Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

AKADEMIK VOJTĚCH JARNÍK ŠEDESÁTNÍKEM

VLADIMÍR KNICHAL, Praha a ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Došlo dne 1. července 1957.)

Dne 22. prosince t. r. se dožívá šedesáti let vynikající československý matematik, badatel světového jména, akademik VOJTĚCH JARNÍK, profesor matematicko-fysikální fakulty Karlovy university.

Tato příležitost nám dává podnět k tomu, abychom se zamyslili podrobněji nad vědeckou, učitelskou a vědecko-organisační činností našeho vzácného učitele a staršího přítele, jehož dílo vtisklo trvalé stopy vývoji československé matematiky v posledních 30 letech a přispělo podstatně k dobré známosti československé matematiky v matematickém světě.

Šedesátka u člověka tak výkonného a všestranně činného není příležitostí k bilanci životního díla. Jestliže se však chceme podrobněji zabývat jeho dosavadní činností, činíme tak především také proto, abychom přiblížili jeho osobnost i jeho dílo naší mladší matematické generaci jako živý vzor ušlechtilého úsilí a cílevědomé práce.

Prof. Jarník se narodil dne 22. prosince 1897 v Praze jako syn univ. profesora JANA URBANA JARNÍKA, známého českého romanisty. V roce 1915 vstoupil jako posluchač matematiky a fysiky na tehdejší filosofickou fakultu Karlovy university. Zde vyrůstal Jarník především pod vlivem zesnulého profesora KARLA PETRA. Trvalý hluboký Jarníkův zájem o theorii čísel je do značné míry ovlivněn i tím, že prof. Petr pracoval rovněž velmi úspěšně v tomto oboru. Po vzdělání, kterého se mu dostalo na Karlově universitě, prošel Jarník „nejvyšší školou matematických věd" dvojím pobytem v Göttingen (od podzimu r. 1923 do února 1925 a ve školním roce 1927-28), kde bylo tehdy jedno z nejvýznačnějších matematických vědeckých středisek světa. Jarník zde byl v prvé řadě žákem EDMUNDA LANDAUA (zesnulého roku 1938), jedné z největších postav moderní matematiky, spoluzakladatele moderní analytické theorie čísel. Landau sám pak považoval Jarníka za jednoho z nejlepších svých žáků a spolupracovníků. Jarník přes velké úspěchy v analytické theorii čísel nikdy nebyl pěstovatelem výhradně této nauky. Poznal záhy nebezpečí upřílišněné specialisace a po celou dobu své vědecké kariéry (podobně jako jeho učitelé Petr a také Landau) velmi intensivně se věnoval — jak ještě uvidíme — i jiným oborům vlastní matematické analysy.

Svá universitní studia ukončil Jarník jednak státními zkouškami z matematiky a fysiky, jednak doktorátem, při němž vykonal hlavní rigorosum z matematiky a vedlejší z theoretické fysiky a filosofie. Jako disertační práci předložil pojednání „O kořenech funkcí Besselových" (v seznamu[1]) práce 1). Od roku 1919 do 1921 působil jako asistent matematiky na Vysoké škole technické v Brně u prof. J. Vojtěcha, kde měl ještě možnost seznámit se s tehdejším vynikajícím odborníkem v matematické analyse, s prof. M. Lerchem. V roce 1921 přešel jako asistent matematického semináře na Karlovu universitu do Prahy. Tuto funkci zastával až do 14. března 1929, kdy byl jmenován mimořádným profesorem matematiky této university. Během této doby se habilitoval (19. prosince 1925) na základě habilitační práce „O mřížových bodech v rovině" (práce 7). Od 1. července 1935 byl jmenován řádným profesorem matematiky na téže fakultě.

Od počátku své učitelské činnosti měl Jarník značný vliv na své posluchače. Byli to především studenti s hlubokým zájmem o matematiku, které dovedl soustředit kolem sebe. Velkou část našich dnešních vysokoškolských učitelů (čtyřicátníků a padesátníků) lze nazvat Jarníkovými žáky, i když mnozí z nich ve svém pozdějším vývoji přesunuli těžiště své vlastní vědecké činnosti do různých vzdálenějších oblastí matematiky. Učitelské činnosti se Jarník věnoval a věnuje s velkou láskou. Jeho vliv na posluchače se projevuje především tím, že dovede své opravdové nadšení pro vědu přenést i na ně. Ti, kteří jej slyšeli přednášet před pětadvaceti lety a slyší jej dnes, mohou dosvědčit, že se svého nadšení ani trochu nepolevil. Naopak, získané učitelské a metodické zkušenosti dělají z něho dnes učitele, který ještě pronikavějším způsobem ovlivňuje své žáky. I když, jak již řečeno, část jeho žáků, našich aktivních vědeckých pracovníků, pracuje v jiných oborech, než jsou vlastní obory Jarníkovy vědecké činnosti, odnesli si všichni něco společného z jeho pečlivě připravených přednášek. Toto společné se nazývá v zasvěcených kruzích „Jarníkův styl".

Již v předválečných letech, kdy výkon učitelského povolání na vysokých školách se neprováděl vždy příliš důsledně, byl Jarník učitelem neobyčejně disciplinovaným, který nevynechal jediné přednášky. Tento zdánlivě podružný moment — u vědeckého pracovníka jeho formátu — nelze podceňovat. Vzpomínáme si velmi dobře na to, jak s taktem staršího přítele vyhledával všelijaké náhradní termíny a jak nás — posluchače — nenásilnou formou vedl k důkladnosti a poctivosti v práci a v povinnostech. Krátce: Jarník dělal již tenkráte to, čemu dnes říkáváme „nejen učiti, ale také vychovávati".

---

[1]) Práce uvedené v seznamu v odstavci A budou v textu pro stručnost označeny pouze číslem, bez značky A.

Jarník je mimořádně dobrým znalcem různých moderních matematických disciplin. Svých pronikavých úspěchů ve vědecké tvorbě dosáhl právě spojením metod moderní matematiky s hlubokou znalostí klasické analysy. V tomto směru se snaží stále vést i své posluchače a žáky, kterým je vždy obětavým rádcem. Již tři desítiletí koná na fakultě řadu speciálních přednášek a seminářů, v nichž seznamuje své posluchače s nejnovějšími směry současné matematiky. Tyto přednášky a semináře jsou pečlivě voleny tak, aby v nich byly zladěny jeho osobní záliby s potřebami posluchačů. Tak na př. byl prvým, kdo v třicátých letech začal systematicky na universitě v Praze šířit mezi posluchači znalost theorie množin. Kniha akademika E. Čecha „Bodové množiny", která měla později tak ohromný vliv na celou naši matematiku, byla ještě v rukopise, když Jarník seznamoval své posluchače ve speciálních seminářích s obsahem této knihy.

Jarníkův výklad a postup je vždy důkladně promyšlen. Dovede přístupně vyložit i ty nejobtížnější partie. Vede přednášky tak, aby posluchač viděl, k čemu směřuje. Vychovává ke kritickému a přesnému myšlení.

V těžkých letech okupace vedl Jarník s několika mladšími spolupracovníky více méně pravidelné semináře, psal informativní články, aby ani za nejhorších dob zcela nepřestal vědecký růst mladší matematické generace.

Po osvobození stoupl ještě více Jarníkův vliv na naši nejmladší vědeckou generaci, především také zásluhou jeho skvělých učebnic. Jde vlastně o vědecky zaměřené monografie, jichž lze použít jako učebnic. Je až s podivem, jak si Jarník, který je v posledních letech značně zaměstnán vědecko-organisačními povinnostmi, dovedl nalézti tolik času k napsání čtyř obšírných knih, které považujeme za chloubu naší matematické knižní produkce.

Jarník vydal také řadu interních skript a poznámek pro své posluchače a navštěvníky seminářů.

Jako všeobecně uznávaný pedagog byl od roku 1948 předsedou reformní komise přírodovědecké fakulty Karlovy university. V roce 1947—48 byl děkanem a v roce 1948—49 proděkanem přírodovědecké fakulty Karlovy university, v letech 1950—53 pak prorektorem Karlovy university. Všechny tyto funkce vykonával s nevšední a přímo vědeckou poctivostí a důkladností.

Jako vynikající vědecký pracovník stal se velmi brzo členem někdejší České akademie věd a umění (od roku 1934), členem Královské české společnosti nauk (od r. 1926) a členem předsednictva Národní rady badatelské. Dále je členem Polskiego Towarzystwa Matematycznego, čímž přispívá k prohloubení vědeckých styků československo-polských.

V roce 1950 byl Jarník jmenován členem přípravného výboru pro zřízení Československo-sovětského institutu a po jeho založení byl předsedou jeho přírodovědecké sekce.

Koncem roku 1951 se začalo připravovat ustavení Československé akademie věd a Jarník byl jmenován členem vládní komise pro její vybudování. Po jejím ustavení dne 17. listopadu 1952 byl jmenován mezi prvními řádnými členy — akademiky této akademie a stal se předsedou její matematicko-fysikální sekce. Tuto těžkou a zodpovědnou funkci vykonával v letech 1952—55. Jarník nedbal osobního pohodlí a často na úkor času potřebného k vlastní vědecké činnosti staral se nezištně o organisační zajištění a vybudování pracovišť, z nichž některá byla dosti vzdálena jeho vlastním vědeckým zájmům. I nyní zastává některé funkce v rámci Akademie. Je na př. předsedou komise pro matematiku, vytvořené presidiem ČSAV, která má za úkol koordinovat práci v matematice v celém státě.

Již od roku 1916 je Jarník jedním z vysoce aktivních členů Jednoty československých matematiků a fysiků a od roku 1928 až do nedávné doby členem jejího výboru. V této souvislosti je třeba zdůraznit především, že v letech 1935—50 byl vedoucím redaktorem matematické části *Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky*. Náš Časopis, i když měl dlouholetou tradici, byl až do roku 1934 přece jenom časopisem spíše národním než mezinárodním. Jarník se stal vedoucím redaktorem v čase, kdy bylo rozhodnuto, že Časopis se má přetvořit na mezinárodní časopis. Ani tady nedostal Jarník zrovna nejlehčí úkol. Ve funkci hlavního redaktora matematické části četl a „spravoval" s opravdovým pochopením pro začínající autory desítky příspěvků a pomáhal tak zvedati nejenom úroveň Časopisu, ale i celé naší matematické vědy. Jarník má nesporně nemalý podíl na tom, že se Časopis a později (od r. 1950) *Чехословацкий математический журнал* stal ve světovém měřítku uznávaným matematickým forem.

V letech 1937—39 byl členem redakční rady mezinárodního časopisu *Acta Arithmetica*, vycházejícího v Polsku, který se měl státi tribunou pro theorii čísel. Po obsazení Polska nacistickými okupanty však časopis zanikl.

Jarník se zúčastnil aktivně celé řady zahraničních a mezinárodních sjezdů a konferencí. Přednášel mnohokráte v cizině na různých universitách jako host. Napsal na 100 recensí do časopisů: *Zentralblatt für Mathematik*, *Mathematical Reviews* a *Реферативный журнал-математика*. Kromě toho napsal řadu referátů (často velmi obsáhlých) o nových knihách do Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky a jinde.

Za svoje vynikající vědecké zásluhy a tvůrčí vědeckou činnost byl v roce 1952 poctěn státní cenou.

Přejdeme nyní k podrobnějšímu hodnocení Jarníkovy vědecké činnosti. Přesto, že vědecká činnost Jarníkova je — jak uvidíme — všestranná, lze přece vyznačit dosti přesně ty směry matematického bádání, které v Jarníkových vědeckých pracích zřetelně převládají.

Pobyt na universitě v Göttingen a vliv tamního výborného učitele a vědce světového jména Edmunda Landaua způsobil, že Jarník podstatnou část své vědecké produkce věnuje těm otázkám theorie čísel, které souvisí velmi úzce s jinými obory matematiky, jako na př. s matematickou analysou a s geometrií, tomu okruhu otázek a problémů, které se často shrnují pod názvem theorie mřížových bodů a geometrie čísel. Zde je třeba trochu bližšího vysvětlení, neboť každý z těchto dvou názvů vyvolává někdy tutéž představu. Kdežto Landau v druhém dílu své základní monografie „Vorlesungen über Zahlentheorie" (Leipzig, 1927) na str. 183 jasně (a myslíme, že právem) řadí theorii mřížových bodů do geometrické theorie čísel, řadí mnozí matematici tuto theorii spíše do analytické theorie čísel. Od této partie theorie čísel je nutno odlišiti geometrii čísel, za jejíhož zakladatele se považuje Minkowski, který ve svém fundamentálním díle „Geometrie der Zahlen" (Leipzig und Berlin, 1910) zabývá se jinou problematikou, než je uvedena v kapitole o mřížových bodech v monografii Landauově (Landau také v této kapitole nikde Minkowského necituje).

Pod pojmem mřížového bodu (v užším smyslu) představujeme si v n-dimensionálním kartézském prostoru bod $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jehož všechny souřadnice jsou čísla celá. Zatím co do theorie mřížových bodů řadíme dnes spíše práce týkající se asymptotických odhadů počtu mřížových bodů, které padnou do jistého geometrického tělesa, zvětšujícího se v daném prostoru s rostoucím parametrem $t \to \infty$, řadíme do geometrie čísel spíše problémy existenčního rázu, kde jde o to, zda do daného geometrického tělesa padnou mřížové body, které jsou eventuálně v jistých vzájemných vztazích. V tomto druhém případě lze pak provést eventuálně i další dělení podle toho, zda při vytčení daného problému spíše vyzdvihujeme geometrický tvar vyšetřovaného tělesa (pak jde o vlastní geometrii čísel) nebo spíše aritmetické nerovnosti, kterými je daný útvar charakterisován, a kdy pak vlastně jde o existenci řešení nebo o existenci jistého (třeba nekonečného) počtu řešení daných nerovností systémem celých čísel. Tuto problematiku pak často shrnujeme do theorie diofantických nerovností, jejíž částí je theorie diofantických aproximací, zabývající se aproximativním řešením „rovnic" celými čísly. Zde pak vystupují do popředí otázky týkající se „míry přesnosti", s kterou lze danému systému rovnic vyhovět. Můžeme hned prozradit, že Jarníkovy práce zapadají do všech těchto oborů a že si jimi právem dobyl velmi čestného místa na světovém foru.

Do theorie mřížových bodů, která podstatnou měrou používá jemných pomůcek matematické analysy, a proto se řadí do analytické theorie čísel, lze zařadit těchto 28 Jarníkových prací (číslováno podle připojeného seznamu): 7, 8, 9, 12, 16 až 22, 24, 27, 31 až 34, 38, 40, 45, 67 až 71, B 1, B 2, B 4. Poněvadž pak práce, spadající do vlastní geometrie čísel a do theorie diofantických aproximací, nelze již tak dobře od sebe rozlišit, shrnujeme je zde do jedné kategorie. Je to 28 prací: 26, 30, 35, 36, 37, 53, 54, 56, 58, 59, 60, 62 až 66, 72 až 78, 81, 83, 84, B 3, B 5.

Dalším velmi důležitým polem Jarníkovy vědecké činnosti je **theorie reálných funkcí**, zvláště ta část, která se zabývá studiem derivovaných čísel. Sem lze snad zařadit těchto 20 Jarníkových prací: 2, 4, 5, 6, 10, 39, 41, 42, 44, 46, 47, 48, 52, 55, 57, 80, 82, C 2, D 8, D 33.

Ostatní Jarníkovy práce nelze již dělit na kompaktnější celky, neboť zapadají porůznu do nejrozmanitějších oborů matematiky.

Jedním z oborů, k jehož rozvoji Jarník přispěl svými pracemi nejvíce, je beze sporu **theorie mřížových bodů**. Vysvětlíme nejprve stručně, o jakou problematiku jde v tomto úseku analytické theorie čísel. Budiž R_n n-dimensionální reálný kartézský prostor, t. j. prostor, jehož body x jsou uspořádané n-tice reálných čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s obvyklou metrikou. Pro jednoduché operace (sčítání bodů a násobení bodů číslem) budeme používat obvyklého označení, známého z vektorového počtu. Představme si „geometrické těleso" $K(t)$ v R_n, závislé na reálném kladném parametru t, jehož rozměry s rostoucím parametrem $t \to \infty$ rostou do nekonečna. Jedním z úkolů theorie mřížových bodů je určit, aspoň asymptoticky, odhad pro počet $G(t)$ mřížových bodů ležících v tělese $K(t)$ pro velká t. Je jasné, že řešení tohoto úkolu a použité metody budou podstatně závislé na konkretním tvaru tělesa $K(t)$. Nemělo by proto smysl zabývat se tímto problémem v uvedené obecnosti. Uvedeme tudíž nejprve jistou speciální třídu těles, která v theorii mřížových bodů se vyskytuje velmi často.

Budiž K konvexní a omezené geometrické těleso v R_n, v němž počátek je bodem vnitřním. Definujme bodovou funkci $F(x)$ takto: $F(0) = 0$; je-li $x \neq 0$, určeme nejprve kladné číslo $\lambda(x)$ tak, aby pro $0 \leqq \mu < \lambda(x)$ bylo $\mu x \in K$ a pro $\mu > \lambda(x)$ bylo μx non $\in K$ (K je konvexní!). Klaďme pak $F(x) = 1/\lambda(x)$. Názorně, avšak trochu nepřesně řečeno, je $F(x)$ homogenní bodová funkce ($F(\lambda \, . \, x) = \lambda F(x)$ pro $\lambda \geqq 0$) taková, že $F(x) = 1$ představuje „rovnici" plochy omezující dané těleso K. Přitom vnitřní body x tělesa K jsou charakterisovány podmínkou $F(x) < 1$ a vnější body podmínkou $F(x) > 1$. Je-li K těleso uzavřené, jak budeme dále předpokládat, lze charakterisovat jeho body x právě nerovností $F(x) \leqq 1$. Je-li $K(t)$ těleso vzniklé z K homothetickou transformací o středu v počátku a o poloměru homothetie t ($t > 0$), jsou jeho body x zřejmě charakterisovány nerovností $F(x) \leqq t$.

Z geometrického názoru je celkem jasné, že v prvém přiblížení je počet $G(t)$ mřížových bodů (tedy počet celočíselných systémů $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vyhovujících nerovnosti $F(x) \leqq t$) roven objemu $V(t)$ tělesa $K(t)$. Tato věc je ryze geometrická a má s vlastní theorií čísel velmi málo společného, i když uvedená formulace (jde o řešení nerovnosti $F(x) \leqq t$ celými čísly) je číselně theoretická. Naproti tomu úvahy vedoucí k vyšetření odchylky $\mathsf{P}(t) = G(t) - V(t)$ jsou již někdy velmi subtilní a těžké, závisí velmi podstatně na „aritmetických" vlastnostech funkce $F(x)$, definující základní těleso K, a budily proto zájem mnoha nejpřednějších číselných theoretiků. Ke studiu těchto otázek pro různé speciální funkce $F(x)$ je třeba bohatých znalostí jednak vlastní klasické theorie čísel, jednak rozmanitých metod matematické analysy, které v tomto úseku matematiky najdou široké uplatnění. Byla to právě tato synthesa úvah aritmetických (kde — jak známo — vlastnosti vyšetřovaných objektů, na př. čísel celých, se mění skokem) s úvahami analytickými (kde vlastnosti vyšetřovaných objektů spojitě závisí na parametrech je určujících), která lákala Jarníka a přivedla ho též vlivem jeho učitele E. Landaua k tomuto velmi těžkému oboru. Jarník zde navázal na práce vynikajících světových matematiků, jako jsou van der CORPUT, HARDY, LANDAU, LITTLEWOOD, VINOGRADOV, WALFISZ a j., a dospěl k výsledkům, které ho řadí jasně mezi ně. Možno dokonce říci, že se Jarník pouštěl s úspěchem do řešení mnoha těch nejsubtilnějších otázek tohoto oboru, k jejichž rozboru se ostatní vůbec neodhodlali, a dospěl zde k četným výsledkům, které do dnešního dne nebyly překonány. Je proto právem pokládán za jednoho z nejvýznačnějších světových representantů tohoto oboru.

Rozebrat důkladně Jarníkovu činnost na tomto poli, upozornit na všechny potíže, které musel odstranit, chtěl-li dospět ke kýženým výsledkům, nelze provést v rámci jednoho článku. Musíme se proto omezit na jistý výběr, který aspoň trochu dovolí nahlédnout do složité kuchyně, ve které tyto práce vznikaly. Co se týče podrobnějších rozborů, nutno odkázat na referáty obsažené v recensních časopisech, hlavně v časopise *Zentralblatt für Mathematik*, kde skoro v každém ročníku nalezneme referáty o pracích Jarníkových z tohoto oboru, vyšlé z pera odpovědnějších znalců.

Pokud pak se týče zevrubnějšího rozboru problematiky, o kterou zde běží, a potíží, které zde vznikají, odkazujeme čtenáře na článek Arnolda Walfisze, nad jiné povolaného autora a úzkého spolupracovníka našeho jubilanta, článek, který vyšel v našem Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky, roč. LIX, v r. 1929, kde v rozšířeném znění je podán referát, který autor přednesl ve Varšavě na 1. sjezdu slovanských matematiků dne 26. září 1929.

Jedním z nejstarších případů vyšetřovaných v theorii mřížových bodů je případ, kdy základním tělesem K je koule o středu v počátku. V tomto případě jde tedy v podstatě o asymptotické vyjádření počtu $A(y)$ mřížových bodů čili celočíselných řešení vyhovujících nerovnosti $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq y$ pro velká y. Přirozeným zobecněním dospíváme k nerovnosti $Q(x) \leqq y$, kde $Q(x) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ je kvadratická forma positivně definitní. Objem elipsoidu $Q(x) \leqq y$ při daném y je dán vzorcem

$$V(y) = V_Q(y) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}y^{\frac{1}{2}n}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

kde D je diskriminant dané kvadratické formy. Jak jsme již dříve řekli, je velmi názorné a bylo dokázáno po prvé EISENSTEINEM, že $\lim_{y\to\infty} A(y)/V(y) = 1$. Kdežto funkce $V(y)$ se mění spojitě, je $A(y)$ aritmetická funkce po částech konstantní, která má na př. v případě celočíselných a_{ik} diskontinuity nejvýše v bodech celočíselných. Je však také celkem patrno, že vyšetřování odhadu rozdílu $\mathsf{P}(y) = \mathsf{P}_Q(y) = A(y) - V(y)$ bude již úkol značně delikátnější. To se také skutečně ukazuje při podrobnějším studiu, a proto mnoho vynikajících číselných theoretiků zaměřilo svá bádání právě k této otázce. Je pochopitelné, že mnoho matematiků zkoumalo nejprve některé speciální případy, kdy koeficienty a_{ik} dané kvadratické formy měly speciální hodnoty (na př. již zmíněný problém koule). Bylo to způsobeno jednak tím, že problém ve své obecnosti je značně těžký a že se zdálo účelnějším získat nejprve výsledky orientační, jednak tím, že odhad zbytku — jak ještě uvidíme — značně závisí právě na aritmetických vlastnostech vzájemných poměrů koeficientů a_{ik}. Že i v pozdější fázi vývoje této otázky bylo mnoho prací zaměřeno ke studiu speciálních případů, zejména malých dimensí (na př. kruhu), bylo způsobeno zajímavým faktem, že právě tyto případy, které se nejvíce vnucují, jsou značně těžší. Dále se ukázalo účelné zabývat se otázkou „řádu" rozdílu $\mathsf{P}(y)$ pro velká y nejen v tom smyslu, že se hledaly asymptotické vzorce platné pro všechna y, nýbrž též ve smyslu zkoumání průměrných odchylek $\frac{1}{y}\int_0^y |\mathsf{P}(u)|\, du$ nebo $\sqrt{\frac{1}{y}\int_0^y \mathsf{P}^2(u)\, du}$, kdy odstraňujeme vliv „ojedinělých" hodnot y, pro které aritmetická funkce $A(y)$ se značně odchyluje od středního průběhu platného pro „většinu" hodnot y.

Jak jsme se již před chvílí zmínili, jedním z prvních případů, pro které byl vyšetřován počet mřížových bodů, byl případ koule nebo pro $n = 2$ případ kruhu. Abychom mohli snadno formulovat výsledky v tomto oboru matematiky, je výhodné používat tohoto běžného označení (funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definované pro všechna dosti velká x, tedy pro $x \to \infty$, při čemž $g(x)$ je funkce kladná): $f(x) = O(g(x))$ značí $|f(x)| < Kg(x)$ pro jistou kladnou konstantu K; $f(x) = o(g(x))$ značí $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ a $f(x) = \Omega(g(x))$ je logický zápor ke vztahu $f(x) = o(g(x))$. První hlubší výsledek pro kruh odvodil r. 1906 polský matematik SIERPIŃSKI, který dokázal, že $\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{1}{3}})$. Trvalo celých 16 let, než se holandskému matematikovi van der Corputovi podařilo snížit (celkem však nepatrně, přes použití velmi komplikovaného matematického aparátu) exponent $\frac{1}{3}$ v odhadu zbytkového členu $\mathsf{P}(x)$. Další snižování exponentu čili zlepšování odhadu pro $\mathsf{P}(x)$ naráželo čím dále tím na větší potíže a není uspokojivě rozřešeno dodnes. Aby bylo vidět, kam až snad lze se zlepšováním „řádu" zbytku $\mathsf{P}(x)$ dospět, bylo účelné pokusit se též o odhady zdola pro $\mathsf{P}(x)$. Tak

Hardy a Landau 1915 dokázali, že $P(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}})$. Z tohoto výsledku je vidět[2]), že exponent $\frac{1}{3}$ v horním odhadu pro $P(x)$ nelze snížit pod $\frac{1}{4}$. Vysvítá z toho důležitost dolních odhadů v této problematice. Jarník v práci 7 ukázal, že dolní odhad uvedený Landauem platí pro daleko širší kategorii oborů, než je velmi speciální kruh. Pro průběh funkce $P(x)$ dokázal mimo jiné, že diference $P(x) = A(x) - V(x)$ mění při x rostoucím do nekonečna neustále svoje znamení, při čemž na „obě" strany dosahuje výše řádu alespoň $x^{\frac{1}{4}}$. Vzniká proto právem otázka, zda tato diference nejeví snad známky jisté periodicity. Touto otázkou aspoň pro kruh se zabývá Jarník v práci 8. Používá přitom bohatě a velmi účinně asymptotických vlastností Besselových funkcí. Velmi pozoruhodná je práce 9. Van der Corput všiml si totiž a dokázal, že odhad $P(x) = O(x^{\frac{1}{3}})$, který pro kruh dokázal Sierpiński, platí pro daleko obecnější kategorii konvexních oborů v rovině, omezených uzavřenými křivkami, jejichž poloměr křivosti se zvětšujícím se oborem roste nejvýše tak rychle jako v případě kruhu. Zdálo by se proto na prvý pohled, že okolnost, že v případě kruhu lze exponent $\frac{1}{3}$ v horním odhadu snížit (van der Corput), dá se přenést i na případ právě zmíněných obecnějších oborů. Zde však Jarník v práci 9 jasně ukázal, že tomu tak není, že totiž existují konvexní obory uvedených typů, pro které $P(x) = \Omega(x^{\frac{1}{3}})$. Tato skutečnost vyvolala tak značnou pozornost mezi číselnými theoretiky, že slavný Landau se na ni soustřeďuje v úvodním přehledu k rozsáhlé kapitole pojednávající o mřížových bodech ve svém dnes již klasickém trojsvazkovém díle „Vorlesungen über Zahlentheorie" a charakterisuje tuto okolnost jako okolnost, která vnesla úplný chaos do bádání v tomto oboru, chaos v tom smyslu, že domněnky, které se zdály být na základě podrobných rozborů příslušných důkazů velmi plausibilní, ukázaly se nakonec falešnými. Na tuto okolnost upozorňuje i sovětský matematik J. V. Linnik v komentáři k práci G. F. Voroného: Об одной задачи из теории асимптотических функций v II. díle sebraných spisů Voroného.

Všimněme si nyní blíže případu, že dané základní těleso je elipsoid o osách rovnoběžných s osami souřadnicovými, že tedy běží o vyšetření počtu $A(y)$ celočíselných řešení nerovnosti $Q(x) \leqq y$, kde $Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$ pro $\alpha_i > 0$. Roku 1905 dokázal Minkowski, že $P(x) = O(x^{\frac{n-1}{2}})$, r. 1915 Landau pak

$$P(x) = O(x^{\frac{n}{2} - \frac{n}{n+1}}), \tag{1}$$

což odpovídá zmíněnému již odhadu Sierpińského z r. 1906. Pokud se týče odhadu zdola, dokázal Landau v r. 1924, že

$$P(x) = \Omega(x^{\frac{n-1}{4}}); \tag{2}$$

[2]) Prosíme čtenáře za prominutí, že nebudeme citované výsledky formulovat úplně exaktně. Nedá se to provést, neměl-li by se tento článek rozrůst do přílišných rozměrů. Výsledky jsou uváděny jen v hrubých obrysech pro prvou orientaci.

v roce 1926 SZEGÖ zlepšil tento dolní odhad o logaritmický faktor. Pro speciální případ n = 4-dimensionální koule ($\alpha_i = 1$) obdržel r. 1924 Landau výsledek

$$\mathsf{P}(x) = O(x \log x) \tag{3}$$

a r. 1927 Walfisz dokonce

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x \frac{\log x}{\log \log x}\right). \tag{4}$$

Dostal se tak „řád", který je „prakticky" o $\frac{1}{2}$ nižší než obecný odhad (1). Přitom bylo použito daleko účinnější metody hodící se však v podstatě jen na tento speciální případ. Prosíme čtenáře, aby si laskavě všiml, jaký boj zde byl sváděn o každý nepatrný zlomek v exponentu nebo dokonce jen o logaritmický faktor v příslušném odhadu. Tento problém byl dále sledován pro celočíselné koeficienty α_i velmi účinnou metodou — opírající se o t. zv. singulární řadu — kterou vypracovali známí matematici HARDY a LITTLEWOOD. Tak se podařilo Landauovi pro $n = 4$ dostat odhad

$$\mathsf{P}(x) = O(x \log^2 x) , \tag{5}$$

který byl „po velkém boji" KLOOSTERMANEM zostřen na (3) a WALFISZEM na (4).

Pro celočíselné formy vyšší dimense dávala tato metoda horní odhad

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{n}{2}-1}) , \tag{6}$$

který je asymptoticky (pro $n \to \infty$) stejný jako odhad (1), platný pro *všechny* uvažované formy Q. Vznikala proto právem otázka, zdali lze vůbec ještě v případě celočíselných Q snížit řád zbytku $\mathsf{P}(x)$. Víme totiž, že jediný známý dolní odhad pro $\mathsf{P}(x)$ platný pro *všechna* Q, který právem — vzhledem k jednoduchosti a průhlednosti metody důkazu — vyvolával domněnku, že je definitivní, byl odhad (2), který stále sváděl — jak dnes víme — k beznadějným pokusům snížit aspoň o něco exponent $n/2 - 1$ v horních odhadech v případě celočíselných forem. Tuto nejistotu rázem odstranil Jarník, když v diskusi s Landauem v r. 1925 upozornil na okolnost, která — přesto, že se dala celkem elementárně ukázat — unikla pozornosti předních matematiků zabývajících se touto problematikou, že totiž tento horní odhad je definitivní, neboť platí

$$\mathsf{P}(x) = \Omega(x^{\frac{n}{2}-1}) \tag{7}$$

pro celočíselné formy Q.

Když byl takto problém racionálních elipsoidů aspoň pro vyšší dimense (přesněji pro $n \geqq 5$ úplně a pro $n = 4$ až na logaritmický faktor) rozřešen, tím více vstoupil do popředí zájem o „iracionální" elipsoidy, t. j. o případ, kdy poměry koeficientů α_i nejsou racionální. V těchto případech vypověděla velmi účinná Hardyho metoda takřka úplně službu, neboť jejím základem je vyšetřování potenční řady

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_n = -\infty}^{+\infty} z^{Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{8}$$

konvergentní v jednotkovém kruhu. Některé speciální případy iracionální (označme je (9)) daly se sice po velkých útrapách zvládnout i touto metodou (tak Walfisz v r. 1927 obdržel pro jeden takový speciální případ a pro $n \geqq 10$ odhad

$$\mathsf{P}(x) = o(x^{\frac{n}{2}-1}), \tag{10}$$

který jasně ukázal naprosto rozdílné chování elipsoidů racionálních a iracionálních), avšak podstatného kroku kupředu se tím nedocílilo. Walfisz — vědec nad jiné v tomto oboru povolaný — sám v nahoře citovaném článku k tomu podotýká toto (citováno doslovně): „Ačkoliv tedy odhady (33) a (34) (rozuměj odhady pro případy (9)) přinesly jistý průhled do theorie mřížových bodů v iracionálních elipsoidech, bylo přece jen hned od začátku zřejmo, že myšlenkový pochod k nim vedoucí tvořil jen jakýsi orientační prostředek z nedostatku lepšího. Bylo tedy nutno hodit singulární řadu přes palubu a nalézti něco docela jiného. Myslil jsem, že to ještě nějakou dobu potrvá. Tím více mě překvapily — a jistě ne mě samotného — objevy Jarníkovy. V řadě pojednání, jejichž publikace se datuje od středu minulého roku (rozuměj rok 1928) a které originalitou, hloubkou myšlenek a technickým provedením se čítají k nejpozoruhodnějším pracím moderního bádání, ujal se Jarník s velmi vydatnými pomocnými prostředky problému a obdržel tak celou řadu výsledků překvapující přesnosti“. Potud citace.

Naznačíme aspoň několika slovy základní myšlenku prací Jarníkových z této doby. Místo potenční řady (8) (kde nutně musí být Q číslo celé) vyšetřuje Jarník řadu

$$\Theta(s) = \Theta_Q(s) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_n = -\infty}^{+\infty} e^{-sQ(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{11}$$

komplexní proměnné s, konvergující, a to absolutně, když reálná část $\Re(s) > 0$. Tato řada má tvar $\Theta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i s}$, kde $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k < \ldots \to \infty$ je posloupnost všech hodnot, kterých $Q(x)$ může nabýt pro celočíselné systémy x, a a_i značí, kolikrát $Q(x)$ hodnoty λ_i nabývá. Je známo a snadno se zjistí (α reálné, $u > 0$, integrační dráha je přímka rovnoběžná s imaginární osou), že

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \frac{e^{\alpha s}}{s} \, ds = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha > 0 \\ 0 & \text{pro } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Je tedy pro dané reálné y různé od všech λ_i

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty}\Theta(s)\,\frac{e^{ys}}{s}\,ds=\sum_{\lambda_i<y}a_i\,,$$

což představuje počet celočíselných řešení nerovnosti $Q(x)\leqq y$, tedy vyšetřovanou funkci $A(y)$. K vyšetření uvedeného integrálu (který nezávisí na $u>0$) je účelné — jak ukazuje Jarník — volit integrační dráhu v blízkosti imaginární osy, přesněji řečeno, volit $u=\frac{1}{y}$. Aby určil hodnotu tohoto integrálu, dělí Jarník vhodně integrační dráhu na tři intervaly, z nichž prostřední (konečný) je rozložen symetricky vzhledem k reálné ose. Při odhadu těchto tří částí dostaneme (zhruba řečeno) pro střední část objem $V(y)$ elipsoidu Q, tedy hlavní člen v odhadu funkce $A(y)$, zbývající dvě části dávají pak v podstatě zbytkový člen $\mathsf{P}(y)$. Tyto zbývající integrační dráhy dělí pak Jarník dále t. zv. Fareyovými zlomky (pro dané číslo $t>0$ je soustava Fareyových zlomků tvořena všemi zlomky s čitateli a jmenovateli celočíselnými (ve tvaru zkráceném), pro které jmenovatel je kladný a nejvýše roven číslu t) na intervaly částečné, v nichž provádí odhad integrálu. Přitom užívá transformačních vlastností thetafunkcí.

Není možno zde podrobně rozebrat tuto metodu ani její pozdější velmi účinné modifikace, není ani možno uvést zde v plném znění hlavní výsledky, ke kterým Jarník dospěl v theorii mřížových bodů. Vybereme jen některé výsledky spíše pro ilustraci, při čemž kriteriem výběru bude spíše snadná formulace než hloubka uvedených výsledků v rámci celé theorie.

V práci 18 vyšetřuje Jarník kvadratické formy tvaru

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^2\,, \tag{12}$$

kde koeficienty α_i mohou býti libovolná kladná čísla. Dokazuje pro ně tyto výsledky:

$$\mathsf{P}_Q(y)=O(y^{\frac{n}{2}-1}\log y)\quad\text{pro}\quad n>4\,,$$

$$\mathsf{P}_Q(y)=O(y^{\frac{n}{2}-1}\log^2 y)\quad\text{pro}\quad n=4\,.$$

Naproti tomu ukázal, že pro skoro všechna α_i ($\{\alpha_i\}$ pokládáme za body n-dimensionálního kartézského prostoru s obvyklou definicí Lebesgueovy míry) platí $\mathsf{P}(y)=O(y^{\frac{n}{4}+\varepsilon})$ pro každé $\varepsilon>0$. Zajímavé je sledovat případy přechodné, t. j. formy tvaru

$$\begin{aligned}Q(x)=\beta_1(x_1^2+\ldots+x_{k_1}^2)+\beta_2(x_{k_1+1}^2+\ldots+x_{k_2}^2)+\ldots\\ \ldots+\beta_r(x_{k_{r-1}+1}^2+\ldots+x_{k_r}^2)\,,\end{aligned} \tag{13}$$

kde β_i jsou libovolná kladná čísla. Těmito případy se Jarník v této práci rovněž zabývá a dospívá „řádově" k definitivním Ω-výsledkům, pokud se týče všech forem, a k definitivním O-výsledkům, pokud se týče skoro všech forem.

V práci 19 zobecňuje Jarník výsledek Walfiszův a dokazuje, že pro formy (12), kde aspoň jeden z poměrů $\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$ je iracionální a kde $n \geqq 6$, platí $\mathsf{P}_Q(y) = o(y^{\frac{n}{2}-1})$.

V práci 22 a zejména pak v pracích 68 a 69 zabývá se Jarník opět případem (13), a to nikoliv v celé jeho obecnosti, nýbrž pouze případem $r = 2$, zato však jde do velké hloubky a studuje otázku zbytku $\mathsf{P}_Q(y)$ v závislosti na aritmetickém charakteru podílu $\frac{\beta_2}{\beta_1}$, který zachycuje pomocí rozvoje tohoto podílu v řetězový zlomek. Tyto práce patří mezi nejvýznačnější Jarníkovy práce vůbec.

Aby aspoň jakési světlo bylo vrženo do mezery, kteráční mezi O a Ω-odhadem zbytku $\mathsf{P}(y)$ zvláště pro malá n, studuje Jarník v pracích 33 a 34 opět formy tvaru (12) a vyšetřuje střední hodnotu zbytkového členu, tedy $T(x) = \sqrt{\frac{1}{x}\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,\mathrm{d}y}$. Dostává tyto výsledky, které byly v pracích 70, 71 ještě dále zostřeny.

$$
\begin{aligned}
&T(x) = O(x^{\frac{1}{4}} \log^2 x)\,, && T(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}}) && \text{pro} \quad n = 2\,,\\
&T(x) = O(x^{\frac{1}{2}} \log x)\,, && T(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}}) && \text{pro} \quad n = 3 \quad \text{a}\\
&T(x) = O(x^{\frac{n}{2}-1})\,, && T(x) = \Omega(x^{\frac{n-1}{4}}) && \text{pro} \quad n \geqq 4\,.
\end{aligned}
$$

Pro racionální formy a pro $n \geqq 4$ dostává $T(x) = \Omega(x^{n/2-1})$. Pro skoro všechny formy (12) dostává pak tento výsledek

$$T(x) = O(x^{\frac{n-1}{4}} \log^{\frac{3+3n}{2}} x)\,.$$

Až na logaritmický faktor a pokud se střední hodnoty zbytku $\mathsf{P}(y)$ týče, dostává se tak Jarník k odhadům definitivním, které ku podivu právě pro malá n nezávisí na aritmetickém charakteru koeficientů.

Ze všech těchto úvah vyplývá, že aspoň v jistých speciálních třídách kvadratických forem (daných na př. tvarem (13)) nejvyšší „pravý" řád zbytku $\mathsf{P}(y)$ dávají formy racionální, naproti tomu, že skoro všechny formy dávají „pravý" řád zbytku nejnižší. Vzniká proto otázka, zda existují vhodné „mezi-formy", které by odpovídaly předepsanému „pravému" řádu zbytku $\mathsf{P}(y)$. Touto otázkou se zabývá Jarník v práci 45, kde k důkazu existence takových forem používá s velkým úspěchem jemnější Hausdorffovy míry, o jejímž použití v theorii diofantických aproximací promluvíme později.

Přistupme nyní k rozboru Jarníkových prací z **theorie diofantických aproximací**. Naznačíme nejprve několika slovy, o jakou problematiku zde jde, a vysvětlíme některé pojmy, které se vyskytují v těchto pracích.

První otázka, která se v této theorii vnucuje, je otázka po aproximaci čísel iracionálních Θ čísly racionálními, tedy zlomky tvaru $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou čísla celá, $q > 0$. Je jasné, že snahou zde bude docílit co možná nejlepší aproximace, tedy co možná nejmenšího rozdílu $\left|\Theta - \frac{p}{q}\right|$. Takto formulovaná otázka nemá ovšem velký smysl, když víme, že každé číslo reálné lze s libovolnou přesností aproximovat číslem racionálním. Je proto nutné si všimnout rozdílu $\left|\Theta - \frac{p}{q}\right|$ ve vztahu k velikosti čitatele a jmenovatele (zde stačí se omezit na velikost jmenovatele, neboť jen při trochu lepších aproximacích je velikost čitatele $p \doteq q\Theta$, tedy při daném Θ přibližně úměrná velikosti jmenovatele) v použitém zlomku $\frac{p}{q}$. Zkrátka žádat, aby diference $\left|\Theta - \frac{p}{q}\right|$ byla malá a přitom jmenovatel použitého zlomku nebyl velký. Vzniká tím přirozená otázka, zda lze při dané aproximační funkci $\psi(q)$ (která konverguje k nule pro $q \to \infty$) celými čísly p, q ($q > 0$) vyhovět nerovnosti $\left|\Theta - \frac{p}{q}\right| < \psi(q)$ pro libovolně vysoká q, přesněji, zda ke každému A existuje $q \geqq A$ tak, že daná nerovnost je splněna, nebo — což je totéž pro iracionální Θ — zda tato nerovnost má nekonečně mnoho celočíselných řešení. Přirozeným zobecněním vzniká problém současné aproximace několika iracionálních čísel $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ racionálními čísly $\frac{p_i}{q}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) o společném jmenovateli $q > 0$. Příslušné nerovnosti lze psát též ve tvaru

$$|q\Theta_i - p_i| < q\psi_i(q) = \varphi_i(q)\,,$$

kde φ_i můžeme nazvat aproximační funkcí. Jde zde tedy o aproximativní řešení systému lineárních rovnic $q\Theta_i - p_i = 0$ celými čísly $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ při daných Θ_i. Odtud pak je jen krůček k obecné formulaci základního problému theorie lineárních diofantických aproximací.

Budiž dána soustava n lineárních výrazů (α_{ik} a β_i jsou daná reálná čísla)

$$L_i \equiv \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}x_k - \beta_i - y_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ a n kladných funkcí $\varphi_i(t)$ definovaných a konvergujících monotonně k nule pro $t \to \infty$. Pro jednoduchost předpokládejme, že systém rovnic $L_i = 0$ má jen konečný počet celočíselných řešení v x, y. V theorii lineárních diofantických aproximací jde o to, zda existují celočíselná řešení v x, y systému nerovností

$$|L_i| < \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{15}$$

při čemž samozřejmě musíme klást ještě vedlejší podmínku ve tvaru závislosti velikosti $|x_k|$ na t, na příklad tak, že žádáme, aby t. zv. výška tohoto řešení

$$X = \max_{k=1,2,\ldots,m} |x_k| \tag{16}$$

nepřekročila parametr t, tedy aby bylo

$$X \leqq t\,. \tag{17}$$

Z toho vznikají dvě základní úlohy.

Úkol (A): Nalézti kriteria pro existenci nebo neexistenci řešení nerovností (15) a (17) celočíselnými systémy x, y pro všechna $t \to \infty$.

Úkol (B): Nalézti kriteria pro existenci nebo neexistenci celočíselných řešení vztahů (15) a (17) pro posloupnost hodnot $t_j \to \infty$. Jinými slovy zde žádáme, aby pro libovolně velká A existovaly celočíselné systémy x, y tak, že $t = X = \max |x_k| \geqq A$ a přitom bylo $|L_i| < \varphi_i(X)$. V tomto případě říkáme, že systém (14) připouští aproximaci $\{\varphi_i(t)\}$.

Je samozřejmé, že lze sestavit mnoho rozmanitých variant těchto úkolů a formulovat úkoly další. Mezi úkoly (A) a (B) je ovšem velmi úzký implikační vztah, který nebudeme však zde rozebírat. Podotýkáme pouze, že základní aproximační úloha pro jedno nebo více reálných čísel Θ_i tak, jak byla před chvílí formulována, odpovídá úkolu (B).

Uveďme ještě tuto terminologii. Jestliže čísla β_i vyskytující se ve výrazech (14) jsou vesměs rovna nule nebo — což je pro řešení uvedených úkolů stejné — jsou rovna vesměs číslům celým, nazýváme příslušné problémy homogenními, jinak problémy nehomogenními. Uveďme ještě jednu okolnost. V literatuře pojednávající o diofantických aproximacích byly dříve vyšetřovány hlavně tyto dva případy: Matice koeficientů $\{\alpha_{ik}\}$

a) má jen jeden sloupec ($m = 1$); tu jde zřejmě — v případě problému homogenního — o případ v úvodě naznačený, tedy o případ simultánní aproximace několika čísel reálných;

b) má jen jeden řádek ($n = 1$).

Dále pak velmi často se volívají všechny aproximační funkce $\varphi_i(t)$ stejné a klademe pak $\varphi_i(t) = \varphi(t)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Uveďme nejprve pro orientaci základní výsledek této theorie vyjádřený větou Dirichlet-Kroneckerovou. Je-li systém (14) homogenní, připouští vždy aproximaci

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^{\frac{m}{n}}}\,. \tag{18}$$

Nemělo by tedy celkem smysl studovat zde aproximační funkce $\varphi(t)$, které konvergují „pomaleji" k nule než (18).

V případě $n = m = 1$ plyne z Dirichlet-Kroneckerovy věty, že všechna iracionální čísla Θ připouštějí aproximaci $1/t$ (dokonce — HURWITZ — $1/t\sqrt{5}$). Tuto aproximační funkci nelze obecně „zlepšit". Pomocí theorie řetězových zlomků lze však snadno sestrojit iracionální číslo Θ, které připouští libovolně předepsanou aproximaci $\varphi(t)$, avšak nepřipouští aproximaci v jistém smyslu „lepší", t. j. připouští „právě" aproximaci $\varphi(t)$. V případě $nm > 1$ nemáme pro vyšetřování podobných otázek prostředek analogický a tak mocný, jakým je theorie řetězových zlomků. Zde lze však při vyšetřování existenčních otázek vyjít ze skutečnosti, že množina čísel Θ (nebo množina bodů $(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ v eukleidovském n-dimensionálním prostoru) připouštějících aproximační funkci $\varphi(t)$ se zvětšující se rychlostí konvergence funkce $\varphi(t)$ (k nule) se zmenšuje, zachytit dále vhodným způsobem „velikost" této množiny a použít pak těchto vysledků k řešení různých existenčních otázek. Ostatně studium otázek závislosti „velikosti" uvedených množin na funkci $\varphi(t)$ je samo o sobě zajímavé i v případě $n = m = 1$. Jarník proto věnuje tomuto studiu velkou pozornost a dociluje zde pozoruhodných výsledků. Jistý pohled na tento problém vrhá již Chinčinova věta, která říká, že skoro všechna Θ ve smyslu Lebesgueovy theorie míry připouštějí, resp. nepřipouštějí danou (dosti obecnou[3]) aproximaci $\varphi(t)$, jestliže $\int^{\infty} \varphi(t)\, dt$ je divergentní, resp. konvergentní. V případě simultánních aproximací platí obdobná věta, pouze integrál $\int^{\infty} \varphi(t)\, dt$ nahradí se integrálem $\int^{\infty} \varphi^n(t)\, dt$. Tak v případě aproximačních funkcí typu mocniny $1/t^s$ je toto rozhraní (pro $n = 1$) dáno exponentem $s = 1$, tedy skoro všechna Θ připouštějí aproximaci „právě" $1/t$.

Jak je z toho vidět, je prostředek charakterisovat „velikost" množiny pomocí Lebesgueovy míry pro tyto účely dosti hrubý, když nedocilujeme zde odstupňování velikosti těchto množin ani pro různé aproximační exponenty s. Je proto třeba nahradit jej prostředkem jemnějším. To se Jarníkovi skutečně podařilo. Pro jemnější klasifikaci množin Lebesgueovy míry nulové použil Jarník míry Hausdorffovy, se kterou jsme se již setkali v jedné jeho práci z theorie mřížových bodů.

Budiž dána pro $x > 0$ rostoucí a spojitá t. zv. měřicí funkce $\lambda(x)$, pro kterou $\lambda(x) \to 0$, když $x \to 0$, a nějaká množina A bodů v kartézském (pro jednoduchost jednodimensionálním) prostoru. V případě Hausdorffovy míry $L(A; \lambda(x))$ dané množiny A vzhledem k měřicí funkci $\lambda(x)$ jde v podstatě o to, že neměříme „délku" množiny A celkovou délkou intervalů „těsně" pokrýva-

[3]) T. j. libovolnou funkci až na jisté podmínky monotonie, které pro celkový pohled do této theorie nejsou podstatné, a proto je neuvádíme. Rovněž v dalším přejdeme takové podmínky mlčky.

jících množinu A tak, jak je tomu u míry Lebesgueovy, nýbrž že místo délky d každého intervalu vezmeme délku transformovanou měřicí funkcí λ, tedy $\lambda(d)$. Přesněji: Pro dané $\varepsilon > 0$ definujeme $L_\varepsilon(A; \lambda(x))$ jako infimum všech součtů $\sum_i \lambda(d_i)$ vztahujících se na všechna možná pokrytí nejvýše spočetným množstvím otevřených intervalů o délkách $d_1, d_2, \ldots$. Hausdorffovu míru $L(A; \lambda(x))$ definujeme pak jako limitu $\lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon(A; \lambda(x))$. Čtenář si snadno modifikuje tuto definici pro prostor vícedimensionální. Jsou-li hodnoty měřicí funkce $\lambda(x)$ pro malá x podstatně větší než x, můžeme tušit, že příslušná Hausdorffova míra bude podstatně větší než míra Lebesgueova a že můžeme tedy event. dostat nenulovou Hausdorffovu míru pro množiny o Lebesgueově míře nulové. V práci 28 ukazuje Jarník, že v podstatě lze pro dané množství A pomocí vhodných měřicích funkcí $\lambda(x)$ docílit rozmanité velikosti Hausdorffovy míry množiny A. Tohoto mocného prostředku — theorie míry vůbec a zvláště Hausdorffovy — používá Jarník k vedení existenčních důkazů ve svých pracích o diofantických aproximacích velmi často a dociluje hlubokých výsledků. Podrobněji najde čtenář tyto myšlenky rozvedeny v knize J. F. Koksma, Diophantische Approximationen (Berlin, 1936), vyšlé ve známé sbírce Ergebnisse der mathematischen Wissenschaft. Zde na str. 27, 48, 49, 73, 74, 75 jsou uvedeny odbornější a přehlednější referáty o tomto úseku Jarníkovy činnosti začleněné do širšího rámce, takže lépe vynikne její souvislost s problematikou řešenou jinými odborníky.

Uvedeme nyní hlavní Jarníkovy výsledky sem spadající.

Tak v práci 30 vyšetřuje Jarník Hausdorffovu míru množiny čísel Θ, která připouštějí (při daném $s > 1$) aproximaci $1/t^s$, ale nepřipouštějí aproximaci $1/t^{s+\varepsilon}$, kde $\varepsilon > 0$. Podobně v práci 26 klasifikuje množiny reálných čísel Θ s omezenými posloupnostmi částečných jmenovatelů a aplikuje tyto výsledky na množiny čísel Θ patřících k aproximačním funkcím $1/(t \log^s t)$ $(0 < s \leqq 1)$. V práci 35 je určena Hausdorffova míra množiny bodů $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ $\ldots, \Theta_n)$ v n-dimensionálním kartézském prostoru, připouštějících simultánní aproximační funkci $\varphi(x)$, je-li měřicí Hausdorffova funkce $f(x)$ (φ a f patří do dosti širokých tříd funkcí), a to ve formě kriteria obdobného Chinčinově větě nahoře citované. Výsledná věta má pak zhruba tento tvar: Uvedená Hausdorfova míra je 0 nebo ∞ podle toho, zda

$$\int^{\infty} f\left(2\,\frac{\varphi(t)}{t}\right) t^n \,\mathrm{d}t$$

je konvergentní nebo divergentní. V téže práci Jarník dále ukazuje existenci systému čísel $\{\Theta_i\}$, který připouští danou simultánní aproximaci $\varphi(t)$, nepřipouští však aproximaci trochu silnější, totiž $\varphi(\lambda(t))$, kde $\lambda(t)$ je předem daná (dosti obecná) funkce, pro kterou $\lambda(t)/t \to \infty$ pro $t \to \infty$. Tato — jedna z nejhlubších Jarníkových prací — umožňuje zodpovědět celou řadu těch nejsubtilnějších existenčních otázek nahoře uvedeného typu. K některým speciálním z těchto otázek vrací se Jarník v práci 36, kde podává pro jejich řešení důkaz jednodušší. V práci 37 zavádí Jarník pro systém n reálných čísel $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$ jakýsi „aproximační stupeň" $S(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$ tohoto systému jako horní mez exponentů s, pro které daný systém připouští simultánní aproximaci $1/t^s$. V práci pak vyšetřuje vztah (v podobě nerovnosti) mezi aproximačním stupněm dvou čísel $S(\Theta_1)$ a $S(\Theta_2)$ a aproximačním stupněm simultánním $S(\Theta_1, \Theta_2)$ a ukazuje — a v tom spočívá hlavní cena práce — jeho ostrost.

Tyto všechny práce se vztahovaly k homogennímu úkolu (B), a to k případu a). V některých pracích vyšetřuje Jarník souvislost mezi případem a) a b) u úkolu (B). Podle Dirichlet-Kroneckerovy věty víme, že každá n-řádková a m-sloupcová matice $A = \{\Theta_{ik}\}$ připouští aproximační funkci $\varphi(t) = 1/t^{\frac{m}{n}}$. Některé matice připouštějí aproximaci daleko lepší. Označme stupněm aproximace $\beta(A)$ horní mez exponentů α, pro které A připouští aproximaci $1/t^{\frac{m+\alpha}{n}}$. Je zajímavé studovat na příklad souvislost mezi stupněm aproximace $\beta(A)$ dané matice A a stupněm aproximace $\beta(A')$ matice transponované A'. V případě jednořádkové matice A $(n = 1)$ [pozor! označení je trochu odchylné od označení v Jarníkových pracích] dokázal Chinčin vztah

$$\beta(A) \geqq \beta(A') \geqq \frac{\beta(A)}{(m-1)\,\beta(A) + m^2}\,. \tag{19}$$

V pracích 53, 54, 56 zabývá se Jarník velmi subtilní otázkou ostrosti těchto vztahů a řeší ji.

V práci 59 podal Jarník společně s Erdösem na základě Šnirelmanovy ideje „hustoty součtu posloupností" nový, velmi pěkný důkaz jedné zajímavé Chinčinovy věty, která v podstatě zní takto: Budiž $m \geqq 1$ pevné, celé číslo a $n = 1$. Ke každému $\gamma > 0$ existuje $\Gamma > 0$ tak, že z neřešitelnosti homogenního úkolu (B) při aproximační funkci γ/t^m plyne řešitelnost nehomogenního úkolu (A) při aproximační funkci Γ/t^m při téže matici $\{\Theta_k\}$ a libovolném reálném β_1. Použitím právě uvedené metody podává Jarník v práci 60 důkaz obdobné Chinčinovy věty, jenže pro případ $n \geqq 1$, $m = 1$.

Velmi pozoruhodná je práce 62, která řeší podobný problém jako Chinčin („Übertragungssatz"; viz vzorec (19)), jenže pro úkol (A), kdežto v Chinčinově vzorci (19) vyskytují se stupně aproximace β definované pomocí aproximačních funkcí typu $1/t^s$, ale vzhledem k úkolu (B). Kromě toho jde zde Jarník i po jiných stránkách daleko více do hloubky, zejména neomezuje se na aproximační funkce tvaru mocniny. Pozoruhodná je také okolnost, že výsledky v tomto případě (totiž (A)) se podstatně liší od výsledků v případě (B).

V práci 83 nalezl pak Jarník zajímavé vztahy mezi stupněm aproximace příslušným k homogennímu úkolu (A) a stupněm aproximace příslušným k odpovídajícímu homogennímu úkolu (B) (při téže základní matici), a to v případě obecném (t. j., kdy vyšetřovaná matice nemusí být jednořádková nebo jednosloupcová).

Nežli přejdeme k hodnocení Jarníkových prací, které přímo spadají nebo velmi úzce souvisí s vlastní geometrií čísel, musíme zavést opět několik pojmů, které ostatně se vyskytují již v základní Minkowského větě z geometrie čísel. Je to pojem postupných minim.

Budiž K geometrické, uzavřené, omezené, konvexní, podle počátku symetrické těleso v kartézském n-dimensionálním prostoru R_n, pro které počátek je bodem vnitřním.

Představme si, že se reálný parametr σ zvětšuje od nuly do nekonečna, a budiž σ_s $(1 \leqq s \leqq n)$ první jeho hodnota, pro kterou existuje s lineárně nezávislých mřížových bodů $x_1, x_2, \ldots, x_s$ tak, že $\frac{x_i}{\sigma_s} \in K$ čili $x_i \in \sigma_s K$ pro $i = 1, 2, \ldots \ldots, s$. Body $x_1, x_2, \ldots, x_s$ nemusí být (a také nejsou) tímto požadavkem určeny jednoznačně. Z konvexity tělesa a z okolnosti, že $0 \in K$, plyne, že pro větší hodnoty dilatačního parametru σ (tedy pro $\sigma > \sigma_s$) tím spíše $x_i \in \sigma K$ pro $i = 1, 2, \ldots, s$. Čísla $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ nazýváme (Minkowského) postupnými minimy tělesa K. Pro větší zřetelnost často tato minima značíme obšírněji $\sigma_s(K)$. Zřejmě je $\sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \ldots \leqq \sigma_n$.

Základní Minkowského věta z geometrie čísel pak praví, že

$$\frac{2^n}{n!} \leqq \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n \,\mu(K) \leqq 2^n\,, \tag{20}$$

kde μ značí Lebesgueovu míru, tedy $\mu(K)$ v tomto případě objem tělesa K. Konstanty 2^n a $\frac{2^n}{n!}$ na obou stranách nerovnosti (20) jsou ostré. V práci 78 zabývá se Jarník charakterisací případů, kdy v (20) platí znamení rovnosti, a to metodou Estermannovou.

Budiž K geometrické těleso mající vlastnosti nahoře vytčené. Definujme k němu těleso polární K' jako maximální těleso mající tuto vlastnost: Je-li $x \in K$, $x \neq 0$, pak K' se celé nachází v jednom z uzavřených poloprostorů, ve které polární rovina $\varrho(x)$ bodu x vzhledem k jednotkové ploše kulové (t. j. k ploše kulové o středu v počátku a o jednotkovém poloměru) dělí prostor R_n (totiž v tom poloprostoru, ve kterém leží počátek). Těleso K' uvedené vlastnosti vždy existuje a je určeno jednoznačně. Má rovněž vlastnosti vytčené v předpokladech o K. Buďtež τ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ postupná minima tělesa K', tedy $\tau_i = \sigma_i(K')$ a klaďme $\sigma_i = \sigma_i(K)$. Mahler dokázal, že pro $i = 1, 2, \ldots, n$ je

$$1 \leqq \sigma_i \tau_{n+1-i} \leqq (n!)^2 \tag{21}$$

a

$$\frac{4^n}{(n!)^2} \leqq \mu(K)\, \mu(K') \leqq 4^n\,. \tag{22}$$

Dále ukázal, že v některých případech (a těch Jarník právě dále používá) lze omezující konstanty zlepšit. Této práce použil Jarník k vyšetření souvislosti aproximačních vlastností příslušných k matici $A = \{\alpha_{ik}\}$ a k matici transponované $A' = \{\alpha_{ki}\}$. V pracích 64 a 73 zabývá se tímto problémem a ukazuje, jak lze z neřešitelnosti homogenního úkolu (A), resp. (B) pro matici A a danou aproximační funkci φ soudit na řešitelnost nehomogenního úkolu (B), resp. (A) pro transponovanou matici A', libovolné koeficienty β_i a jistou aproximační funkci, která jednoduše souvisí s danou funkcí φ. Kromě toho práce 73 obsahuje některé metodicky zcela původní Jarníkovy metrické výsledky.

V práci 76 zabývá se Jarník dvoudimensionálním případem středově symetrického, konvexního oboru, omezeného křivkou, jejíž poloměr křivosti je všude nejméně roven $\varrho > 0$. Vyšetřuje pak postupná minima σ_1, σ_2 tohoto oboru a udává horní odhad pro součin $\sigma_1\sigma_2$, který závisí na ϱ a na poměru σ_1/σ_2.

Práce 72, 74, 77 zabývají se zobecněním Minkowského postupných minim a úvah na tělesa nikoliv nutně konvexní. V definici čísel σ_s vystupuje pak ovšem místo s lineárně nezávislých mřížových bodů $x_1, x_2, \ldots, x_s$ s lineárně nezávislých rozdílů mřížových bodů $y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_s - x_s$, kde $x_i \in K$, $y_i \in K$. Poněvadž těleso sestávající z bodů $y - x$ (kde x a y probíhají body z tělesa K) nemusí být konvexní, je zde situace trochu komplikovanější, neboť lze zavésti několik navzájem neekvivalentních definic postupných minim. Jarník odvodil v tomto obecném případě nerovnost analogickou k druhé z Minkowského nerovností (20), i když s větší hodnotou konstanty vpravo. Přesnou hodnotu této konstanty určil později a větu ještě zobecnil vynikající anglický matematik Rogers.

Práce 65, 66, 75 přenášejí některé základní věty z theorie diofantických aproximací do oboru p-adických čísel.

Doposud jsme se zabývali Jarníkovými pracemi z jeho nejvlastnějšího oboru, totiž z theorie čísel. Přejdeme nyní k hodnocení jeho o s t a t n í c h v ě d e c k ý c h p u b l i k a c í.

V práci 1 zabývá se Jarník vzájemnou polohou a rozložením nulových bodů reálných integrálů Besselových diferenciálních rovnic $y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$ pro různé řády ν. Označíme-li $B_\nu(x)$, resp. $\overline{B}_\mu(x)$ dva libovolné integrály uvedené diferenciální rovnice řádu ν-tého, resp. μ-tého, potom pro $\frac{1}{2} < \mu < \nu$ a pro $\alpha_r < \beta_s$ jakož i pro $0 \leqq \mu < \nu < \frac{1}{2}$ a $\beta_s < \alpha_r$ je $\beta_{s+1} - \beta_s < \alpha_{r+1} - \alpha_r$.

Přitom α_r, resp. β_s je r-tý, resp. s-tý kladný nulový bod funkce $B_\nu(x)$, resp. $\overline{B}_\mu(x)$. Kromě toho jsou zde dokázány věty, které podstatně zobecňují výsledky, ke kterým dospěl SCHAFHEITLIN.

Práce 2 zabývá se podrobnějším studiem, zejména derivovanými čísly, známé spojité funkce Bolzanovy, která v žádném bodě nemá derivaci. Jarník zde zvláště ukazuje, že tato funkce v žádném vnitřním bodě nemá derivaci, ani nekonečnou, dále že derivace zleva i zprava mohou být pouze nekonečné a existují současně jen v bodech jisté spočetné množiny.

V práci 3 užívá Jarník metody postupných aproximací na dosti obecnou nelineární integrální rovnici $\Phi[u, \varphi(u)] = \int_0^x \Psi[u, s, \varphi(s)]\, ds$, což zahrnuje případ i nelineární integrální rovnice 1. druhu (LALESCO řešil podobnou metodou pouze rovnici 2. druhu).

Je téměř bezprostředně patrno, že má-li funkce $f(x)$ spojitá a konečná v intervalu $\langle a, b\rangle$ derivaci v každém jeho bodě, pak tato derivace je funkce 1. třídy (t. j. limita posloupnosti funkcí spojitých), a tedy dle Bairovy věty množina bodů, v nichž $f'(x)$ je spojitá, je hustá v daném intervalu. Jarník v práci 5 ukazuje, že předpoklad této věty o spojitosti funkce $f(x)$ lze potlačit. Zde je nutno všude připustit i limity nekonečně velké, zejména tedy připustit za bod spojitosti i bod, v němž hodnota funkce je nekonečná, jen když je splněna příslušná limitní podmínka. Do jisté míry zobecněním metody užité v této práci vznikla práce 10, ve které Jarník charakterisuje funkce $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 1. třídy Bairovy (v n nezávisle proměnných a definovaných na jisté omezené dokonalé množině P) jako jisté limity (nikoliv nutně spojitých) funkcí $2n$ proměnných $F(y, z)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ pro případ, že $y \to x$, $z \to x$, $y \neq z$.

V práci 6 se v podstatě rozšiřuje definiční obor dané funkce $f(x)$, definované v dokonalé části A jistého intervalu I, na celý tento interval tak, aby v bodech množiny $I - A$ funkce $f(x)$ měla konečnou derivaci, a dále, aby v těch bodech množiny A, ve kterých původní funkce vzhledem k množině A má derivaci, měla derivaci, a to stejnou, i funkce rozšířená. Obecněji zabývá se dále tato práce úlohou, jak lze volit derivovaná čísla hledané rozšířené funkce $f(x)$, aby její existence byla zaručena.

Práce 11, 13 a 14 se zabývají přerovnáváním nekonečných řad. Prvá z těchto prací vznikla do jisté míry zobecněním úvah vedoucích k známé Riemannově větě o přerovnávání relativně konvergentních řad. Jarník zde z dané posloupnosti $c_1, c_2, \ldots$ vedoucí k relativně konvergentní řadě $c_1 + c_2 + \ldots$ vybírá pevnou částečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ (složenou nikoliv nutně z nezáporných elementů posloupnosti dané) a zkoumá součty řad vzniklých rozmanitým zasunutím řady $a_1 + a_2 + \ldots$ a řady $b_1 + b_2 + \ldots$ do sebe. Přitom $\{b_i\}$ je posloupnost komplementární k posloupnosti $\{a_i\}$ vzhleden k dané posloupnosti $\{c_i\}$. Druhá z těchto prací zabývá se přerovnáváním nekonečných řad s komplexními členy. Na rozdíl od základní práce STEINITZOVY týkající se této problematiky, vyšetřuje zde Jarník netoliko případy konvergentního přerovnání, nýbrž všechny případy, a místo součtů příslušných řad vyšetřuje množiny $M(a_1 + a_2 + \ldots)$ hromadných bodů částečných součtů těchto řad. Označme $M(a_1, a_2, \ldots)$ sjednocení všech množin $M(b_1 + b_2 + \ldots)$ pro všechna přerovnání $b_1 + b_2 + \ldots$ řady $a_1 + a_2 + \ldots$. Třetí z těchto prací určuje všechny možné typy množin $M(a_1, a_2, \ldots)$. Ukazuje se, že tyto množiny mají velmi jednoduchou strukturu.

V práci 15 uvádí Jarník elementární důkaz známé ARZELOVY věty o záměně operace integrování a limitování v případě Riemannovy definice integrálu, který sestavil pro druhé vydání Petrova Integrálního počtu. Tento důkaz má tu přednost, že se v něm nepoužívá ani theorie míry, ani definice Lebesgueova integrálu. Všechny pojmy a věty z theorie množin (a jde o pojmy a věty nejjednoduššího charakteru), kterých je v důkazu použito, jsou zde zavedeny, resp. odvozeny.

V práci 23 vyšetřuje Jarník spolu s K. GRANDJOTEM, E. LANDAUEM a J. F. LITTLEWOODEM podmínky, které musí splňovat koeficienty a_n trigonometrické řady $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, aby $f(x) \to \infty$ pro $x \to 0$.

Pro určení dolního Riemannova integrálu dané funkce není třeba znát její průběh. Stačí znát toliko t. zv. dolní součty. V práci 25 klade si autor otázku, do jaké míry určují tyto dolní součty funkci samu. Ukazuje se, že v případě funkcí zpolaspojitých zdola s jedné strany je v podstatě funkce svými dolními součty určena jednoznačně.

V práci 29 podává Jarník jiné řešení problému řešeného O. BORŮVKOU, který uvádíme v trochu populárním a méně přesném znění. Je dáno n obcí, které se mají spojit elektrickou sítí o nejmenší spotřebě materiálu tak, aby uzly sítě se nacházely pouze v daných obcích.

Článek 43 zabývá se podobnou problematikou jako článek 29, metoda důkazu je ovšem úplně jiná. Nepožaduje se zde však, aby vrcholy minimální sítě byly v daných bodech.

V pracích 4, 39, 42, 44, 46, 48, 52, 55 navazuje Jarník na práce AUERBACHOVY, BANACHOVY, BESICOVITCHOVY, MAZURKIEWICZOVY, SAKSOVY a STEINHAUSOVY a studuje vlastnosti derivovaných čísel reálných funkcí, které platí pro skoro všechny funkce spojité nebo omezené. Přitom se díváme na funkce jako na elementy ve funkcionálním prostoru s obvyklou definicí vzdálenosti funkcí a název „skoro všechny“ znamená všechny elementy tohoto prostoru až na množinu 1. kategorie (t. j. množinu, kterou lze vyjádřit jako spočetný součet množin řídkých). V článku 42 je obšírněji rozvedena metoda užívaná v těchto pracích, kde kromě toho je ukázáno, že „skoro všechny“

funkce spojité v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nabývají maxima a minima jen jednou, každé jiné své hodnoty pak nekonečněkrát. V práci 55 zobecňuje se pojem derivace v tom smyslu, že místo podílu $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se vyšetřuje podíl $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}$, kde φ je daná funkce definovaná v okolí bodu $h=0$, pro kterou $h\varphi(h) > 0$ pro $h \neq 0$, $\lim\limits_{h=0} \varphi(h) = 0$. Práce 46 navazuje na výsledky BANACHOVY, DENJOYOVY, CHINČINOVY, SAKSOVY a ZYGMUNDOVY. Vyšetřují se zde vlastnosti aproximativních derivací reálných měřitelných funkcí $x(t)$. Přitom aproximativní derivací funkce $x(t)$ nazýváme limitu

$$\lim_{t'\to t} \frac{x(t')-x(t)}{t'-t},$$

jestliže t' probíhá jistou měřitelnou množinu E mající bod t za bod metrické hustoty, t. zn. za bod, pro který platí ($h \geqq 0$, $k \geqq 0$, $h+k>0$)

$$\lim_{h,k\to 0} (h+k)^{-1}\,\mu[E\,.\,(t-h, t+k)] = 1,$$

kde μ značí Lebesgueovu míru. Tento obor Jarníkovy tvůrčí vědecké činnosti by potřeboval zvláštního rozvedení a zhodnocení jak pro svoji rozsáhlost, tak pro vynikající výsledky, ke kterým zde Jarník dospěl. Touto problematikou se zabývá i známý Jarníkův dodatek k Čechovým „Bodovým množinám".

Článek 41 navazuje na práce BANACHOVY a YOUNGOVY, ve kterých jsou studovány vlastnosti množin bodů, ve kterých derivace spojité funkce $f'(x)$ je ∞. Jarník zde v jistém smyslu obrací jejich výsledky, neboť (zhruba řečeno) ukazuje, že k množině mající vlastnosti uvedené v oněch pracích existují naopak rostoucí funkce spojité, pro které $f'(x) = \infty$ právě v bodech této množiny. Na tuto práci navázal ZAHORSKI, který tyto výsledky dovršil.

V práci 49 vyšetřuje Jarník spolu s Landauem souvislost mezi součtem $\sum\limits_{a\leqq n\leqq b} e^{2\pi i f(n)}$ a příslušným integrálem $\int_a^b e^{2\pi i f(x)}\,dx$ v případě, že jde o funkci, jejíž derivace $f'(x)$ je v intervalu $\langle a,b\rangle$ neklesající a pro niž platí $0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2}$. Van der Corput dokázal, že existuje absolutní konstanta C tak, že uvedený součet a integrál se vždy liší nejvýše o C. V práci je ukázáno, že za konstantu lze volit hodnotu $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\pi^2}}$ a že tuto konstantu nelze již obecně snížit. Pro některé speciální případy je udána i nižší hodnota této konstanty.

Práce 50, 51 navazují na práce SIERPIŃSKÉHO, SCHREIERA a ULAMA. Týkají se vytvořování funkcí jistého typu (na př. spojitých, definovaných v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a nabývajících hodnot rovněž z intervalu $\langle 0, 1\rangle$) superposicí z jistého počtu (pokud možno minimálního) funkcí tohoto typu.

Práce 57 zpřesňuje výsledek docílený M. SCHMEISEROVOU (Fund. Math. 22) a zkoumá vzájemnou souvislost množin limitních čísel dané funkce $f(P) = f(x, y)$ při přibližování se k jistému bodu P dané eukleidovské roviny ve dvou různých směrech. Jarník ukazuje, že až na výjimky v jistém smyslu nepatrné každé dvě takové množiny mají alespoň jedno limitní číslo společné. Nazvěme derivovaným číslem zprava (pozor! toto názvosloví nesouhlasí s obvyklým) dané reálné funkce $F(x)$ definované pro všechna reálná x v bodě x číslo d, které lze napsat ve tvaru $d = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n}$ pro vhodnou posloupnost $\{h_n\}$, kde $h_n > 0$, $h_n \to 0$. Obdobný název zavádíme pro derivovaná čísla zleva. Pak z Jarníkovy věty na příklad plyne, že v každém bodě x (až na nejvýše spočetnou množinu) existuje derivované číslo zprava, které je současně derivovaným číslem zleva.

Akademik E. Čech v článku „Topologické prostory" Časopis *66* (1937) zavádí obecné topologické prostory P tím, že každé množině M je přiřazen uzávěr uM splňující docela elementární předpoklady:

$$u\emptyset = \emptyset\,; \quad M \subset P \Rightarrow M \subset uM\,, \quad M \subset N \subset P \Rightarrow uM \subset uN\,.$$

Neustálým tvořením uzávěrů z uzávěrů předcházejících množin dospíváme obecně k množinám širším. Existuje však pro dané $M \subset P$ nejmenší ordinální číslo ξ, pro které $u^{\xi+1}M = u^{\xi}M$. Jarník v práci 61 studuje vlastnosti množiny čísel ξ, probíhá-li M všechny části prostoru P.

V článku 79 uvádí Jarník osm různých, názoru odpovídajících definic kružnice křivosti dané křivky, zkoumá jednak podmínky existence kružnice křivosti v jednotlivých případech, jednak vzájemné implikace těchto definic. Jejich diskuse má v elementární diferenciální geometrii velký význam, neboť v literatuře najdeme u různých autorů nejrozmanitější definice kružnice křivosti a čtenář nedovede někdy ihned odhadnout ekvivalenci nebo neekvivalenci těchto definic.

V článku 82 řeší Jarník problém položený J. MIKUSIŃSKIM, zdali totiž lze nalézti dvě spojité funkce $x(\tau)$, $y(\tau)$ v intervalu $\langle 0, t\rangle$ tak, aby jejich konvoluce, t. j. funkce $z(\sigma) = \int_0^\sigma x(\sigma - \tau)\, y(\tau)\, d\tau$ v intervalu $0 < \sigma < t$ neměla nikde derivaci. Jarník skutečně takovou dvojici funkcí konstruuje a dokonce ukazuje, že skoro všechny (ve smyslu kategorií) dvojice spojitých funkcí $x(\tau)$, $y(\tau)$ mají tuto vlastnost.

Všeobecně známá je věta: Jestliže Wronského determinant $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ (element v k-tém řádku a i-tém sloupci je $(k - 1)$-ní derivace f_i^{k-1}, $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq i \leqq n$), který přísluší k funkcím $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ definovaným v jistém intervalu (a, b) má v intervalu (a, b) hodnost $l \leqq n$ tak, že jistý pevný determinant l-tého řádu utvořený z prvých l řádků je různý od nuly v (a, b), pak