Poznámka 2,1. Budiž g neklesající a spojitá. Potom z věty 2,2 a 2,1 plyne, že existence $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ je ekvivalentní s podmínkou, že F je absolutně spojitá a $F' \in L^p(A, B)$.

Z věty 2,3 a 2,1 plyne, že za předpokladů věty 2,3 existuje $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$.

Věta 2,4. *Nechť existují spojité derivace f' a g' v $\langle a, b \rangle$ (v krajních bodech stačí derivace jednostranné) a nechť $g'(x) \neq 0$ všude v $\langle a, b \rangle$. Potom existuje $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ a platí:*

$$(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g) = \int_a^b \frac{|f'(x)|^p}{|g'(x)|^{p-1}} \, dx ,$$

kde integrál vpravo je Riemannův.

Důkaz. Existence $(p) - \overset{b}{\underset{a}{H}}(f, g)$ plyne na př. z věty 2,3. Označíme-li γ inversní funkci k funkci g, je $F(y) = f(\gamma(y))$ pro $y \in \langle A, B \rangle$ a podle věty 2,1

$$\overset{b}{\underset{a}{H}} = \int_A^B |F'(y)|^p \, dy = \int_A^B |f'(\gamma(y))|^p \,.\, |\gamma'(y)|^p \, dy = \int_a^b |f'(x)|^p \,.\, \frac{dx}{|g'(x)|^{p-1}}$$

(substituce $\gamma(y) = x$, t. j. $y = g(x)$).

Резюме

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ХЕЛЛИНГЕРА

ИЛЬЯ ЧЕРНЫ (Ilja Černý), Прага.

(Поступило в редакцию 6/XII 1955 г.)

Предположим, что $p > 1$ и что f и g — две функции, определенные в $\langle a, b \rangle$, такие, что справедлива импликация: $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Тогда каждому $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ можно поставить в соответствие сумму

$$H(D) = H_p(f, g; D) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p}{|g(x_k) - g(x_{k-1})|^{p-1}} ,$$

причем каждое слагаемое в $H(D)$, знаменатель (следовательно, и читатель) которого равен нулю, следует заменить нулем. Далее положим $\nu(D) = \max_{k=1,\ldots,n} (x_k - x_{k-1})$. Если существует конечный предел $\lim_{\nu(D) \to 0} H(D)$, то обозначим его через

$$\int_a^b \frac{|df(x)|^p}{|dg(x)|^{p-1}}$$