Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

POZNÁMKA O JORDAN-DEDEKINDOVEJ PODMIENKE V BOOLEOVÝCH ALGEBRÁCH

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Došlo dne 23. prosince 1955.) DT: 512.9

V poznámke sa vyšetruje platnosť zovšeobecnenej Jordan-Dedekindovej podmienky pre Booleove algebry.

Znakom $R(a, b)$ (prípadne s indexami) označíme reťazec s najmenším (najväčším) prvkom $a(b)$ v čiastočne usporiadanej množine S. Ak kardinálne číslo reťazca $R(a, b)$ je n, nazývame jeho dĺžkou číslo $n - 1$ (ak n je konečné) resp. n (ak n je nekonečné kardinálne číslo). Reťazec $R(a, b)$ je maximálny, ak zo vzťahu $R(a, b) \subset R_1(a, b) \subset S$ vyplýva $R(a, b) = R_1(a, b)$. Hovoríme, že čiastočne usporiadaná množina S splňuje Jordan-Dedekindovu podmienku (v ďalšom stručne: podmienku (**JD**)), keď platí: ak $a, b \in S$, $a < b$ a ak $R_1(a, b)$, $R_2(a, b)$ sú maximálne reťazce, potom oba tieto reťazce majú rovnakú dĺžku.

Je známe, že podmienka (**JD**) platí pre konečné modulárne sväzy (viď [1]) a dokonca pre konečné semimodulárne sväzy (viď [2]). Naproti tomu nekonečné modulárne sväzy nesplňujú podmienku (**JD**). Podrobnejšie povedané, platia vety:

(**S**) *Nekonečné distributívne sväzy vo všeobecnosti nesplňujú podmienku* (**JD**). (Viď [3], veta 3.)

($\mathbf{S}_1$) *Ku každému kardinálnemu číslu α, $\alpha \geqq c$*[1]) *existuje úplný a úplne distributívny sväz S_α s najmenším prvkom f_0 a najväčším f_1, ktorý má túto vlastnosť: pre každé kardinálne číslo β, vyhovujúce nerovnosti $c \leqq \beta \leqq \alpha$, existuje vo sväze S_α maximálny reťazec $R_\beta(f_0, f_1)$, ktorého dĺžka je β.* (Viď [4].)

Dôkaz vety (S_1), uvedený v [4], sa nedá použiť pre zostrené tvrdenie, že S je Booleova algebra. Pri hľadaní „hranice", pokiaľ až podmienka (**JD**) neplatí v nekonečných Booleových algebrách, je prirodzené začať vyšetrovať najprv triedu takých nekonečných Booleových algebier, ktorých vlastnosti sa čo najviac zhodujú s vlastnosťami konečných Booleových algebier. Je známe, že každá konečná Booleova algebra S je izomorfná s čiastočne usporiadaným

[1]) c značí mohutnosť kontinua.

systémom všetkých podmnožín vhodne zvolenej množiny M. A. TARSKI o-kázal tvrdenie (viď [5], resp. [1], str. 233):

Nutná a postačujúca podmienka, aby úplná Booleova algebra S bola izomorfná s čiastočne usporiadaným systémom všetkých podmnožín vhodne zvolenej množiny M, je, aby Booleova algebra S bola úplne distributívna. To nás nabáda vyšetrovať platnosť podmienky (**JD**) v úplných a úplne distributívnych Booleových algebrách.

Jednoduchým postupom dokážeme vetu:

(**S'**) *Nech S je nekonečná úplná a úplne distributívna Booleova algebra. Potom S nesplňuje podmienku* (**JD**).

Dôkaz. Nech S je nekonečná úplná a úplne distributívna Booleova algebra. Na základe spomenutej vety Tarského môžeme bez újmy všeobecnosti predpokladať, že S je čiastočne usporiadaný systém všetkých podmnožín nekonečnej množiny M.[2]) Vyjadrime množinu M vo tvare $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pričom M_1 je spočitateľná množina. Nech S_1 je čiastočne usporiadaný systém všetkých podmnožín množiny M_1. Zrejme S_1 je konvexný podsväz sväzu S. Z toho vyplýva, že k dôkazu vety stačí preveriť neplatnosť podmienky (**JD**) vo sväze S_1.

Nech množina M_1 je nejakým (ľubovoľným) spôsobom usporiadaná; nech J je množina všetkých dolných skupín Dedekindových rezov usporiadanej množiny M_1. Pre každý prvok $I \in J$ platí zároveň $I \in S_1$; zrejme je J reťazec v S_1 (najväčší (najmenší) prvok v reťazci J je $M_1(\emptyset)$). Zo základných viet o usporiadaných množinách (viď [6]) vyplýva, že J je maximálny reťazec v S_1.

Uvažujme dvoje usporiadanie množiny M_1, a to 1. tak, aby množina M_1 bola dobre usporiadaná, a 2. tak, aby usporiadaná množina M_1 bola izomorfná s množinou všetkých racionálnych čísiel (pri obvyklom usporiadaní). Utvorme podľa predošlého príslušné maximálne reťazce J_1 a J_2 v čiastočne usporiadanom systéme S_1. Kardinálne číslo množiny J_1 resp. J_2 je zrejme $\aleph_0$ resp. c. Tým je tvrdenie vety dokázané.[3])

Naskytuje sa otázka, či aj veta ($\mathbf{S}_1$) ostáva v platnosti, ak v nej výraz „úplne distributívny sväz" nahradíme výrazom „úplne distributívna Booleova algebra". Na základe analogických úvah ako v dôkaze predošlej vety sa takáto otázka dá redukovať na otázky, týkajúce sa len usporiadaných množín. Nech $f(\alpha)$ je supremum všetkých mohutností množín rezov v usporiadanej množine

---

[2]) Čiastočné usporiadanie je dané množinovou inklúziou. Podobne v ďalšom.

[3]) Ľahko sa zostrojí spočitateľná Booleova algebra, ktorá splňuje podmienku (**JD**). (Je ňou napr. algebra všetkých konečných podmnožín a ich komplementov v danej spočitateľnej množine.) L. RIEGER ma upozornil na to, že existujú nespočitateľné úplné Booleove algebry, ktoré splňujú podmienku (**JD**), a dokonca omnoho silnejšiu podmienku: že totiž každé dva maximálne reťazce sú (vo zmysle ich usporiadania) navzájom izomorfné.