\vartheta(G)$ можно разложить на четыре линейных множителя и наоборот.

4. Дальнейшие доказываемые теоремы обращают внимание на тесную связь между гамильтоновыми линиями в регулярных графах третьей степени и разложениями их ϑ-образов на две гамильтоновы линии. Доказывается следующее теоремы:

а) *Если в регулярном графе третьей степени G существует гамильтонова линия, то $\vartheta(G)$ можно разложить на две гамильтоновы линии и наоборот.*

б) *Пусть λ — число различных гамильтоновых линий в регулярном графе третьей степени G и $2n$ — число его углов, тогда о числе λ^* различных разложений графа $\vartheta(G)$ на две гамильтоновы линии можно утверждать: $\lambda^* = \lambda \,.\, 2^{n-1}$.*

Zusammenfassung

AUS DER THEORIE DER ENDLICHEN REGULÄREN GRAPHEN DRITTEN UND VIERTEN GRADES

ANTON KOTZIG, Bratislava.

(Eingelangt am 21. Feber 1956.)

In dem Beitrag werden folgende Sätze bewiesen:

1. *Es sei G ein beliebiger zusammenhängender Graph, welcher eine gerade Anzahl von Kanten enthält, dann existiert ein Winkelsystem $\mathfrak{W}$ des Graphen G so, dass jede Kante aus G genau einem Winkel aus $\mathfrak{W}$ gehört und ein Winkelsystem*

$\mathfrak{W}$ *mit dieser Eigenschaft existiert nur dann, wenn G eine gerade Anzahl von Kanten enthält. (Die drei Elemente aus G: $\{u, h_1, h_2\}$, wo u ein Knotenpunkt und $h_1 \neq h_2$ die Kanten sind, werden Winkel des Graphen G genannt, wenn beide Kanten h_1, h_2 mit dem Knotenpunkt u inzident sind.)*

2. *Wenn ein zusammenhängender regulärer Graph dritten Grades G mit gerader Anzahl von Kanten einen linearen Faktor enthält, dann existieren solche zwei Winkelsysteme $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ die elementfremd sind und jede Kante des Graphen gerade einem Winkel aus $\mathfrak{W}_1$ (resp. aus $\mathfrak{W}_2$) gehört. Wenn ausserdem G in drei lineare Faktoren zerlegbar ist, dann gibt es in G vier solche Winkelsysteme, die paarweise elementfremd sind und jede Kante genau einem Winkel aus jedem System gehört.*

Den Graph G^*, dessen Knotenpunktmenge U^* und die Kantenmenge H^* ist, nennen wir ϑ-Bild des Graphen $G = U + H$ (wobei G ein regulärer zusammenhängender Graph dritten Grades, U resp. H seine Knotenpunktmenge, resp. Kantenmenge ist), wenn gilt:

I. *Es gibt eine einfache Abbildung α der Kantenmenge H des Graphen G auf die Knotenpunktmenge U^* des Graphen G^*.*

II. *Es gibt eine einfache Abbildung β des Systems $\mathfrak{W}$ aller Winkel des Graphen G auf die Kantenmenge H^* des Graphen G^*.*

III. *Ein Knotenpunkt u^* ist inzident mit der Kante h^* des Graphen G^*, wo $u^* = \alpha(h_i)$; $h_i \in H_i$ $h^* = \beta(W_j)$; $W_j \in \mathfrak{W}$; dann und nur dann, wenn die Kante h_i ein Element des Winkels W_j im Graphen G ist.*

3. Für die Graphen $G^* = \vartheta(G)$ mit gerader Knotenanzahl, welche selbstverständlich reguläre zusammenhängende Graphen vierten Grades sind, wird Folgendes bewiesen:

Jeder Graph $\vartheta(G)$ hat einen linearen Faktor. Wenn es im Graphen G einen linearen Faktor gibt, dann hat $G^* = \vartheta(G)$ einen quadratischen Faktor, der sich in zwei lineare Faktoren zerlegen lässt. Wenn der Graph G sich in drei lineare Faktoren zerlegen lässt, dann lässt sich der Graph G^* in vier lineare Faktoren zerlegen und umgekehrt.

4. Weitere Sätze weisen auf den engen Zusammenhang zwischen den Hamiltonschen Linien im Graphen dritten Grades und die Zerlegung der ϑ-Bilder dieser Graphen in zwei Hamiltonsche Linien. Man beweist diese Sätze:

a) *Wenn es im regulären Graphen dritten Grades G eine Hamiltonsche Linie gibt, dann lässt sich der Graph $G^* = \vartheta(G)$ in zwei Hamiltonsche Linien zerlegen und umgekehrt.*

b) *Es sei λ die Anzahl verschiedener Hamiltonscher Linien im regulären Graphen dritten Grades G und es sei 2n die Knotenanzahl des Graphen G, dann gilt von der Anzahl λ^* der verschiedenen Zerlegungen des Graphen $G^* = \vartheta(G)$ in zwei Hamiltonsche Linien: $\lambda^* = \lambda \cdot 2^{n-1}$.*