Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

K JEDNÉ METODĚ UŽÍVANÉ PŘI VÝPOČTU HODNOT KOMPLEXNÍCH KOŘENŮ ALGEBRAICKÉ ROVNICE METODOU GRAEFFEOVOU

VLADIMÍR HORÁK, Brno.

(Došlo dne 6. října 1956.) DT:512.35

Graeffeovou metodou můžeme určit pro danou algebraickou rovnici absolutní hodnoty reálných a komplexních kořenů. K určení komplexních kořenů z těchto absolutních hodnot užíváme různých metod, které jsou však tím komplikovanější, čím více komplexních kořenů daná rovnice obsahuje. V této práci je provedeno propracování jisté metody pro určení komplexních kořenů dané algebraické rovnice. Poněvadž uvedené výsledky se nemění, má-li rovnice také kořeny reálné, budeme se zabývat jenom rovnicemi, které mají vesměs komplexní kořeny.

Předpokládejme v dalším, že algebraická rovnice s reálnými koeficienty $2n$-tého stupně

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0 \tag{1}$$

má samé komplexní kořeny, které jsou jednoduché a jejichž absolutní hodnoty můžeme určit metodou Graeffeovou.

Věta 1. *Nechť absolutní hodnoty kořenů rovnice* (1) *jsou*

$$r_i = \sqrt{\xi_i\bar{\xi}_i}\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n\,, \tag{2}$$

kde ξ_i a $\bar{\xi}_i$ *značí čísla komplexně sdružená; nechť tyto absolutní hodnoty splňují nerovnosti*

$$0 < r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_n\,. \tag{3}$$

Rozvineme-li (1) *podle mocnin proměnné*

$$y = x - u\,, \tag{4}$$

kde pro u platí buď

$$0 < u < U = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Min}\,(r_{i+1} - r_i)\,, \quad r_{i+1} \neq r_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{5}$$

jestliže se všechna r_i *navzájem nerovnají, nebo*

$$0 < u\,, \tag{5'}$$

jestliže r_i jsou vesměs sobě rovna, a vypočteme-li absolutní hodnoty kořenů $\eta_i = \xi_i - u$, $\bar{\eta}_i = \bar{\xi}_i - u$ upravené rovnice

$$a_0 y^{2n} + \alpha_1 y^{2n-1} + \ldots + \alpha_{2n} = 0\,, \tag{6}$$

pak pro tyto absolutní hodnoty

$$\varrho_i = \sqrt{\eta_i \bar{\eta}_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

platí

$$0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_n \tag{8}$$

a jednotlivé komplexně sdružené kořeny rovnice (1) obdržíme jako kořeny n kvadratických rovnic

$$x^2 + \frac{\varrho_i^2 - r_i^2 - u^2}{u}\, x + r_i^2 = 0\,, \tag{9}$$

kde ϱ_i a r_i jsou hodnoty stojící na témž pořadovém místě v nerovnostech (3) *a* (8).

D ů k a z. Jestliže $r_i < r_{i+1}$ (i lib.), pak z trojúhelníkové nerovnosti a užitím (5) plyne ihned $\varrho_i < \varrho_{i+1}$. Jestliže

$$r_i = r_{i+1} \quad (i \text{ lib.})\,, \tag{10}$$

musí být amplitudy φ_i a φ_{i+1} příslušných kořenů různé, poněvadž násobné kořeny vylučujeme a pro amplitudy příslušných kořenů s kladnou imaginární částí platí $0 < \varphi_i < \varphi_{i+1} < \pi$ a tedy

$$\cos \varphi_i > \cos \varphi_{i+1}\,. \tag{11}$$

Obecně ale je

$$\varrho_j^2 = (\xi_j - u)(\bar{\xi}_j - u) = r_j^2 - 2ur_j \cos \varphi_j + u^2\,, \tag{12}$$

čili plyne z (10) a (11) opět $0 < \varrho_i < \varrho_{i+1}$. Dají se tedy hodnoty r_i a ϱ_i jednoznačně přiřadit a platí $\xi_i \bar{\xi}_i = r_i^2$ a podle (12) $\xi_i + \bar{\xi}_i = -\dfrac{\varrho_i^2 - r_i^2 - u^2}{u}$, čili ξ_i a $\bar{\xi}_i$ jsou kořeny kvadratických rovnic (9).

Věta 2. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 1 a nechť h je první index, pro nějž platí $r_{h-1} < r_h$. Je-li řád čísla r_i roven p_i, pak číslo U definované v* (5) *je nejvýše řádu p_h. Poněvadž r_i mohou být vypočtena na konečný počet cifer, může být řád čísla U roven až nejnižšímu z řádů poslední od nuly různé cifry čísla r_{j-1} nebo r_j, pro něž platí $r_{j-1} < r_j$.*

D ů k a z. Řád čísla $\dfrac{r_i - r_{i-1}}{2}$ je nejvýše p_i, ale může být roven až řádu poslední od nuly různé cifry čísla r_i nebo r_{i-1}. Odtud je tvrzení zřejmé.

D ů s l e d e k. Jestliže vezmeme místo rovnice (1) rovnici reciprokou, pak absolutní hodnoty $s_1, s_2, \ldots, s_n$ kořenů této rovnice jsou s absolutními hodnotami (2) kořenů rovnice (1) ve vztahu

$$0 < s_n \leqq s_{n-1} \leqq \ldots \leqq s_1\,,$$

kde $s_i = 1/r_i$; nechť h je poslední index, pro nějž platí $s_{h+1} < s_h$; je-li řád čísla s_i roven q_i, je číslo $U = \frac{1}{2}\,\mathrm{Min}\,(s_i - s_{i+1})$, $s_i \neq s_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, nejvýše řádu q_h.

Z důvodů praktických je nutné klást na parametr u ještě další požadavek. Mohlo by se totiž stát, že hodnota u je tak malá, že v rozvoji (6), který je tvaru

$$a_0y^{2n} + \left[a_1 + \binom{2n}{1} a_0u\right] y^{2n-1} + \left[a_2 + \binom{2n-1}{1} a_1u + \binom{2n}{2} a_0u^2\right] y^{2n-2} + \\ + \ldots + [a_{2n} + a_{2n-1}u + \ldots + a_1u^{2n-1} + a_0u^{2n}] = 0\,, \tag{6'}$$

ovlivní tato hodnota koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ rovnice (1) až na místech, jejichž řád je značně nižší než řád jednotlivých koeficientů, a pak by se koeficienty rovnice (6), jestliže bychom je museli zaokrouhlit, vůbec nebo téměř vůbec nelišily od koeficientů a_i rovnice (1) a tím bychom pro ϱ_i obdrželi značně nepřesné výsledky a také velké chyby pro kořeny. Koeficienty v rovnici (6′) jsou tvaru

$$\beta = b_0u^m + b_1u^{m-1} + \ldots + b_m\,, \tag{13}$$

při čemž jednotlivé sčítance mohou být čísla různých řádů a s různým počtem cifer, takže výsledný koeficient β může mít značný počet cifer a bude nutné jej pro další výpočty zaokrouhlit. Počet cifer nějakého čísla definujme takto:

Definice 1. *Říkáme, že číslo C má γ cifer, jestliže rozdíl řádů první a poslední od nuly různé cifry zvětšený o jednotku je roven γ.*

Věta 3. *Nechť čísla $b_0, b_1, \ldots, b_m$, z nichž alespoň dvě jsou od nuly různá, mají po řadě řády $p_0, p_1, \ldots, p_m$, při tom číslům $b_i = 0$ řád nepřisuzujeme. Utvoříme-li číslo (13), kde $u = 10^p$, p celé, pak řády jednotlivých sčítanců (pokud $b_i \neq 0$) jsou*

$$q_0 = p_0 + mp\,, \quad q_1 = p_1 + (m-1)\,p\,, \ldots, q_m = p_m\,. \tag{14}$$

Dá se určit interval $\langle \overline{p}_\beta, \overline{\overline{p}}_\beta \rangle$ tak, že pro každé p mimo tento interval čísla (14) v napsaném pořadí tvoří monotonní posloupnost, která je pro $p < \overline{p}_\beta$ rostoucí a pro $p < \overline{\overline{p}}_\beta$ klesající. Jsou-li pouze dvě z čísel b_i různá od nuly, pak $\overline{p}_\beta = \overline{\overline{p}}_\beta$ a místo intervalu máme jediný bod.

Důkaz. Je zřejmé, že sčítance v (13) nabývají pro $u = 10^p$ řády uvedené v (14). Aby se dvě z čísel (14) rovnala, na př. q_j a q_k ($j \neq k$), musela by mít rovnice

$$p_j + (m - j)\,p = p_k + (m - k)\,p \tag{15}$$

celočíselné řešení pro p; obecně (15) celočíselné řešení nemá a označme proto její kořen p_{jk} ($j \neq k$).

Jestliže platí nerovnosti

$$0 < m - j < m - k\,, \quad \overline{p} > p_{jk}\,, \tag{16}$$

pak je

$$p_j + (m - j)\,\overline{p} < p_k + (m - k)\,\overline{p}\,. \tag{17}$$

Stejně pro $0 < m - j < m - k$, $\bar{p} < p_{jk}$ platí (17) s opačným znaménkem nerovnosti.

Vypočteme-li všechna možná čísla p_{jk}, obdržíme množinu čísel, která není prázdná. Označme nejmenší číslo této množiny $\bar{p}_\beta$ a největší $\bar{\bar{p}}_\beta$; tato dvě čísla splývají v případě, že pouze dvě čísla b_i jsou různá od nuly. Je-li nyní $p > \bar{\bar{p}}_\beta = \operatorname*{Max}_{j,k} p_{jk}$, pak pro čísla q_i platí podle (17) $q_0 < q_1 < \ldots < q_m$ a podobně pro $p < \bar{p}_\beta = \operatorname*{Min}_{j,k} p_{jk}$ platí $q_0 > q_1 > \ldots > q_m$. Snadno se vidí, že čím více se p liší od p_{jk}, tím více se řády q_j a q_k od sebe liší.

Důsledek. Podle předcházející věty můžeme pro každý koeficient rovnice (6′) určit interval $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$; volíme-li řád p čísla u tak, že je $p < \operatorname*{Min}_i \bar{p}_{\alpha_i}$, pak zřejmě sčítance nejvyššího řádu v jednotlivých koeficientech budou právě koeficienty a_i původní rovnice, pokud jsou různé od nuly, a poněvadž řád dalšího sčítance je menší, proto nemusí se žádný nebo většina koeficientů, které zaokrouhlíme, lišit od koeficientů rovnice původní.

Stejně volíme-li řád p čísla u tak, že je $p > \operatorname*{Max}_i \bar{\bar{p}}_{\alpha_i}$, potom sčítanec nejvyššího řádu v koeficientu α_i bude právě $\binom{2n}{i} a_0 u^i$ a tedy po zaokrouhlení α_i nemusela by se rovnice (6′) vůbec lišit od rovnice $a_0(y + u)^{2n} = 0$, je-li řád p dosti vysoký. Z těchto důvodů je třeba volit řád p čísla u v intervalu

$$\langle \operatorname*{Min}_i \bar{p}_{\alpha_i}, \quad \operatorname*{Max}_i \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} . \rangle \tag{18}$$

Abychom vhodně zvolili číslo u, bude výhodné řídit se zásadami následujícího pravidla:

Pravidlo 1. a) Řád čísla u volíme v intervalu (18) a to tak, aby pokud možno ležel v průniku všech a nebo alespoň většiny z intervalů $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$.

b) V jednotlivých intervalech, pokud jejich části patří do průniku, snažíme se určit řád p tak, aby po zaokrouhlení α_i nebyl roven ani prvnímu, ani poslednímu sčítanci. Z toho důvodu je výhodné sestavit si pro každý koeficient α_i tabulku tvaru

$p =$	$p_0 + ip$	$p_1 + (i-1)p$	...		$p_{i-1} + p$	p_i
$[\bar{p}_{\alpha_i}]$						
$[\bar{p}_{\alpha_i}] + 1$						
$\vdots$						
$[\bar{p}_{\alpha_i}] + k$				P_{ki}		
$\vdots$						

kam do jednotlivých řádků napíšeme řády, které nabývají jednotliví sčítanci pro celá čísla z intervalu $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$. V každém řádku bude alespoň jedno číslo největší, které označme P_{ki}. Předpokládejme, že koeficienty pro výpočet Graeffeovou metodou zaokrouhlíme na q cifer. Pak pro každý koeficient α_i určíme vhodný řád čísla u tak, aby v intervalu $\langle P_{ki} - q, P_{ki} \rangle$ bylo nejvíce cifer ze všech cifer toho řádku. Tím docílíme, že při zaokrouhlení vypustíme pro tento koeficient nejméně sčítanců.

Máme-li určen pro každý koeficient α_i vhodný řád čísla u, snažíme se z těchto řádů vybrat ten, který vyhovuje nejvíce koeficientům.

c) V případě, že z intervalů $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$ nemá vůbec žádný nebo jen nejvýše vždy dva z nich společnou část, nelze na základě předcházejících úvah žádné pravidlo vyslovit.

Číslo U vypočteme přibližně tak, že rovnici (1) řešíme metodou Graeffeovou a koeficienty rovnic $R^2, R^4, \ldots$ počítáme jen užitím logaritmického pravítka. Z vypočtených absolutních hodnot kořenů určíme pak U a u.

Za číslo u můžeme také volit některé z čísel $2 \cdot 10^{p-1}, \ldots, 9 \cdot 10^{p-1}, 10^p, 2 \cdot 10^p, \ldots, 9 \cdot 10^p$, je-li to výhodnější.

Příklad 1. Mějme rovnici 10-tého stupně a nechť její koeficienty jsou většinou téhož řádu q, ale při tom všechny nechť leží na př. v intervalu $\langle 5 \cdot 10^{q-1}, 5 \cdot 10^{q+1} \rangle$. Pak binomická čísla vyskytující se v koeficientech rovnice (6') pro $n = 5$ jsou řádů 0, 1 a 2, což značí, že koeficienty sčítanců jsou přibližně řádů $q, q + 1, q + 2$. Poněvadž číslo $u = k \cdot 10^p$ ($1 \leqq k \leqq 9$, celé) se vyskytuje v koeficientech jako součinitel v mocninách 0 až 10, bude většinou nejvýhodnější volit řád $p = 0$. Někdy snad bude také výhodné volit $p = 1$ nebo $p = -1$.

Poznámka 1. Předcházejících výsledků užijeme buď na rovnici (1), nebo na rovnici k ní reciprokou podle toho, pro kterou je volba čísla u příhodnější. Tímto způsobem určený řád p čísla u porovnáme s řádem čísla U, které je určeno v (5). Je-li nyní $0 < u < U$, pak volíme řád čísla u podle pravidla 1 a věta 1 dává uvedené výsledky.

Může však nastat případ, že řád čísla U je takový, že pro zvolené u podle pravidla 1 je $U < u = 10^p$ a pro $u < U$ rovnice (6) se málo liší od rovnice (1). Ale řád čísla U závisí na řádech čísel $\frac{r_{i+1} - r_i}{2}$. Zabývejme se proto v dalším otázkou, jak se mění přiřazení hodnot r_i a ϱ_i v případě, že vynecháme při určení čísla U některý rozdíl $r_{j+1} - r_j$ proto, že je příliš malý. Je-li ale rozdíl $r_{j+1} - r_j$ příliš malý, znamená to, že buď kořeny ξ_j a ξ_{j+1} a podobně komplexně sdružené kořeny leží co do absolutní hodnoty blízko sebe, anebo dokonce leží v blízkém okolí, čili, že i jejich amplitudy se od sebe málo liší.

Lemma. *Nechť jsou ξ_j a ξ_k dva libovolné kořeny rovnice (1) s kladnou imaginární částí. Jestliže se jejich reálné části nerovnají, lze určit právě jedno $u = u_1$ tak, že transformací (4) přejdou v kořeny η_j a η_k takové, že jejich absolutní hodnoty ϱ_j a ϱ_k se rovnají; jestliže se jejich imaginární části nerovnají, lze určit právě jedno $u = u_2$ tak, že transformací (4) přejdou v kořeny η_j a η_k takové, že jejich absolutní hodnoty ϱ_j a ϱ_k se od sebe co nejvíce liší.*

V Gaussově rovině body $(u_1, 0)$ a $(u_2, 0)$ jsou průsečíky symetrály a spojnice bodů odpovídajících těmto kořenům s reálnou osou.

Podle tohoto lemmatu je zřejmé, že pro dva páry kořenů, jejichž absolutní hodnoty se od sebe málo liší a které leží v blízkém okolí, nedocílíme žádnou transformací (4), aby absolutní hodnoty kořenů transformovaných se od sebe mnoho lišily. Kořeny, které neleží v blízkém okolí se mohou transformovat v kořeny, jejichž absolutní hodnoty se mohou od sebe značně lišit.

Věta 4. *Nechť pro absolutní hodnoty kořenů rovnice (1) platí nerovnosti $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n$*[1]*) a dále nechť pro absolutní hodnoty dvojic kořenů*

$$\xi_j, \xi_{j+1}\,; \quad \xi_k, \xi_{k+1}\,; \ldots; \xi_m, \xi_{m+1} \tag{19}$$

platí

$$\frac{r_{j+1} - r_j}{2} = \varepsilon_j, \quad \frac{r_{k+1} - r_k}{2} = \varepsilon_k, \ldots, \quad \frac{r_{m+1} - r_m}{2} = \varepsilon_m\,,$$

kde čísla $\varepsilon_j, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_m$ jsou značně menší než číslo u určené podle pravidla 1 a ostatní rozdíly $\dfrac{r_{i+1} - r_i}{2}$ $(i \neq j, k, \ldots, m)$ jsou větší než toto u.

Rozvineme-li (1) podle mocnin proměnné $y = x - u$, kde

$$0 < u < U_1 = \tfrac{1}{2} \operatorname{Min}\,(r_{i+1} - r_i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \; i \neq j, k, \ldots, m \tag{20}$$

(číslo u je určeno podle pravidla 1) a vypočteme-li absolutní hodnoty ϱ_i kořenů transformované rovnice (6), pak pro ně platí

$$\begin{gathered} 0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_j, \varrho_{j+1} < \varrho_{j+2} < \ldots < \varrho_k, \varrho_{k+1} < \ldots \\ \ldots < \varrho_m, \varrho_{m+1} < \ldots < \varrho_n \end{gathered} \tag{21}$$

a kořeny

$$\xi_i, \quad i \neq j, j+1, k, k+1, \ldots, m, m+1 \tag{22}$$

a k nim komplexně sdružené kořeny vypočteme z kvadratických rovnic

$$x^2 + \frac{\varrho_i^2 - r_i^2 - u^2}{u}\, x + r_i^2 = 0\,, \quad i \neq j, j+1, \ldots, m, m+1\,. \tag{23}$$

Zbývající kořeny se nacházejí mezi kořeny kvadratických rovnic

$$x^2 + \frac{\varrho_p^2 - r_q^2 - u^2}{u}\, x + r_q^2 = 0\,, \tag{24}$$

[1]) Jestliže by se některá r_i rovnala, nemá to žádný význam pro další úvahy.

kde p a q proběhnou všechny možné variace 2. třídy s opakováním ve dvojicích $j, j+1; k, k+1; \ldots; m, m+1$.

Důkaz. Pro dvojice kořenů ξ_p a ξ_q, pro něž platí $\frac{r_q - r_p}{2} \geqq U_1$, plyne jako ve větě 1, že $\varrho_p < \varrho_q$. Ale nerovnost (25) neplatí pouze pro $p = j, k, \ldots, m$, $q = p + 1$, takže si opět jednoznačně odpovídají r_i a ϱ_i, pro něž $i \neq j, j+1, k, k+1, \ldots, m, m+1$. Pro kořeny ξ_j různé od uvedených v (22) je tvrzení zřejmé.

Poznámka 2. Nerovnosti (21) jsou psány s ohledem na jednoznačné přiřazení absolutních hodnot r_i a ϱ_i, takže o ϱ_j a ϱ_{j+1} nelze říci nic, než že obě leží mezi ϱ_{j-1} a ϱ_{j+2} atd.

Důsledek 1. Jestliže mezi absolutními hodnotami r_i je jedna nebo více skupin o dvou nebo více hodnotách r_i, pro něž platí

$$\begin{aligned}
&\frac{r_{j+1} - r_j}{2} = \varepsilon_j' \,; \quad \frac{r_{j+2} - r_{j+1}}{2} = \varepsilon_j'' ; \ldots ; \frac{r_{j+j'} - r_{j+j'-1}}{2} = \varepsilon_j^{(j')} \,; \\
&\frac{r_{k+1} - r_k}{2} = \varepsilon_k' \,; \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{r_{m+1} - r_m}{2} = \varepsilon_m' ; \ldots ; \frac{r_{m+m'} - r_{m+m'-1}}{2} = \varepsilon_m^{(m')} \,,
\end{aligned} \tag{26}$$

a při tom čísla $\varepsilon_\mu^{(\nu)}$ jsou menší než číslo u určené podle pravidla 1, pak pro určení U_1 ve (20) vezmeme pouze rozdíly po sobě jdoucích r_i mimo uvedené v (26). Kořeny, jejichž absolutní hodnoty r_i se nevyskytují ve vztazích (26), jsou mezi kořeny kvadratických rovnic (24), kde p a q probíhá všechny možné variace 2. třídy s opakováním ve skupinách

$$j, j+1, \ldots, j+j'; \; k, k+1, \ldots, k+k'; \; \ldots; \; m, m+1, \ldots, m+m' \,.$$

Předcházející úvahy nezávisí na tom, zda zvolíme transformaci (4) nebo transformaci $y = x + u$, kde u bylo určeno podle věty 1 nebo 4.

Důsledek 2. Jestliže absolutní hodnoty ϱ_i ve větě 4 splňují kromě nerovností (21) ještě nerovnosti

$$\varrho_j \leqq \varrho_{j+1} \,; \quad \varrho_k \leqq \varrho_{k+1} \,; \ldots ; \varrho_m \leqq \varrho_{m+1} \,, \tag{27}$$

pak pro hodnoty ϱ_i v (27), pro něž nastane rovnost, máme opět jednoznačné přiřazení. Hodnoty ϱ_i, pro něž platí ostrá nerovnost, můžeme jednoznačně přiřadit, jestliže pro určité i platí $u < \frac{\varrho_{i+1} - \varrho_i}{2}$. Jedná se vlastně o použití věty 1 pro přechod od ϱ_i k r_i.

Předcházející výsledky závisí na počtu cifer aproximací absolutních hodnot kořenů. V dalším odhadneme počet cifer, na něž musíme tyto aproximace počítat, abychom kořeny určili s jistou přesností. Zaveďme si tuto definici:

Definice 2. *Říkejme, že dvě aproximace a a b čísel A a B stejných řádů q mají nejméně m cifer stejných, jestliže platí* $|a - b| < 10^{q-m+1}$; *je-li ještě* $|a - b| \geqq \geqq 10^{q-m}$, *říkejme, že aproximace a a b mají právě m cifer stejných.*

Jestliže platí $|A - a| < 10^{q-m+1}$, *říkejme, že aproximace a čísla A má m cifer správných.*

Věta 5. *Nechť* r_i *je absolutní hodnota kořene* ξ_i *rovnice* (1) *a* ϱ_i *absolutní hodnota kořene* $\eta_i = \xi_i - u$ *rovnice* (6). *Nechť řád čísla* r_i *je* p_i *a číslo* $u = 10^p$, *p celé.*

Je-li splněna nerovnost $p \leqq p_i - K$, *K* celé, *pak číslo* ϱ_i *má nejméně K prvních cifer stejných s číslem* r_i.

Je-li splněna nerovnost $p \geqq p_i + K$, *K celé, pak hodnota* ϱ_i *se liší od u maximálně o* 10^{p-K-1}.

Důkaz. Čísla $r_i - u$ a $r_i + u$ mají právě K cifer stejných, takže podle (12) čísla r_i a ϱ_i mají nejméně K cifer stejných a dále $|u - \varrho_i| < r_i < 10^{p_i+1} \leqq \leqq 10^{p-K+1}$. Odtud vidíme, že je-li p pevně zvoleno, pak nejvíce stejných cifer mohou mít právě absolutní hodnoty r_n a ϱ_n a nejméně se bude lišit od u hodnota ϱ_1.

Důsledek. Je-li řád čísla U roven p a řády čísel r_1 a r_n rovny p_1 a p_n, potom při volbě $u = 10^p < U$ je třeba absolutní hodnoty r_i a ϱ_i počítat metodou Graeffeovou na $k + \lambda$ cifer, kde

$$k > K = \operatorname{Max}(p_n - p, p - p_1) ; \tag{28}$$

potom aproximace r_i, a ϱ_i mají přibližně K cifer shodných a čísla ϱ_i se budou dostatečně lišit od hodnoty u; při tom λ je počet nepřesných cifer, které obdržíme při výpočtu absolutních hodnot kořenů metodou Graeffeovou.[2]) Celkový počet přesných cifer absolutních hodnot r_i bude k. Čísla r_i a ϱ_i mají všechny cifry stejné, když $2r_i \cos \varphi_i - u = 0$.

Věta 6. *Vypočteme-li absolutní hodnoty* r_i *kořenů rovnice* (1) *na k správných cifer, kde k je určeno ve vzorci* (28), *pak koeficient lineárního členu rovnic* (9) *má* μ *a absolutní člen* ν *správných cifer; při tom platí*

$$k - K - 3 \leqq \mu \leqq k - K + 3\,, \quad k - 2 \leqq \nu \leqq k + 1\,. \tag{29}$$

Důkaz. Podle předpokladu jsou absolutní chyby absolutních hodnot r_i kořenů rovnice (1) menší než $\Theta \,.\, 10^{p_i-k+1}$, $0{,}1 < \Theta \leqq 1$. Odtud plyne, že r_i^2 má přibližně chybu $2 \,.\, r_i \,.\, \Theta \,.\, 10^{p_i-k+1}$, takže platí

$$2 \,.\, 10^{2p_i-k} < 2 \,.\, r_i \,.\, \Theta \,.\, 10^{p_i-k+1} < 10^{2p_i-k+3}\,.$$

Pro počet ν správných cifer čísla r_i^2, které je absolutním členem i-té rovnice v (9), obdržíme $k - 2 \leqq \nu \leqq k + 1$.

---

[2]) [1], str. 301.

Podobně se dokáže, že má-li r_i a ϱ_i právě K stejných cifer, potom r_i^2 a ϱ_i^2 může mít $K - 2$, $K - 1$, K, $K + 1$ stejných cifer a tedy pro počet μ správných cifer koeficientu lineárního členu platí nerovnosti (29).

Aby bylo možné předcházejících výsledků využít, je třeba znát řády čísel r_1, r_n a U, resp. u v nerovnosti (28).

Pravidlo 2. Máme-li určen řád čísla u podle pravidla 1, při čemž počet cifer q nebyl zatím pevně zvolen, a určíme-li horní a dolní ohraničení absolutních hodnot kořenů, můžeme z těchto údajů určit K.[3]) Poněvadž však pravidla pro určení ohraničení absolutních hodnot kořenů mohou dát dosti hrubé odhady, může být číslo K vypočtené na základě těchto ohraničení příliš velké a výpočet absolutních hodnot kořenů na $k = \mu + K + 3$ cifer, pro předem zvolené μ, zbytečně dlouhý.

Jestliže K takto určené je příliš velké, můžeme je určit přesněji a tím zmenšit takto:

Danou rovnici řešíme Graeffeovou metodou a koeficienty rovnic R^2, R^4, R^8, ... počítáme jen užitím logaritmického pravítka. Tímto zběžným výpočtem určíme absolutní hodnoty kořenů alespoň na tři cifry a tedy alespoň na dvě přesné cifry.[4]) Z těchto absolutních hodnot můžeme určit řády čísel r_1, r_n a U a podle (28) číslo K.

Počet cifer, na něž budeme počítat koeficienty rovnice (6′) a rovnic R^2, R^4, ..., zvolíme větší nebo roven Max $(q, k + \lambda)$.

P o z n á m k a 3. Jsou-li splněny předpoklady věty 4, resp. jejího důsledku 1, zůstávají úvahy o počtu cifer stejné. Číslo U je nahrazeno číslem U_1; podle (28) číslo $p_n - p + \lambda$ se případně zmenší a číslo $p - p_1$ případně zvětší, neboť řád U_1 je větší nebo roven řádu čísla U.

Předcházející výsledky můžeme shrnout do následujícího pravidla:

Pravidlo. Podle pravidla 1 a 2 určíme počet cifer na něž budeme počítat koeficienty rovnic R^2, R^4, R^8, ... pro rovnici (1) a (6′), aby koeficient v rovnicích (9) u lineárního členu byl určen na μ a absolutní člen na ν přesných cifer.

Danou rovnici (1) řešíme metodou Graeffeovou a určíme U podle relace (5), resp. (5′). Podle pravidla 1 určíme nyní vhodný řád čísla u pro rozvoj rovnice (1) podle mocnin proměnné $y = x \pm u$. Jestliže u určené podle pravidla 1 splňuje nerovnost $0 < u < U$, potom věta 1 dává uvedené výsledky, při čemž počty správných cifer koeficientů v rovnicích (9) odhadneme podle věty 6.

Jestliže u určené podle pravidla 1 nesplňuje nerovnost $0 < u < U$, aplikujeme větu 4 resp. její důsledky a počet správných cifer koeficientů kvadratických rovnic určíme podle věty 6.

---

[3]) [4], díl II. § 6; [5], str. 338 n.
[4]) [1], str. 301.

Tab. 1.

R^{2}	1	-153^{1}	135^{2}	-653^{2}	206^{3}	-326^{3}	365^{3}	-223^{3}	915^{2}
R^{4}	1	-360^{1}	234^{3}	-361^{4}	905^{5}	-176^{6}	256^{6}	-171^{6}	837^{5}
R^{8}	1	-338^{3}	469^{6}	-289^{9}	704^{11}	-141^{12}	206^{12}	-136^{12}	701^{11}
R^{16}	1	204^{6}	381^{12}	136^{18}	488^{23}	-904^{23}	139^{24}	-103^{24}	491^{23}
R^{32}	1	-346^{12}	995^{24}	-187^{36}	237^{47}	-540^{47}	548^{47}	-302^{47}	241^{47}
R^{64}	1	-793^{24}	983^{49}	-122^{72}	562^{94}	-234^{94}	885^{94}	-173^{95}	581^{94}
R^{128}	1	$[-134^{50}]$	964^{99}	$[382^{134}]$	316^{189}	$[-940^{189}]$	626^{189}	$[197^{190}]$	338^{189}

Tab. 2.

R^{2}	1	$152\,600^{1}$	$134\,6825^{2}$	$-653\,220^{2}$	$206\,030^{3}$	$-325\,7055^{3}$	$365\,258^{3}$	$-223\,124^{3}$	$915\,0625^{2}$
R^{4}	1	$-364\,974^{1}$	$232\,371^{3}$	$-361\,762^{4}$	$907\,299^{5}$	$-177\,392^{6}$	$257\,7405^{6}$	$-170\,6246^{6}$	$837\,339^{5}$
R^{8}	1	$-331\,536^{3}$	$457\,355^{6}$	$-278\,355^{9}$	$706\,700^{11}$	$-141\,060^{12}$	$210\,896^{12}$	$140\,505^{12}$	$701\,137^{11}$
R^{16}	1	$184\,451^{6}$	$387\,382^{12}$	$129\,324^{18}$	$491\,591^{23}$	$-983\,196^{23}$	$147\,477^{24}$	$-983\,174^{23}$	$491\,593^{23}$
R^{32}	1	$-434\,542^{12}$	$112\,189^{25}$	$-213\,620^{36}$	$241\,664^{47}$	$-483\,290^{47}$	$724\,967^{47}$	$-483\,342^{47}$	$241\,664^{47}$
R^{64}	1	$-355\,513^{24}$	$107\,782^{50}$	$-859\,058^{71}$	$584\,015^{94}$	$-116\,828^{95}$	$175\,192^{95}$	$-116\,735^{95}$	$584\,015^{94}$
R^{128}	1	$-202\,925^{50}$	$116\,110^{100}$	$-118\,513^{145}$	$341\,074^{189}$	$681\,417^{189}$	$102\,379^{190}$	$683\,589^{189}$	$341\,074^{189}$
R^{256}	1	$[179\,566^{100}]$	$134\,8105^{200}$	$[612\,491^{289}]$	$116\,331^{379}$	$[-234\,047^{379}]$	$349\,872^{379}$	$[-231\,082^{379}]$	$116\,331^{379}$

Tab. 3.

R^{2}	1	$-151\,400^{1}$	$134\,772^{2}$	$-658\,005^{2}$	$205\,849^{3}$	$-324\,324^{3}$	$368\,646^{3}$	$-233\,3205^{3}$	$930\,975^{2}$
R^{4}	1	$-403\,244^{1}$	$235\,608^{3}$	$-310\,506^{4}$	$894\,121^{5}$	$-183\,889^{6}$	$228\,851^{6}$	$-142\,016^{6}$	$866\,714^{5}$
R^{8}	1	$-308\,610^{3}$	$483\,516^{6}$	$-310\,537^{6}$	$695\,926^{11}$	$-626\,784^{11}$	$156\,414^{12}$	$-195\,011^{12}$	$751\,193^{11}$
R^{16}	1	$-146\,307^{5}$	$560\,366^{12}$	$291\,736^{13}$	$480\,435^{23}$	$-177\,209^{24}$	$104\,749^{24}$	$145\,299^{24}$	$564\,291^{23}$
R^{32}	1	$-111\,859^{13}$	$332\,155^{25}$	$312\,660^{36}$	$230\,828^{47}$	$213\,381^{48}$	$678\,910^{48}$	$929\,002^{47}$	$318\,424^{47}$
R^{64}	1	$586\,934^{25}$	$117\,368^{51}$	$-555\,851^{72}$	$532\,816^{94}$	$141\,892^{96}$	$422\,743^{97}$	$-346\,058^{96}$	$101\,394^{95}$
R^{128}	1	$[116\,010^{51}]$	$137\,818^{102}$	$[-941\,741^{145}]$	$283\,893^{189}$	$-246\,307^{192}$	$179\,695^{195}$	$340\,965^{192}$	$102\,807^{190}$
R^{256}	—	—	—	—	$805\,952^{378}$	$[-413\,612^{384}]$	$322\,905^{390}$	$[-357\,852^{385}]$	$105\,693^{380}$

Uvedený postup můžeme, je-li to výhodnější, aplikovat případně na rovnici reciprokou k rovnici (1).

Příklad 2. Dána rovnice

$$x^8 + 0{,}2x^7 + 7{,}65x^6 - 0{,}9x^5 + 37{,}9x^4 - 0{,}9x^3 + 36{,}9x^2 - 1{,}1x + 30{,}25 = 0\,,$$

která má vesměs komplexní kořeny. Určeme její kořeny tak, aby koeficient u lineárního členu kvadratických rovnic, jimž tyto kořeny hoví, měl alespoň dvě cifry přesné.

Výpočty prováděnými pouze logaritmickým pravítkem a použitím tabulky čtverců čísel 1—1000 obdržíme pro koeficienty rovnice $R^2, R^4, \ldots$, tabulku 1.

Během výpočtu se rovnice R^{16} rozštěpila. Při tom koeficienty druhé části (488^{23}, -904^{23}, 139^{24}, -103^{24}, 491^{23}) mají od středního na obě strany přibližně stejné absolutní hodnoty a kromě toho koeficient druhý a čtvrtý je přibližně roven dvojnásobku prvního a koeficient třetí trojnásobku prvního. Avšak rovnice $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ se při výpočtu Graeffeovou metodou nemění a její oba páry kořenů mají absolutní hodnoty rovné 1. Volíme-li $r_1 = r_2$, obdržíme z tabulky 1:

$$r_1 = r_2 = \sqrt[512]{\frac{338\,.\,10^{189}}{316\,.\,10^{189}}} = 1{,}000\ldots,\quad r_3 = \sqrt[256]{\frac{316\,.\,10^{189}}{964\,.\,10^{99}}} = 2{,}458\ldots,$$

$$r_4 = \sqrt[256]{964\,.\,10^{99}} = 2{,}236\ldots,$$

takže $U \approx 0{,}111$.

Podle pravidla 1 bylo by nejlépe volit $u = 1$; ale abychom určili jednoznačně kvadratické rovnice pro všechny kořeny, budeme volit $u < 0{,}111$ a tedy řádu $p = -1$. Z relace (28) plyne $K = 1$ ($p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$). Podle pravidla 2 za předpokladu $\mu \geqq 2$ obdržíme $k \geqq 6$, t. zn., volíme-li $\lambda = 1$, je třeba koeficienty rovnic $R^2, R^4, \ldots$ počítat na 7 cifer. Výpočet však stačí provést na 6 cifer, neboť v tomto případě, při volbě $\lambda = 1$, čísla r_i budou mít vesměs chyby $\Theta\,.\,10^{-4}$ $(0{,}1 < \Theta < 1)$ a počet správných cifer bude 5. Chyby čísel r_i^2 jsou po řadě menší než $2\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, $2\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, $4{,}5\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, $4{,}92\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, čili vesměs menší než $0{,}5\,.\,10^{-3}$. Zaokrouhlíme-li čísla r_i^2 na tři desetinná místa, budou mít jistě 4 cifry správné. Dá se tedy v případě, že počítáme na 6 cifer, odhadnout počet μ správných cifer tak, že je $\mu \approx 3$. V tabulce 2 jsou koeficienty rovnic $R^2, R^4, \ldots$ uvedeny.

Rovnice R^{32} se rozpadla ve dvě rovnice 4. stupně; koeficienty druhé z těchto rovnic mají tytéž vlastnosti jako koeficienty druhé rozštěpené rovnice R^{16} v tabulce 1, jak plyne z toho, že dvojnásobek resp. trojnásobek prvního koeficientu $241\,664^{47}$ je $483\,328^{47}$, resp. $724\,992^{47}$, takže, položíme-li $r_1 = r_2$, obdržíme

$$r_1^2 = r_2^2 = 1{,}00000\,,\quad r_3^2 = 4{,}99999\,,\quad r_4^2 = 6{,}05002\,.$$