REFERÁTY

EINIGE FRAGEN DER APPROXIMATIONSTHEORIE

(Referát o přednášce dr GÉZY FREUDA proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 6. dubna 1957.)

Přednášející předvedl důkaz následující věty:

Nechť f jest funkce spojitá na celé přímce, periodická s periodou 2π. Nechť f má spojitou derivaci v každém bodě. Existuje absolutní konstanta k s touto vlastností: Nechť P_n je posloupnost trigonometrických polynomů stupně $\leqq n$, nechť γ_n jsou čísla $\geqq 1$ a nechť platí

$$|f - P_n| \leqq \gamma_n E_n(f) .$$

Potom platí

$$|f' - P_n'| \leqq k\gamma_n E_n(f') .$$

Důkaz. Jestliže s_n znamená n-tý parciální součet Fourierovy řady pro f, označíme $V_n(f)$ průměr $\frac{s_n + \ldots + s_{2n-1}}{n}$. Platí potom podle věty de la Vallée-Poussinovy odhad $|f - V_n(f)| \leqq 4E_n(f)$. Dále se dá za uvedených předpokladů dokázati, že $V_n(f') = V_n'(f)$. Je potom

$$f' - P_n' = f' - V_n(f') + [V_n(f) - P_n]' .$$

Rozdíl $f' - V_n(f')$ je odhadnut číslem $4E_n(f')$. Podle Bernsteinovy věty bude druhý rozdíl odhadnut $2n$-násobkem normy polynomu $V_n(f) - P_n$. Je však

$$|V_n(f) - P_n| \leqq |V_n(f) - f| + |f - P_n| \leqq (4 + \gamma_n) E_n(f) .$$

Je tedy

$$|f' - P_n'| \leqq 4E_n(f') + 2n(4 + \gamma_n) E_n(f) .$$

Podle nerovnosti, dokázané nedávno STEČKINEM, platí $E_n(f) \leqq \frac{A}{n} E_n(f')$, odkud ihned plyne uvedený odhad.

Přednášející se zmínil ještě o některých podobných větách týkajících se lokalisace aproximace a v diskusi podal důkaz věty Stečkinovy a zodpověděl řadu dotazů.

Vlastimil Pták, Praha.

O ZOBECNĚNÍ JISTÝCH VĚT O VNOŘENÍ

(Referát o přednášce S. L. SOBOLEVA, proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 15. dubna 1957, o dosud neuveřejněných výsledcích z funkcionální analysy.)

Přednášející nejdříve připomněl, že problematika, kterou se zabýval, přirozeně vznikla při studiu existence zobecněných řešení kvasilineární hyperbolické rovnice

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

$\left(A_{ij}\text{ a }F\text{ jsou funkce proměnných }x_1, \ldots, x_n, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$. Vyslovil definici zobecněných derivací a prostorů W_p^l.

Vlastním obsahem přednášky bylo pak zobecnění těchto dvou vět.

I. *Buď φ reálná funkce n proměnných definovaná v oblasti Ω, $\varphi \in W_p^l$, $lp > n$. Potom je $\varphi \in C$ a existuje konstanta (nezávislá na φ) tak, že $\|\varphi\|_C \leqq M\|\varphi\|_{W_p^l}$.*

II. *Má-li φ týž význam jako ve větě* I *a je-li $lp \leqq n$, potom $\varphi \in L_q$ na každé s-rozměrné nadrovině, kde $s > n - lp$ a $q = \dfrac{sp}{n - lp}$.*

Tyto dvě věty hrají důležitou roli nejenom v theorii hyperbolických rovnic, nýbrž v celé matematické fysice, při řešení eliptických rovnic variační metodou, při formulaci okrajových úloh pro polyharmonickou rovnici atd.

Přednášející ukázal několik jednoduchých objasňujících příkladů na věty I a II a zabýval se potom případem, kdy hodnoty funkce φ leží v Banachově prostoru X. Zavedl definici integrálu pro „abstraktní" funkce (na příkladě ukázal, že definice Bochnerova je pro jeho účely příliš úzká). Pro schodovitou funkci φ je přirozené definovat integrál

$$\int_\Omega \varphi(P)\, \mathrm{d}\Omega = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, m(E_i)\,; \quad \varphi(P) = \alpha_i \text{ na } E_i\,, \quad \bigcup_1^k E_i = \Omega\,.$$

Je-li $\|\varphi\|_\Phi$ norma zobrazení φ taková, že pro $\varepsilon > 0$ existuje δ tak, že pro $\|\varphi\|_\Phi < \delta$ je $\|\int \varphi(P)\, \mathrm{d}\Omega\|_X < \varepsilon$ pro každou schodovitou funkci φ, lze rozšířit operátor integrace na funkce, které v normě prostoru Φ jsou limitou funkcí schodovitých. Pro tyto funkce lze definovat normu $\|\varphi\|_{\Phi_p} = \sup\limits_\omega \dfrac{\|\int \omega(P)\, \varphi(P)\, \mathrm{d}\Omega\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}}$, při čemž ω je schodovitá funkce, jejíž hodnoty jsou reálná čísla a $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ pro $p > 1$; pro případ $p = 1$ je analogicky $\|\varphi\|_{\Phi_p} = \sup \dfrac{\|\int \omega(P)\, \varphi(P)\, \mathrm{d}\Omega\|_X}{\operatorname{Max} |\omega(P)|}$. Je-li X reálná osa, je $\|\varphi\|_{\Phi_p} = [\int\limits_\Omega |\varphi|^p\, \mathrm{d}\Omega]^{\frac{1}{p}}$. Snadno se lze přesvědčit, že $\|\varphi\|_{\Phi_p}$ je skutečně norma. Funkce, pro něž $\|\varphi\|_{\Phi_p} < +\infty$, tvoří lineární prostor Φ_p, který je analogií prostoru L_p.

Přednášející na příkladě ukázal, že prostor Φ_p nemusí být úplný. Φ_p lze doplnit, je však lépe zavedení ideálních elementů obejít tímto způsobem:

Je-li $\varphi(P)$ bodová funkce, jejíž hodnoty leží v prostoru X, potom jí lze předpisem $\varphi(E) = \int\limits_\Omega \xi_E\, \varphi(P)\, \mathrm{d}\Omega$ (ξ_E je charakteristická funkce množiny E) přiřadit množinovou funkci $\varphi(E)$. Je-li $\omega(P)$ schodovitá funkce nabývající reálných hodnot, lze definovat integrál $\int \omega(P)\, \mathrm{d}\varphi(E)$ a s jeho pomocí pak v prostoru Φ_p všech funkcí $\varphi(E)$ normu

$$\|\varphi(E)\|_{\Phi_p} = \sup_\omega \frac{\|\int \omega(P)\, \mathrm{d}\varphi(E)\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}}\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,.$$

Znakem Ψ_p označme množinu těch $\psi(E)$, pro něž je $\psi(E) = \lim \psi_k(E)$, kde $\psi_k(E)$ je množinová funkce přiřazená funkci schodovité. Přednášející dokázal, že $\Psi_p \subset \Phi_p$ a $\Psi_p \neq \Phi_p$.

Akademiku Sobolevovi se podařilo objevit nutnou a postačující podmínku pro to, aby $\psi \in \Psi_p$; to nastane tehdy a jen tehdy, když

a) $\psi(E)$ je absolutně spojitá,

b) $\psi(E)$ je spojitá při posunutí, t. zn. že k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že když $\|Q\|_{E_n} < \delta$, potom $\|\psi(E + Q) - \psi(E)\|_X < \varepsilon$, při čemž $E + Q$ značí množinu, která vznikne posunutím množiny E o vektor Q.

Akademik Sobolev ukázal na příkladě, že existují funkce, které jsou absolutně spojité, ale nejsou spojité při posunutí, t. j. ukázal, že neplatí a)$\Rightarrow$ b) a vyslovil domněnku, že z b) plyne a).

Funkci $\psi(E)$ nazveme zobecněnou derivací $\dfrac{\partial\varphi(E)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, jestliže pro každou funkci v, α-kráte spojitě diferencovatelnou a rovnou nule v blízkosti hranice oblasti Ω, platí

$$\int_\Omega \frac{\partial^\alpha v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \,\mathrm{d}\varphi(E) = (-1)^\alpha \int_\Omega v \,\mathrm{d}\psi(E).$$

H l a v n í v ý s l e d e k, ke kterému přednášející dospěl, je ten, že věty o vnoření I a II platí i pro množinové funkce, které náleží do prostoru Ψ_p. Přitom je ovšem nutné zachovat jistou opatrnost při formulaci vět. Přesné znění věty analogické I je toto:

I'. *Je-li $\psi \in \Psi_p$ množinová funkce definovaná na měřitelných podmnožinách oblasti Ω taková, že $\left\|\dfrac{\partial^l\psi(E)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}}\right\|_{\Phi_p} < K$ a je-li $lp > n$, potom $\psi(E)$ je integrál ze spojité funkce.*

Podobně lze formulovat i větu analogickou II; přednášející se při tom omezil jen na případ $s = n$.

*

S. L. SOBOLEV přednášel ještě v matematické obci pražské dne 18. dubna 1957 na théma „Nová formulace okrajových úloh u eliptických diferenciálních rovnic".

V této přednášce podrobně rozvedl výsledky, kterých dosáhl společně s M. I. VIŠIKEM a které uveřejnil v článku „Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных", ДАН СССР, Т. 111, № 3, 1956, 521—523.

Rudolf Výborný, Praha.

O HOMOMORFISMECH ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN A SVAZŮ

(Vlastní referát o přednášce proslovené v rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků" dne 8. dubna 1957 v Brně.)

Částečně uspořádanou množinou M rozumíme neprázdnou množinu M, na níž je definována asymetrická a transitivní binární relace $<$ (srv. B. DUSHNIK — E. W. MILLER: Partially ordered sets, Amer. Jour. of Math. *63* (1941), 600—610). Je-li $x < y$ nebo $x = y$, píšeme $x \leqq y$ a neplatí-li ani $x \leqq y$ ani $y \leqq x$, píšeme $x \parallel y$.

O částečně uspořádané podmnožině $P \subset M$ říkáme, že je *vložená* (v částečně uspořádané množině M), jestliže platí

$$z \in M - P \Rightarrow \{x < z \Leftrightarrow y < z\} \quad \text{a} \quad \{z < x \Leftrightarrow z < y\} \quad \text{pro každé } x, y \in P\,. \tag{1}$$

Vzhledem k (1) lze na každém rozkladu $\overline{M}$ na částečně uspořádané množině M, který je rozkladem ve vložené částečně uspořádané podmnožiny v M, definovat t. zv. *faktorovou částečně uspořádanou množinu* $\overline{M}$ takto

$$P < Q\,; \quad P, Q \in \overline{M} \Leftrightarrow x < y\,; \quad x \in P\,,\ y \in Q\,. \tag{2}$$

Zobrazení φ částečně uspořádané množiny M na částečně uspořádanou množinu N, které splňuje podmínky

$$x < y\,; \quad x, y \in M \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)\,, \tag{3}$$

$$x \parallel y\,; \quad x, y \in M \Rightarrow \varphi(x) \parallel \varphi(y)\,, \tag{4}$$

je isomorfismem. Splňuje-li podmínku

$$x < y \; ; \quad x, y \in M \Rightarrow \varphi(x) \leqq \varphi(y) \,, \tag{3'}$$

je isotonním zobrazením. Splňuje-li podmínku (3) a podmínku

$$x \parallel y \; ; \quad x, y \in M \Rightarrow \quad \text{buď} \quad \varphi(x) \parallel \varphi(y) \quad \text{nebo} \quad \varphi(x) = \varphi(y) \,, \tag{4'}$$

je *homomorfismem* definovaným pro obecné grafy (srv. K. Čulík: Zur Theorie der Graphen, Čechoslov. mat. žur., v tisku).

Zobrazení φ, které splňuje podmínky (3′) a (4) příp. (3) a (4′), příp. (3′) a (4′), označujeme jako **A**- příp. **B**- příp. **C**-homomorfismus. Rozklad na částečně uspořádané množině M, vytvořený **A**- příp. **B**- příp. **C**-homomorfismem φ, se nazývá **A**- příp. **B**- příp. **C**- vytvořující rozklad a podobně se označuje na takovémto rozkladu definovaná faktorová částečně uspořádaná množina.

Především platí:

Věta 1. *Rozklad $\overline{M}$ na částečně uspořádané množině M je* a) **A**-, *příp.* b) **B**-, *příp.* c) **C**-*vytvořujícím rozkladem právě tehdy, když* a) *je rozkladem ve vložené řetězce, příp.* b) *je rozkladem ve vložené částečně uspořádané podmnožiny, jejichž každé dva různé prvky jsou navzájem nesrovnatelné, příp.* c) *je rozkladem ve vložené částečně uspořádané podmnožiny.*

Theorie **A**-homomorfismu je úplně vybudována a ukazuje se, že platí skoro všechny věty obdobné pro theorii obecného grafového homomorfismu (t. j. zde **B**-homomorfismu). Částečně uspořádanou množinu, která není řetězcem, nazvěme **A**-*jednoduchou*, jestliže na ní existuje právě jedna **A**-faktorová částečně uspořádaná množina. Řetězec nazýváme **A**-*jednoduchým*, jestliže je jednoprvkový. Pak na příklad platí:

Věta 2. *Každá částečně uspořádaná množina je* **A**-*homomorfním vzorem právě jedné (až na isomorfismus) t. zv. její* **A**-*jednoduché částečně uspořádané množiny.*

Z věty 1. a 2. plyne, že každá částečně uspořádaná množina je jednoznačně (až na isomorfismus) charakterisována svojí **A**-jednoduchou částečně uspořádanou množinou, jejímuž každému prvku je přiřazen právě jeden ordinální typ (soustava těchto ordinálních typů je t. zv. **A**-homomorfní charakteristikou dané částečně uspořádané množiny).

Dále na příklad platí:

Věta 3. *Částečně uspořádaná množina M je* **A**-*jednoduchá právě tehdy, když pro každý její* **A**-*homomorfní obraz N platí $M \doteq N$.*

Na rozdíl od **A**- a **B**-homomorfismu je theorie **C**-homomorfismu mnohem chudší, a to proto, že **C**-homomorfismus je více podobný homomorfismu theorie grup. Pak i pojem **C**-jednoduchosti zcela odpovídá pojmu jednoduchosti grupy. Přes tyto závady se zdá, že právě **C**-homomorfismus je nejvhodnějším zobrazením pro studium částečně uspořádaných množin i svazů, neboť je nejobecnějším zobrazením (podle věty 1.), které připouští zavést (netriviálně) pojem faktorové částečně uspořádané množiny a také faktorového svazu.

Platí na příklad:

Věta 4. **C**-*homomorfismus φ, t. j. isotonní zobrazení, které splňuje* (4′), *je homomorfismem vzhledem ke spojení příp. k průseku právě tehdy, když splňuje podmínku* (5) *příp.* (6), *která je tvaru*

$$x \parallel y \,, \quad \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x \vee y) = \varphi(y) \,, \tag{5}$$

$$x \parallel y \,, \quad \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \,. \tag{6}$$

Pojem vložené částečně uspořádané množiny ukazuje cestu ke studiu svazů nikoli jako množin s ternárními relacemi, t. j. s operacemi (tedy analogicky k theorii grup), nýbrž jako množin s binární relací (tedy analogicky k theorii grafů).

Karel Čulík, Brno.

O CYKLICKÝCH GRAFECH

(Vlastní referát o přednášce proslovené v rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků" dne 13. května 1957 v Brně.)

Binární relací ϱ definovanou na množině $F \neq 0$ se rozumí podmnožina kartézského součinu $F \times F$ (t. j. platí $\varrho \subset F \times F$). Dvojici $F(\varrho)$ nazýváme *grafem*. Posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^k$ prvků $u_i \in F$ se nazývá *vázaná* příp. *monotonně vázaná* v $F(\varrho)$, jestliže platí buď $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ nebo $(u_{i+1}, u_i) \in \varrho$ pro $1 \leqq i < k$ příp. $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ pro $1 \leqq i < k$ a říkáme o ní navíc, že je *uzavřená*, platí-li také buď $(u_k, u_1) \in \varrho$ nebo $(u_1, u_k) \in \varrho$ příp. $(u_k, u_1) \in \varrho$. Číslo k se nazývá její *délkou*. Uzavřená monotonně vázaná posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^k$ se nazývá *cyklem*, jestliže $u_i \neq u_j$ pro $i \neq j$.

Binární relaci ϱ nazýváme *cyklickou relací stupně* k (stručně $\mathbf{Z}_k$-relací), splňuje-li podmínku

$$\{u_i\}_{i=1}^k \textit{ je monotonně vázaná posloupnost v } \varrho \Rightarrow (u_k, u_1) \in \varrho\,. \tag{1}$$

Pak $\mathbf{Z}_1$-relace je reflexivní a $\mathbf{Z}_2$-relace je symetrickou relací. Přepíšeme-li podmínku $\mathbf{Z}_3$ do obvyklého tvaru $x\varrho y$, $y\varrho z \Rightarrow z\varrho x$, je zřejmá analogie podmínky cykličnosti s podmínkou transitivnosti. Dále relace ϱ je cyklickou relací stupně $k = 1, 2, 3$ právě tehdy, když je ekvivalencí.

Graf $F(\varrho)$ nazýváme *cyklickým grafem stupně* k, jestliže ϱ je $\mathbf{Z}_k$ relací. Cyklus $\{u_i\}_{i=1}^d$ v $F(\varrho)$ nazýváme *ryzím* cyklem, jestliže platí

$$(u_i, u_j) \in \varrho \Rightarrow i + 1 \equiv j \pmod{d}\,, \tag{2}$$

při čemž všude klademe $u_p = u_q$ pro $p \equiv q \pmod{d}$.

Pak platí:

Věta 1. *Délka ryzího cyklu souvislého cyklického grafu je dělitelem jeho stupně.*

Stupeň k cyklického grafu $F(\varrho)$ nazýváme jeho *periodou*, jestliže existuje cyklus délky k v $F(\varrho)$ a jestliže pro délku d každého cyklu v $F(\varrho)$ platí $d \geqq k$.

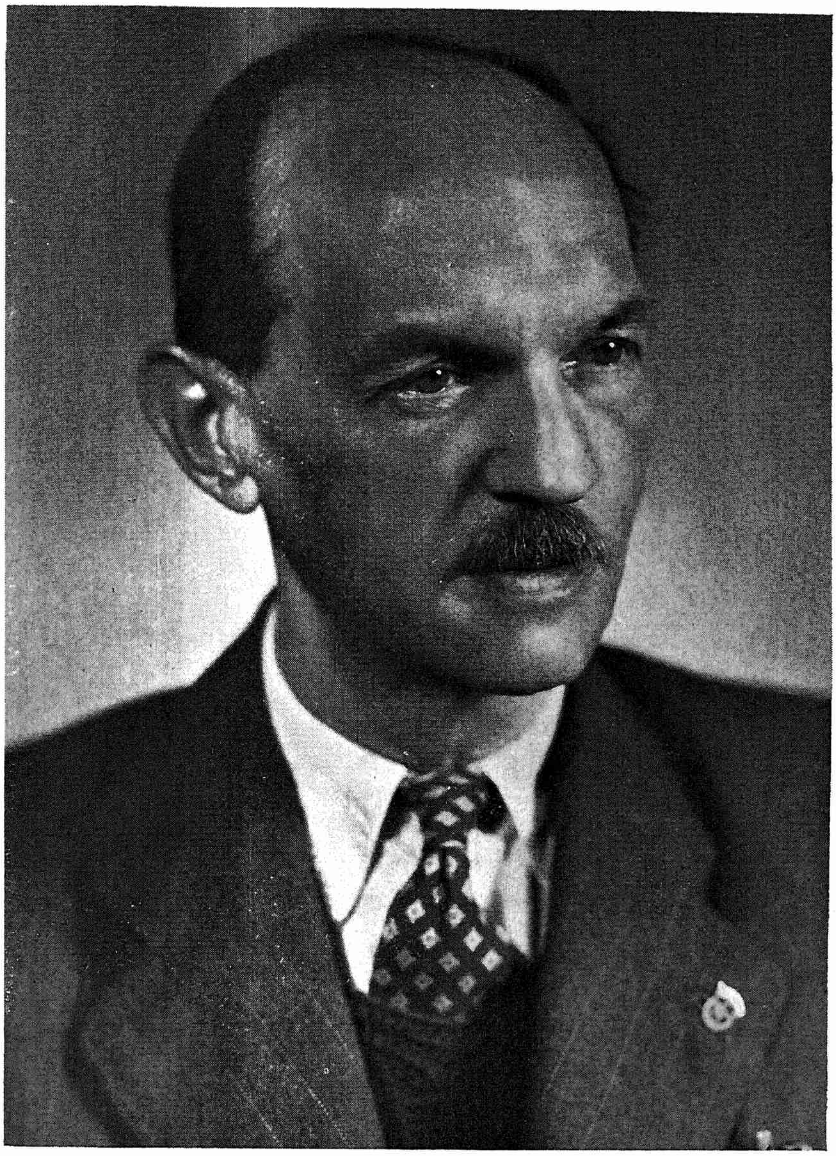
Věta 2. *Souvislý cyklický graf o periodě $k \geqq 3$ je jednoduchým grafem právě tehdy, když je cyklem délky k.*

Věta 3. *Souvislý graf je cyklickým grafem o periodě $k \geqq 3$ právě tehdy, když je homomorfním vzorem cyklu délky k.*

Je tedy každý souvislý cyklický graf o periodě $k \geqq 3$ úplně charakterisován uspořádanou k-ticí mohutností (t. j. vlastně svojí *homomorfní charakteristikou*, která byla definována podobně jako pojem *homomorfismu* a *jednoduchosti* v autorově práci *Zur Theorie der Graphen*, Čas. pro pěst. mat., v tisku), takže se snadno odvodí na příklad)

Věta 4. *Je-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ homomorfní charakteristika souvislého cyklického grafu $F(\varrho)$ o periodě $k \geqq 3$, pak $F(\varrho)$ obsahuje cyklus délky d právě tehdy, když $d = nk$, kde n je přirozené číslo, a když $\alpha_i \geqq n$ pro $1 \leqq i \leqq k$.*

Karel Čulík, Brno.



Akademik Vojtěch Jarník