K větě 3: K důkazu použijeme lemmatu 5, které (jak později ukážeme) platí i v tomto případě a které umožňuje omezit se při vyšetřování středních hodnot jistých náhodných proměnných na integrační obory typu $|x_n - \Theta| \leqq \delta$, $\delta > 0$. Rozdílnost proti důkazu v odstavci 2 záleží pak v tom, že splnění (19), resp. (21) požadujeme jen v nějakém okolí Θ; dle (IX) platí v tomto okolí (3) i (4), a tedy i jejich důsledky.

K větě 4 a 5: Jako v důkazu lemmatu 7 zjistíme, že

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq - K(x_n - \Theta)^2 + \tfrac{1}{3}Qc_n^2\, |x_n - \Theta| \quad \text{pro } n \geqq n_0\,,$$

resp.

$$(x_n - \Theta)\, M_{c_n}(x_n) \leqq - (K - \eta)\, (x_n - \Theta)^2 \quad \text{pro} \quad n > n_1(\eta)\,.$$

V důkazu optimality je třeba jen triviálních změn.

K větě 6: K odhadu výrazu

$$\mathsf{E}\left[\left|\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right|^t\right]$$

používáme nerovnosti

$$|y_{2n} - y_{2n-1}| \leqq 2C + R\,.$$

Předpoklad (V) není třeba výslovně uvádět: je zřejmě splněn dle (VIII). Důsledkem věty 6 je opět lemma 5.

K větě 7: Lemma 5 umožňuje omezit se při vyšetřování středních hodnot na integrační obory $|x_n - \Theta| \leqq \delta_0$, $\delta_0 > 0$. V určitém okolí bodu Θ lze však zpřesnit vztah (58) takto: K libovolnému $\eta > 0$ existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro $|x - \Theta| + c < \delta_0$ $(c > 0)$ jest $M_c(x) = - 2m(x - \Theta) + \eta_x^{(5)}(x - \Theta) + \eta_x^{(6)}\, c$, kde $|\eta_x^{(i)}| \leqq \eta$, $i = 5, 6$. Podobně lze zpřesnit ostatní vztahy, na př. (61):

$$a_n^2 \mathsf{E}\left[\left(\frac{y_{2n} - y_{2n-1}}{c_n}\right)^2\right] = \frac{(2\sigma_\Theta^2 + \eta_{12})\, a^2 c^{-2}}{n^{2\alpha - 2\gamma}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right),$$

kde $|\eta_{12}| \leqq \eta$. Nerovnost $4ma > 1 - 2\gamma$ je splněna, neboť $a > \dfrac{1}{2K}$ dle (12a) a $m \geqq K_0 \geqq \dfrac{1}{2} K$ dle definice K. Předpoklad (VI) je ve znění věty podstatný.

Poznámka. V době, kdy byl tento článek v tisku, vyšla práce: C. Derman, An application of Chung's lemma to the Kiefer-Wolfowitz stochastic approximation procedure, Annals Math. Stat. *27* (1956), s. 532—536. Výsledky této práce jsou zformulovány ve dvě věty, jež jsou podobné — co do předpokladů i co do tvrzení — větě 5 a větě 7, případ 3°, našeho článku.

LITERATURA

Zkratka: AMS — Annals of Mathematical Statistics.

[1] *H. Robbins, S. Monro:* A stochastic approximation method, AMS *22* (1951), 400—407.