Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

Řešení úlohy 7. (autor *Ilja Černý*) z Časopisu pro pěst. mat., *81* (1956), 470.

Ke každému přirozenému n sestrojme v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ řídkou uzavřenou množinu D_n o míře větší než $1 - \frac{1}{n}$ a funkci f_n tak, aby platilo $f_n(0) = 0$ a $|f_n'(x)| \leqq 2 \cdot 3^{-n}$ pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$, aby v každém bodě $x \in D_n$ byla oscilace funkce f_n' větší než 3^{-n} a aby funkce f_n' byla spojitá na množině $\langle 0, 1\rangle - D_n$. Položme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Zvolme $x \in D$; buď n nejmenší index takový, že $x \in D_n$. Funkce $f_1', \ldots, f_{n-1}'$ jsou v bodě x spojité, funkce f_n' má v bodě x oscilaci větší než 3^{-n} a platí $\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k'| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-k} = 3^{-n}$. Funkce $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_k'$ je tedy v bodě x nespojitá. Vidíme, že funkce f má omezenou derivaci a množina bodů nespojitosti funkce f' má míru 1.

Jan Mařík, Praha.

7. Nechť M, N jsou úplně uspořádané množiny. Pišme $M \underset{1}{>} N$, jestliže existuje isotonní*) zobrazení množiny M na množinu N, a pišme $M \underset{2}{>} N$, jestliže existuje podmnožina $M' \subset M$ podobná množině N.

Pomocí axiomu výběru lze dokázat, že platí

$$M \underset{1}{>} N \Rightarrow M \underset{2}{>} N \tag{1}$$

pro každé M, N.

Má-li množina M příp. N ordinální typ λ příp. η, potom, jak ukázal M. Sekanina, obrácení implikace (1) neplatí. Má-li však množina M příp. N na př. ordinální typ: a/ $\omega 2$ příp. ω, b/ $(\omega^*)2$ příp. ω^*, c/ $(\omega^*)2 + \omega 2$ příp. $\omega^* + \omega$, snadno se dokáže, že obrácení implikace (1) platí.

a) *Jaké jsou nutné a postačující podmínky pro ordinální typy množin M, N, aby platilo obrácení implikace* (1)?

Pro dobře uspořádané množiny M, N platí

$$M \underset{2}{>} N,\ N \underset{2}{>} M \Rightarrow M \cong N\,, \tag{2}$$

ale existují M, N takové, že (2) neplatí.

*) Viz G. Birkhoff, Теория структур, str. 19.

b) *Pro jaké ordinální typy množin M, N platí implikace* (2)?

Z (1) a (2) plyne, že pro dobře uspořádané množiny M, N platí

$$M \underset{1}{>} N,\ N \underset{1}{>} M \Rightarrow M \cong N\,, \tag{3}$$

ale existují M, N takové, že (3) neplatí.

c) *Pro jaké ordinální typy množin M, N platí implikace* (3)?

Karek Čulík, Brno.

8. V článku „K theorii vícerozměrného integrálu", Čas. pro pěst. mat. *80* (1955), 400—414 dokázal jsem tuto větu: *Buď Q dvourozměrný interval, $a \in Q$. Nechť existuje vlastní limita* $\lim \int_{Q-I} f(x, y)\,dx\,dy = A$, *kde $I \to a$, $a \in$* int I. *Potom existuje též $\int_Q f(x, y)\,dx\,dy$ a rovná se A* (je míněn Perronův integrál).

Rozumíme-li nyní objemem konečnou nezápornou aditivní funkci intervalu, můžeme v podstatě stejným způsobem dokázat podobnou větu i pro integrály podle objemu, který je součinem jednorozměrných spojitých objemů. Rozhodněte, zda platí taková věta i pro případ objemu V, slabě spojitého v bodě a (t. j. $\lim V(I) = 0$ pro $I \to a$).

Karel Karták, Praha.

9. Najděte nějakou (dosti obecnou) postačující podmínku k tomu, aby k dané funkci f existovala primitivní funkce. (Nutnou podmínkou je na př., aby funkce f byla funkcí 1. Baireovy třídy a aby v každém intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ nabývala každé hodnoty mezi $f(\alpha)$ a $f(\beta)$.)

Karel Karták, Praha.

10. Buď $\mathfrak{M}$ nespočetný systém částí intervalu $\langle 0, 1\rangle$, z nichž každá má kladnou vnější míru. Rozhodněte, zda existuje bod $x \in \langle 0, 1\rangle$, který leží v nekonečně mnoha množinách ze systému $\mathfrak{M}$.

Poznámky. 1. Řešení úlohy je kladné, jestliže všechny množiny ze systému $\mathfrak{M}$ jsou měřitelné.

2. Je-li každá množina $M \in \mathfrak{M}$ otevřená, existuje bod, který leží v nespočetně mnoha prvcích systému $\mathfrak{M}$.

3. Z hypothesy kontinua snadno plyne existence takového (nespočetného) systému $\mathfrak{M}$, že každý bod intervalu $\langle 0, 1\rangle$ leží jen ve spočetně mnoha množinách z $\mathfrak{M}$ a že pro každé $M \in \mathfrak{M}$ je množina $\langle 0, 1\rangle - M$ spočetná.

Jan Mařík, Praha.

11. Jest charakterisovat (a na příkladech ilustrovat) všechna uspořádaná komutativní algebraická t. zv. *logaritmická tělesa*, t. j. taková tělesa, která stejně jako těleso reálných čísel mají aditivní grupu všech prvků isomorfní a podobnou s multiplikativní grupou všech kladných prvků.

L. Rieger, Praha.

12. Budiž G Abelova lokálně kompaktní topologická grupa s invariantn í (Haarovou) mírou. Grupovým okruhem $\mathfrak{R}_G$ se pak rozumí okruh všech komplexních, měřitelných a absolutně integrovatelných funkcí f definovaných na G při následujících definicích sčítání a násobení:

$$f + g = h \text{ značí } f(x) + g(x) = h(x) \qquad \text{pro každé } x \in G\,,$$
$$f \,.\, g = h \text{ značí } h(x) = \int_G f(x - y)\, g(y)\, dy \text{ pro každé } x \in G\,.$$

Tento okruh $\mathfrak{R}_G$ je dokonce normovaným okruhem při normě $\|f\| = \int_G |f(x)|\, dx$ (viz *Гельфанд И. И.*, *Райков Д. А.* и *Шилов Г. Е.*, Коммутативные нормированние кольца, Успехи мат. наук 1: 2 (12), (1946), 48—148).

Uvažme podokruh $\mathfrak{R}_G^*$ okruhu $\mathfrak{R}_G$ těch funkcí $f^* \in \mathfrak{R}_G$, které jsou mimo jistou kompaktní množinu $\mathfrak{M}_{f^*} \subseteq G$ (t. zv. kompaktní nosič funkce f^*) identicky rovny 0. Otázka zní:

Kdy $\mathfrak{R}_G^*$ má a kdy nemá dělitele nuly?

Poznámka. 1. Autor problému využívá této příležitosti, aby doznal, že jeho tvrzení (ohlášené v referátě „Poznámky k operátorovému počtu Mikusińského" dne 5. 12. 1955), že okruh $\mathfrak{R}_G$ nemá dělitelů nuly v případě, když G je aditivní grupa reálných čísel, je nesprávné. (Možno totiž nepřímým jednoduchým způsobem udat v tomto okruhu $\mathfrak{R}_G$ dělitele nuly pomocí Fourierovy transformace.)

2. Na druhé straně příslušný podokruh $\mathfrak{R}_G^*$ (je-li stále G aditivní grupa reálných čísel) dělitele nuly nemá, jak plyne snadno z věty Titchmarshovy (viz na př. *J. Mikusiński*: Rachunek operatorów). Ovšem v případě, že G je konečná, $\mathfrak{R}_G^*$ dělitele nuly má. Je tedy na místě domněnka:

Okruh $\mathfrak{R}_G^*$ nemá dělitele nuly tehdy a jen tehdy, jestliže G je aperiodická (t. j. každý její nenulový prvek je nekonečného řádu).

L. Rieger, Praha.

13. Nechť $k \geqq d$ jsou daná přirozená čísla a nechť posloupnost celých čísel d_i, $i = 1, 2, \ldots$ je definována podmínkami $d_1 = d$, $0 < d_{i+1} < d_i$ a $k = n_i d_i + d_{i+1}$, kde n_i je vhodné přirozené číslo. Pak poslední definované číslo je d_p, kde $p \geqq 1$, pro něž platí $d_p \mid k$.

a) Udejte nutné a postačující podmínky pro to, aby $d_p = 1$!

Nutnou podmínkou na příklad je, aby $(k, d) = 1$. Kdyby totiž bylo $(k, d) > 1$, pak
$(k, d_i) > 1 \Rightarrow (k, d_{i+1}) > 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, p - 1$, takže $d_p = (k, d_p) > 1$. Tato podmínka však není postačující, neboť pro $k = 27$ a $d = 4$ je $p = 2$ a $d_p = 3$, ačkoliv $(27,4) = 1$.

Postačující podmínkou je, aby k bylo prvočíslem a $d \neq k$, ale to zase není podmínkou nutnou, neboť pro $k = 9$ a $d = 4$ je $p = 2$ a $d_p = 1$.

b) Udejte hodnotu čísla d_p v závislosti na k, d!

c) Udejte nutné a postačující podmínky pro k a d, aby $p = r$, kde r je předem dané přirozené číslo!

Karel Čulík, Brno.

14. *Incidenční maticí* se rozumí matice vytvořená z nul a jedniček. O dvou incidenčních maticích téhož typu řekneme, že jsou *silně ekvivalentní*, jestliže jednu lze vytvořit z druhé vhodnou výměnou jejích řádků mezi sebou a sloupců mezi sebou.

Nechť m/n je předepsaný typ incidenční matice (t. j. m příp. n udává počet jejích řádků příp. sloupců).

a) Určete počet $\varphi_1(m/n)$ incidenčních matic typu m/n, které (I) nejsou silně ekvivalentní, (II) nejsou přímým součtem dvou incidenčních matic a (III) nemají žádné dva řádky ani žádné dva sloupce stejné!

b) Určete počet $\varphi_2(m/n)$ příp. $\varphi_3(m/n)$ příp. $\varphi_4(m/n)$ incidenčních matic typu m/n, které splňují (I) příp. (I) a (II) příp. (I) a (III)!

c) Najděte vztahy mezi funkcemi $\varphi_i(m/n)$ pro $i = 1, 2, 3, 4$.

Číslo $\varphi_1(m/n)$ na příklad udává počet neisomorfních částečně uspořádaných množin délky 2, které mají m maximálních a n minimálních prvků a které jsou souvislé (viz J. Hashimoti: On direct product decomposition of partially ordered sets, Ann. of. Math. *54* (1951)) a jednoduché (totiž jednoduché jsou jejich Hasseovy diagramy jako 2-rozměrné konečné sestavy, viz K. Čulík: Theorie zobecněných konfigurací, Práce brněnské základny ČSAV, spis 355, XXIX (1957)).

Karel Čulík, Brno.