ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

# ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY



4

82

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 82 • Č. 4 • STR. 385—506 • PRAHA 20. XI. 1957

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

*(Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky“)*

SVAZEK 82 (1957)

*Vydává:*

Matematický ústav Československé akademie věd



*Redakce:*

Matematický ústav Československé akademie věd
Praha II, Žitná 25

## OBSAH

Články:



Úlohy a problémy:



Referáty:



Zprávy:



## СОДЕРЖАНИЕ (РЕЗЮМЕ)

ANTONÍN ZÁPOTOCKÝ

* 19. XII. 1884 † 13. XI. 1957

Politické byro
Ústředního výboru Komunistické strany Československa
Praha

Praha, 13. listopadu 1957

Vážení soudruzi,

dovolte, abychom Vám jménem Československé akademie věd a jejích vědeckých pracovníků vyslovili hlubokou soustrast k těžké ztrátě, která postihla celou naši stranu a všechen náš lid odchodem člena politického byra ÚV KSČ, presidenta republiky soudruha Antonína Zápotockého.

Všichni si v této chvíli nejhlubšího smutku připomínáme veliké a moudré dílo soudruha Zápotockého, který více než půl století kráčel v prvním sledu revolučního předvoje naší dělnické třídy a byl vždy jejím ušlechtilým a milovaným představitelem v očích našich národů.

Ujišťujeme Vás, drazí soudruzi, že budeme vždy věrně sledovat myšlenky soudruha Zápotockého, s kterými se k nám obrátil při zakládání Československé akademie věd, a že je budeme střežit jako odkaz drahý všem československým vědcům, kteří jsou připraveni ze všech svých sil pomáhat při dovršení výstavby socialismu v naší vlasti a při rozvíjení naší národní kultury a vědy.

Jsme v této bolestné hodině ještě úžeji spjati s naší milovanou Komunistickou stranou Československa, jsme pevně po Vašem boku.

Soudruh Antonín Zápotocký zůstane v našich srdcích a myslích jako veliký příklad činorodé lásky k lidu a naše úcta a vděčnost jej uchová v živé a věčné paměti.

Ministr akademik Zdeněk Nejedlý v. r.
*president ČSAV*

Akademik F. Šorm
*hlavní vědecký sekretář ČSAV*

PŘEDSEDNICTVO VLÁDY REPUBLIKY ČESKOSLOVENSKÉ

v Praze

Praha, 13. listopadu 1957

Vážení soudruzi,

v těžké a přebolestné chvíli, kdy naše vlast byla postižena krutou ztrátou — odchodem presidenta republiky soudruha Antonína Zápotockého, připojuje se také Československá akademie věd k hlubokému smutku všeho našeho lidu. Dobře víme, co znamenal veliký zesnulý pro výstavbu socialismu u nás a jak živé porozumění měl vždycky také pro rozvoj kultury a zejména vědy.

Věrný syn dělnické třídy a jeden z předních zakladatelů Komunistické strany Československa přispěl jedinečně svým státnickým rozhledem, osobní rozvahou a moudrostí k rozkvětu celého našeho života, zaměřeného k práci a míru. Československá akademie věd nikdy nezapomene na jeho příklad. Pevně spjata s Komunistickou stranou Československa, s vládou Národní fronty a s veškerým naším lidem bude i dál plnit jeho nesmrtelný odkaz.

Čest jeho práci a památce!

Ministr akademik ZDENĚK NEJEDLÝ v. r.
*president ČSAV*

Akademik F. ŠORM
*hlavní vědecký sekretář ČSAV*

Soudružka

MARIE ZÁPOTOCKÁ

Praha — Hrad

Praha, 13. listopadu 1957

Vážená soudružko,

dovolte, abychom Vám projevili jménem Československé akademie věd nejhlubší soustrast k těžké ztrátě, která postihla Vás i naši akademickou obec odchodem Vašeho váženého manžela, presidenta republiky soudruha Antonína Zápotockého.

Vážili jsme si ho a obdivovali jsme se jeho moudrému dílu státníka a předního budovatele naší lidově demokratické republiky. Jeho ušlechtilé myšlenky o úloze vědy při výstavbě socialismu jsou cenným odkazem, který chceme vždy věrně plnit. Jméno soudruha Zápotockého zůstane navždy spjato s rozvojem naší kultury a s rozkvětem celé československé vědy.

Zachováme mu vždy trvalou a věčnou paměť!

Ministr akademik ZDENĚK NEJEDLÝ v. r.
*president ČSAV*

Akademik F. ŠORM
*hlavní vědecký sekretář ČSAV*

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
*Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha*
SVAZEK 82 * PRAHA, 20. XI. 1957 * ČÍSLO 4

# ROVINNÉ KONFIGURACE $(12_4, 16_3)$, KTERÉ OBSAHUJÍ $D$-BODY

VÁCLAV METELKA, Liberec.

(Došlo dne 18. dubna 1956.) DT:513.48

V této práci jsou uvedeny všechny rovinné realisovatelné konfigurace $(12_4, 16_3)$, které obsahují aspoň jeden bod typu $D$, a s jemnějším tříděním je zároveň provedena jejich klasifikace. Všechny tyto nové konfigurace (v počtu 57) jsou původní a (kromě dvou z nich, o kterých jsem informoval čtenáře již dříve [15]) dosud nebyly uveřejněny.

## Úvod

V článku mého bratra [13] je naznačen program, který jsme stanovili pro sestavení tabulky všech možných konfigurací $(12_4, 16_3)$, jež se dají realisovat body a přímkami v projektivní rovině nad tělesem komplexních čísel. Touto prací je splněn druhý bod programu, totiž sestavení tabulky všech realisovatelných konfigurací $(12_4, 16_3)$, které obsahují $D$-body.

Konfigurace $(12_4, 16_3)$ jsou — jak známo — skupiny dvanácti bodů a šestnácti přímek v rovině, jejichž vzájemný vztah je ten, že každým z bodů procházejí 4 přímky a na každé přímce leží 3 body.

Leží-li dva body na konfigurační přímce, říkáme — jak je zvykem — že tyto dva body jsou s p o j e n y. V opačném případě říkáme, že jsou o d d ě l e n y.

Body konfigurace označujeme *1, 2, 3, …, 12.* Okolnost, že dva body (třeba *10, 11*) jsou spojeny, značme stručně *10—11.* Dle definice konfigurace musí na každé konfigurační přímce ležet právě tři body. Jsou-li to ku příkladu body *10, 11, 12,* značme tuto konfigurační přímku stručně *10—11—12.*

Každý konfigurační bod je spojen s dalšími osmi body, od tří bodů je tedy oddělen. Je-li ku příkladu bod *1* oddělen od bodů *2, 3, 4,* zapíšeme tuto okolnost stručně takto: *1 : 2, 1 : 3, 1 : 4* (nebo prostě *1 : 2, 3, 4*), což ovšem znamená také obráceně, že body *2, 3, 4* jsou odděleny od bodu *1.*

Nechť *1 : 2, 3, 4.* Dle toho, jaký je vzájemný vztah bodů *2, 3, 4,* můžeme bod *1* zařadit do jednoho z těchto pěti typů:

1. Bod *1* je typu A (stručně $A$-bod), jestliže body *2, 3, 4* jsou navzájem odděleny, t. j. jestliže platí *2 : 3, 2 : 4, 3 : 4*. V tomto případě ovšem také body *2, 3, 4* jsou $A$-body. Platí tedy věta:

$A$-body *vystupují v konfiguracích ve čtveřicích.*

2. Bod *1* je typu B (stručně $B$-bod), jestliže body *2, 3, 4* jsou navzájem spojeny, neleží však na konfigurační přímce, t. j. jestliže platí *2—3, 2—4, 3—4*, ne však *2—3—4*.

3. Bod *1* je typu C (stručně $C$-bod), jestliže jeden z bodů *2, 3, 4* je spojen s ostatními dvěma, tyto dva však jsou odděleny (t. j. jestliže platí ku příkladu *2—3, 2—4, 3 : 4*).

4. Bod *1* je typu D (stručně $D$-bod), jestliže jen dva z bodů *2, 3, 4* jsou spojeny (t. j. jestliže platí ku příkladu *2—3, 2 : 4, 3 : 4*. V tomto případě ovšem také *4* jest $D$-bod). Platí tedy věta:

$D$-body *vystupují v konfiguracích ve dvojicích.*

5. Bod *1* je typu E (stručně $E$-bod), jestliže body *2, 3, 4* leží na konfigurační přímce, t. j. jestliže platí *2—3—4*.

Podle typu bodů lze třídit konfigurace tím, že udáme, kolik bodů kterého typu konfigurace obsahuje; tak ku příkladu do třídy $B_4C_5D_2E_1$ patří všechny konfigurace, které obsahují čtyři $B$-body, pět $C$-bodů, dva $D$-body, jeden $E$-bod a žádný $A$-bod. Pro nejbližší úkoly toto třídění zatím postačí. V pozdějším průběhu bude třeba provést třídění jemnější.

## I. Incidenční schemata

Naším úkolem v této kapitole jest najít všechna navzájem různá incidenční schemata konfigurací ($12_4$, $16_3$), která obsahují aspoň jeden bod typu $D$. Incidenční schema dané konfigurace, viz [14], je schema udávající, jakým způsobem jsou body této konfigurace mezi sebou spojovány. Abychom se vyhnuli otázkám, zda mohou dvě různá incidenční schemata představovat touž konfiguraci, nebo zda dvě různé konfigurace mohou mít totéž incidenční schema, použijeme definice:

**Definice.** Dvě incidenční schemata jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, jestliže existuje permutace čísel 1, 2, 3, ..., 12, kterou jedno schema přechází v druhé. Dvě konfigurace pak jsou ekvivalentní právě tehdy, jestliže jejich incidenční schemata jsou ekvivalentní.

Nyní již můžeme přistoupit ke konstrukci těchto schemat. Vycházíme z předpokladu existence aspoň jednoho $D$-bodu.

Nechť *9* je $D$-bodem a nechť je oddělen od bodů *10, 11, 12*, při čemž body *10, 11* jsou spojeny. Pak ovšem (dle definice $D$-bodu) musí být *12 : 9, 10, 11* a je tedy *12* také *D*-bod. Třetí bod na spojnici *10—11* (kterým nemůže být *9* ani *12*) označme *1*. Tyto výsledky stručně zapíšeme:

$$9 : 10, 11, 12\ ; \quad 12 : 9, 10, 11\ ; \quad 1—10—11\ . \tag{1}$$

Z těchto výsledků především plyne, že bod *10* musí být oddělen ještě od jednoho bodu (různého od bodů *1, 11, 9, 12*) a označme ho tedy *2*. Je tudíž

$$10 : 2\ . \tag{2}$$

Dokažme nyní, že za těchto předpokladů musí platit:

$$11—2\ , \tag{3}$$

neboť:

Ze 4 přímek incidentních s bodem *9* prochází jedna bodem *2* ;
ze 4 přímek incidentních s bodem *12* prochází jedna bodem *2* ;
ze 4 přímek incidentních s bodem *10* neprochází žádná bodem *2* ;

(neboť bod *10* jest od bodu *2* oddělen), tedy ze 4 přímek incidentních s bodem *11* prochází jedna bodem *2*, což plyne takto:

Z uvedených 16 konfiguračních přímek je 15 navzájem různých (přímku *1—10—11* jsme počítali dvakrát) a z nich tedy musí (aspoň) tři být incidentní s bodem *2*. Tím je proveden důkaz tvrzení (3).

Prozatím víme, že bod *11* je oddělen od bodů *9, 12* a musí být tudíž oddělen ještě od jednoho bodu (různého od bodů *1, 2, 10, 9, 12*). Nazveme tento bod *3*. Je tedy:

$$11 : 3\ . \tag{4}$$

Z nahoře uvedených patnácti různých konfiguračních přímek procházejí právě tři bodem *2* (totiž *9—2, 12—2, 11—2*) a musí jím tedy také procházet přímka šestnáctá, kterou si zatím označme *p*. Bodem *3* procházejí (z nahoře uvedených patnácti přímek — různých od *p*) jen tři, totiž *3—9, 3—10* a *3—12* (neboť *11 : 3*), z čehož plyne, že bod *3* je incidentní také s přímkou *p*. Právě tak bodem *1* procházejí jen tři z konfiguračních přímek různých od *p* (totiž *1—9, 1—12, 1—10—11*) a musí být také bod *1* incidentní s přímkou *p*. Jest tudíž:

$$p \equiv 1—2—3\ . \tag{5}$$

Čtyři přímky procházejí bodem *9*. Jsou to přímky *9—1—a, 9—2—b, 9—3—c, 9—d—e*. O číslech *a, b, c, d, e* ovšem platí, že jsou navzájem různá a také různá od čísel 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12. Je tedy možno je nahradit dosud neobsazenými číslicemi 4, 5, 6, 7, 8, což učiníme a všechny dosavadní výsledky zapíšeme takto:

$$\begin{array}{c} 9 \\ \hline 1\ 2\ 3\ 7 \\ 4\ 5\ 6\ 8 \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 2\ 10 \\ 3\ 11 \end{array}; \quad \begin{array}{l} 10 : 2,\ 9, 12\ , \\ 11 : 3,\ 9, 12\ , \\ 12 : 9, 10, 11\ . \end{array} \tag{I}$$

Tento zápis čteme tak, že bodem *9* procházejí přímky *9—1—4*, *9—2—5*, *9—3—6*, *9—7—8*. Podobně bodem *1* procházejí přímky *1—2—3*, *1—10—11*. Čtenář si jistě uvědomil, že v tomto zápisu jest obsažen i zápis *9* : *10*, *11*, *12* a že celé částečné schema (I) se nemění permutacemi $T_1$, $T_2$, kde

$$(2\ 3)\ (5\ 6)\ (10\ 11)\,, \qquad (T_1)$$

$$(7\ 8)\,. \qquad (T_2)$$

V částečném schematu (I) máme již pevně určeno 6 konfiguračních přímek, z nichž žádná není incidentní s bodem *12*, jen jedna prochází bodem *10* a jen jedna bodem *11* (totiž *1—10—11*). Nalezneme-li tedy ještě čtyři přímky bodem *12*, tři přímky bodem *10* a tři přímky bodem *11*, budeme mít všech šestnáct konfiguračních přímek. Pokusme se tedy nejprve nalézt přímky bodem *12*. Těmito přímkami pak schema (I) rozšíříme.

Přímky bodem *12* můžeme zřejmě zapsat takto: $\dfrac{12}{\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & f\\ h & i & j & g\end{smallmatrix}}$.

Snadno totiž zjistíme, že žádné dvě číslice 1, 2, 3 nemohou v tomto schematu stát v jednom sloupci vzhledem k tomu, že již dle schematu (I) existuje přímka *1—2—3*. Vidíme především, že můžeme položit za $h$ číslice *5*, *6*, *7*, *8* (a za $h$ již nemáme jiné volby). Permutací $T_1$ — kterou se schema (I) nemění — přechází však přímka *12—1—5* na přímku *12—1—6* (a naopak) a můžeme tedy případ $h = 5$ z našich dalších úvah vyloučit[1]).

Právě tak permutací $T_2$ přechází přímka *12—1—7* na přímku *12—1—8* a můžeme vyloučit i případ $h = 7$. Pro volbu čísla $h$ zbývají tudíž již jen dvě možnosti, které označím:

$$A_{ij} \equiv \frac{12}{\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & f\\ 6 & i & j & g\end{smallmatrix}}\,, \quad B_{ij} \equiv \frac{12}{\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & f\\ 8 & i & j & g\end{smallmatrix}}\,. \qquad \text{(II)}$$

Zabývejme se nejprve možností $A_{ij}$. Za $i$ můžeme zřejmě dosadit jen *4*, *7*, *8*. Protože ale permutací $T_2$ přechází případ $i = 7$ na případ $i = 8$, můžeme případ $i = 8$ vyloučit. Zbývají nám již jen dvě možnosti volby čísla $i$, totiž $A_{4j}$ a $A_{7j}$.

P ř í p a d $A_{4j}$: Na první pohled je patrné, že $j$ může nabývat jen hodnot *5*, *7*, *8*. Kdyby však bylo $j = 5$, pak za $g$, $f$ bychom ve schematu $A_{45}$ mohli dosadit jen hodnoty *7*, *8*. V tom je však spor, neboť na přímce *7—8—12* by — dle schematu (I) — ležel také bod *9* a je tedy $j \neq 5$. Zbývající dvě možnosti pro $j$ (totiž $j = 7$, *8*) se redukují permutací $T_2$ na jedinou. Zvolme třeba $j = 7$ a máme výsledek:

*V případě $A_{4j}$ nastává jediná možnost, totiž $A_{47}$.*

[1]) Takovéto vylučování budeme provádět v této kapitole častěji a upozorňuji při tom, že se tak děje zcela ve smyslu definice ekvivalentních schemat, uvedené na začátku této kapitoly.

**Případ** $A_{7j}$: Zde lze dosadit za $j$ zřejmě jen *5, 4, 8*. Čtenář se již sám přesvědčí, že žádná z těchto hodnot nevede ke sporu. Tedy:

*V případě* $A_{7j}$ *jsou možnosti* $A_{74}$, $A_{75}$, $A_{78}$.

Tím je případ $A_{ij}$ (ve výsledku (II)) zcela rozřešen.

Zcela obdobně (nyní však již jen stručně) provedeme řešení případu $B_{ij}$. Ve schematu $B_{ij}$ možno za $i$ dosadit zřejmě jen hodnoty *4, 6, 7* a máme tedy celkem možnosti $B_{4j}$, $B_{6j}$, $B_{7j}$. Po kratším výpočtu zjistíme, že:

*V případě* $B_{4j}$ *jsou možnosti* $B_{45}$, $B_{47}$. *V případě* $B_{6j}$ *jsou možnosti* $B_{64}$, $B_{65}$, $B_{67}$ *a v případě* $B_{7j}$ *jsou možnosti* $B_{74}$, $B_{75}$.

Shrneme-li konečně všechny tyto výsledky, máme pro přímky bodem *12* celkem tyto možnosti (viz označení (II)):

$$A_{47},\ A_{74},\ A_{75},\ A_{78},\ B_{45},\ B_{47},\ B_{64},\ B_{65},\ B_{67},\ B_{74},\ B_{75}\,. \tag{III}$$

Kdybychom schema (I) doplnili těmito případy, dostali bychom tak rozšířená schemata (o přímky bodem *12*). Existují však permutace čísel 1, 2, 3, ... ..., 12, převádějící některá z těchto (rozšířených) schemat navzájem na sebe. Najděme takové permutace.

Uvažme především, že schema (I) rozšířené o případ $A_{47}$ se nemění permutací $T_3$, právě tak jako schema (I) rozšířené o případ $A_{74}$ se nemění permutací $T_4$, kde

$$(2\ 3)\ (4\ 6)\ (5\ 7)\ (9\ 12)\ (10\ 11)\,, \tag{$T_3$}$$

$$(4\ 6)\ (5\ 7)\ (9\ 12)\,. \tag{$T_4$}$$

Toho za chvíli s výhodou použijeme. Napišme si ještě další permutace:

$$(2\ 3)\ (10\ 11)\ (9\ 12)\ (4\ 6\ 7\ 8)\,, \tag{$T_5$}$$

$$(2\ 3)\ (10\ 11)\ (9\ 12)\ (4\ 6\ 7\ 5\ 8)\,, \tag{$T_6$}$$

$$(9\ 12)\ (4\ 6\ 5\ 7\ 8)\,, \tag{$T_7$}$$

$$(2\ 3)\ (10\ 11)\ (9\ 12)\ (4\ 8)\ (5\ 7)\,. \tag{$T_8$}$$

Snadno zjistíme, že schema (I) rozšířené o případ $B_{67}$ se nemění permutací $T_8$.

Pro stručnější vyjadřování budu nadále místo „schema (I) rozšířené o případ $A_{ij}$ přechází permutací $T_k$ na schema (I) rozšířené o případ $A_{mn}$" psát stručně: „$A_{ij} \equiv A_{mn}(T_k)$". Tak snadno zjistíme, že platí:

$$B_{75} \equiv B_{67}(T_1)\,;\quad B_{74} \equiv B_{47}(T_1)\,;\quad B_{45} \equiv A_{75}(T_5)\,;$$
$$B_{47} \equiv A_{78}(T_6)\,;\quad B_{64} \equiv A_{75}(T_7)\,.$$

Můžeme tudíž ve výsledku (III) vyloučit z dalších úvah schemata $B_{75}$, $B_{74}$, $B_{45}$, $B_{47}$, $B_{64}$. Zapišme pro lepší přehled tento výsledek:

$(I_1)$: *Rozšíříme-li schema* (I) *o přímky bodem 12, můžeme to učinit celkem těmito šesti způsoby:*

$$\frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,5\\6\,4\,7\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,5\\6\,7\,4\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\6\,7\,5\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\6\,7\,8\,5\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\8\,6\,5\,7\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\8\,6\,7\,5\end{matrix}}.$$

1. 2. 3. 4. 5. 6.

Pokusme se nyní zcela obdobně doplnit schema (I) o přímky bodem *10*, t. j. o přímky

$$\frac{10}{\begin{matrix}3\;n\;q\\m\;p\;r\end{matrix}}$$ (čtvrtá přímka, totiž *1—10—11*, je již zapsána ve schematu (I)).

Na první pohled je vidět, že za $m$ můžeme dosadit jen číslice *4, 5, 7, 8* (neboť ve schematu (I) jsou již přímky *1—2—3, 3—6—9*, dále jest *3 : 11* a kromě toho ze schematu $(I_1)$ již nemůže být $m = 12$). Zcela obdobně zjistíme, že $n$, $p$, $q$, $r$ mohou nabývat hodnot *4, 5, 6, 7, 8*. Nebudu zde podrobně provádět výpočet, nebot čtenář si již snadno dokáže větu:

$(I_2)$: *Rozšíříme-li schema* (I) *o zbývající tři přímky bodem 10, můžeme tak učinit celkem těmito deseti způsoby:*

$$\frac{10}{\begin{matrix}356\\478\end{matrix}},\ \frac{10}{\begin{matrix}356\\487\end{matrix}},\ \frac{10}{\begin{matrix}346\\578\end{matrix}},\ \frac{10}{\begin{matrix}346\\587\end{matrix}};\ \frac{10}{\begin{matrix}346\\758\end{matrix}},\ \frac{10}{\begin{matrix}345\\768\end{matrix}},\ \frac{10}{\begin{matrix}345\\786\end{matrix}},\ \frac{10}{\begin{matrix}346\\857\end{matrix}},\ \frac{10}{\begin{matrix}345\\867\end{matrix}},\ \frac{10}{\begin{matrix}345\\876\end{matrix}}.$$

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Zcela obdobně doplníme schema (I) přímkami bodem *11*. Následující větu rovněž uvádím bez důkazu:

$(I_3)$: *Rozšíříme-li schema* (I) *o zbývající tři přímky bodem 11, můžeme tak učinit celkem těmito deseti způsoby:*

$$\frac{11}{\begin{matrix}256\\478\end{matrix}},\ \frac{11}{\begin{matrix}256\\487\end{matrix}},\ \frac{11}{\begin{matrix}245\\678\end{matrix}},\ \frac{11}{\begin{matrix}245\\687\end{matrix}},\ \frac{11}{\begin{matrix}246\\758\end{matrix}},\ \frac{11}{\begin{matrix}245\\768\end{matrix}}\ \frac{11}{\begin{matrix}245\\786\end{matrix}},\ \frac{11}{\begin{matrix}246\\857\end{matrix}},\ \frac{11}{\begin{matrix}245\\867\end{matrix}},\ \frac{11}{\begin{matrix}245\\876\end{matrix}}.$$

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Pro objasnění dalšího postupu zavedu pojem **přípustného konfiguračního schematu.**

Očíslujme nějak body libovolné konfigurace $(12_4, 16_3)$ čísly $1, 2, 3, \ldots, 12$. Tato čísla pak můžeme psát v šestnácti neuspořádaných trojicích $i—j—k$ ($i$, $j$, $k$ jsou navzájem různá čísla), když $i—j—k$ znamená, že body odpovídající číslům $i$, $j$, $k$ leží v konfigurační přímce. Množina těchto šestnácti trojic má tyto tři vlastnosti:

(1) všechny trojice jsou navzájem různé,

(2) každé číslo z 1, 2, ..., 12 je právě ve čtyřech trojicích a

(3) jsou-li $i, j, k, l$ navzájem různá čísla z 1, 2, ..., 12, pak neplatí současně $i—j—k$, $i—j—l$.

**Definice.** Množina šestnácti neuspořádaných trojic z čísel 1, 2, ..., 12 splňující podmínky (1), (2), (3) se nazývá přípustné konfigurační schema.

Permutací čísel 1, 2, ..., 12 přejde zřejmě přípustné konfigurační schema opět v přípustné konfigurační schema. Dvě přípustná konfigurační schemata, z nichž jedno přejde v druhé permutací 1, 2, ..., 12, nazveme ekvivalentní.

Hlavní otázka, kterou se budeme zabývat, je, která přípustná konfigurační schemata jsou realisovatelná v komplexní (reálné, případně racionální) projektivní rovině, t. j. pro která přípustná konfigurační schemata existuje v takové rovině konfigurace $(12_4, 16_3)$, k níž (při vhodném očíslování bodů) uvedené schema patří. Je-li přípustné konfigurační schema realisovatelné, pak jsou zřejmě zároveň realisovatelná i všechna přípustná schemata s ním ekvivalentní. Tohoto faktu budeme častěji používat.

Rozšíříme-li schema (I) jednou čtveřicí přímek bodem *12* ze zápisu $(I_1)$, jednou trojicí přímek bodem *10* ze zápisu $(I_2)$ a jednou trojicí přímek bodem *11* ze zápisu $(I_3)$, a to tak, aby byla splněna podmínka (3) (přípustné konfigurační schema), dostaneme zřejmě přípustné konfigurační schema. Naším úkolem tedy jest najít všechna realisovatelná, navzájem neekvivalentní přípustná konfigurační schemata tohoto tvaru.

Pro lepší přehled a stručnější vyjadřování budu nadále označovat každé schema uspořádanou trojicí čísel $ijk$, kde první číslo udává, který ze všech šesti přípustných způsobů jsme volili v záznamu $(I_1)$; druhé a třetí číslo uspořádané trojice $ijk$ pak udává, který z deseti přípustných způsobů jsme volili v zápise $(I_2)$ a $(I_3)$. Tak ku příkladu 107 je stručný zápis schematu:

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 5\\ 6\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 6\\ 8\ 5\ 7\end{matrix}}.$$

Při vyhledávání všech přípustných schemat zvolme tento přirozený postup: Vyhledejme nejprve přípustná schemata $1jk$, pak schemata $2jk, \ldots$, až konečně schemata $6jk$.

Schemata $1jk$: Za $j$ zřejmě můžeme dosadit jen 0, 2, 3, 7, 8, 9. Jsou tedy možnosti $10k$, $12k$, $13k$, $17k$, $18k$, $19k$.

V případě $10k$ dostaneme schemata 106, 107, 109, v případě $12k$ schemata 123, 126, 127, 128, v případě $13k$ možnosti 134, 138, 139, v případě $17k$ možnosti 173, 176, 178, 179, v případě $18k$ možnosti 184, 186, 187, 189, v případě $19k$ možnosti 193, 194, 197, 198.

Zapišme tyto výsledky úhrnně:

($II_1$): Ze schemat $1jk$ jsou přípustná jen: 106, 107, 109, 123, 126, 127, 128, 134, 138, 139, 173, 176, 178, 179, 184, 186, 187, 189, 193, 194, 197, 198.

Zcela obdobně postupujeme v dalším výpočtu, kde zapíši již jen výsledky, které si čtenář může snadno ověřit:

($II_2$): Ze schemat $2jk$ jsou přípustná jen: 223, 227, 228, 230, 238, 239, 243, 248, 249, 260, 267, 268, 270, 273, 278, 279, 287, 289, 290, 293, 297, 298.

($II_3$): Ze schemat $3jk$ jsou přípustná jen: 301, 302, 307, 309, 310, 318, 319, 341, 342, 348, 349, 350, 357, 359, 370, 372, 378, 379, 381, 382, 387, 389, 390, 391, 397, 398.

($II_4$): Ze schemat $4jk$ jsou přípustná jen: 401, 402, 409, 410, 413, 418, 419, 421, 423, 428, 430, 432, 438, 439, 450, 453, 459, 460, 461, 462, 468.

($II_5$): Ze schemat $5jk$ jsou přípustná jen: 501, 505, 506, 507, 510, 514, 516, 518, 541, 545, 546, 548, 550, 554, 556, 557, 560, 561, 564, 565, 567, 568, 570, 575, 576, 578, 581, 584, 586, 587.

($II_6$): Ze schemat $6jk$ jsou přípustná jen: 601, 605, 606, 609, 610, 616, 618, 619, 621, 625, 626, 628, 630, 635, 638, 639, 681, 686, 689, 690, 691, 695, 698.

Vzhledem k tomu, co bylo řečeno o ekvivalentních přípustných konfiguračních schematech, můžeme některá z těchto schemat vyloučit. Jestliže totiž nějakou permutací $T$ přejde jedno takové schema v druhé, můžeme ponechat z nich jen jedno.

Vidíme především, že permutací $T_3$ přechází schema 123 na schema 106, schema 173 na 107, 109 na 193, 176 na 127, 128 na 186, 184 na 138, 139 na 194, 187 na 178, 179 na 197 a 189 na 198.

Můžeme tedy v zápise ($II_1$) vyloučit tato schemata:

($III_1$): 123, 173, 109, 176, 128, 184, 139, 187, 179, 189.

Podobně permutací $T_4$ přechází schema 260 na schema 223, 267 na 227, 268 na 228, 238 na 248, 243 na 230, 249 na 239, 273 na 270, 293 na 290.

Ze zápisu ($II_2$) vylučujeme:

($III_2$): 260, 267, 268, 238, 243, 249, 273, 293.

Dále za zápisu ($II_3$) můžeme vyloučit schema:

($III_3$): 397, neboť toto schema přechází na schema 349 permutací

$$(1\ 9)\ (2\ 6)\ (5\ 12)\ (7\ 10\ 8\ 11)\,. \qquad (T_9)$$

Užijeme-li permutace $T_1$, vidíme, že schema 505 přechází na 541, 514 na 550, 560 na 516, 561 na 506, 564 na 556, 565 na 546, 570 na 518, 575 na 548, 576 na 568, 581 na 507, 584 na 557, 586 na 567. Konečně permutací

$$(2\ 3)\ (4\ 8)\ (9\ 12)\ (10\ 11) \qquad (T_{10})$$

přechází schema 510 na 587, 516 na 567, 518 na 507, 548 na 505, 557 na 514, 568 na 506, 578 na 501.

Vylučujeme tedy ze zápisu ($II_5$) tato schemata:

($III_5$): 505, 510, 516, 518, 548, 514, 557, 560, 561, 564, 565, 568, 570, 575, 576, 578, 581, 584, 586.

V posledním případě konečně použijeme permutace $T_8$, neboť touto permutací přechází schema 616 na 639, 618 na 609, 628 na 605, 630 na 686, 635 na 626, 638 na 606, 681 na 690, 689 na 610, 695 na 621, 698 na 601.

Můžeme tedy ze zápisu ($II_6$) vyloučit:

($III_6$): 616, 618, 628, 630, 635, 638, 681, 689, 695, 698.

Jestliže skutečně podle tohoto návodu vyloučíme ze zápisů ($II_i$) schemata zapsaná v ($III_i$), dostaneme celkem 96 schemat, která rozvrhneme do dvou tabulek takto:

Tabulka 1

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | 126 | 178 | 227 | 270 | 278 | 279 | 287 | 289 | 290 | 0 |
| 1 | 297 | 298 | 307 | 309 | 342 | 370 | 378 | 379 | 387 | 389 | 1 |
| 2 | 390 | 410 | 413 | 418 | 419 | 432 | 438 | 501 | 541 | 545 | 2 |
| 3 | 546 | 550 | 554 | 556 | 587 | 605 | 606 | 621 | 625 | 626 | 3 |

Tabulka 2

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | 439 | 349 | 197 | 619 | 127 | 391 | 609 | 430 | 186 | 0 |
| 1 | 198 | 239 | 381 | 409 | 461 | 319 | 460 | 691 | 301 | 341 | 1 |
| 2 | 106 | 134 | 421 | 359 | 223 | 230 | 310 | 194 | 462 | 357 | 2 |
| 3 | 507 | 302 | 459 | 372 | 601 | 398 | 423 | 428 | 686 | 690 | 3 |
| 4 | 610 | 639 | 348 | 468 | 506 | 567 | 402 | 193 | 138 | 401 | 4 |
| 5 | 350 | 382 | 450 | 107 | 453 | 228 | 248 | 318 | — | — | 5 |

V příští kapitole dokážeme, že žádné přípustné konfigurační schema z tabulky 1 nelze realisovat v komplexní projektivní rovině. Ve třetí kapitole dokážeme, že všechna schemata z tabulky 2 jsou realisovatelná v komplexní projektivní rovině a přitom žádná dvě z nich nejsou ekvivalentní. Ukážeme také, proč jsme v tabulce 2 nevolili přirozené pořadí jako v tabulce 1.

## II. Volba souřadnicového systému. Nerealisovatelná schemata

Abychom mohli dokázat, že schemata uvedená v tabulce 1 (konec předchozí kapitoly) skutečně nejsou realisovatelná a naopak, že schemata uvedená v tabulce 2 realisovatelná jsou, k tomu již je nutno zkoumat každé schema zvláště. Tuto práci si značně zjednodušíme, zvolíme-li jednotný souřadnicový systém pro celou skupinu schemat $1jk$, obdobně nový souřadnicový systém pro celou skupinu schemat $2jk, \ldots$, atd. To je první úkol této kapitoly.

**1. Souřadnicový systém pro skupinu** $1jk$. Protože žádné tři z bodů $1, 3, 9, 12$ neleží na konfigurační přímce (ani nemohou ležet na přímce nekonfigurační, jak se snadno přesvědčíme), zvolme $1 = (1, 0, 0)$; $9 = (0, 1, 0)$; $12 = (0, 0, 1)$; $3 = (1, 1, 1)$. Pak ihned dostáváme tyto přímky (psané v přímkových souřadnicích): $1-4-9 = (0, 0, 1)$; $3-6-9 = (1, 0, -1)$; $1-6-12 = (0, 1, 0)$; $1-2-3 = (0, 1, -1)$, z čehož $6 = (1, 0, 1)$ a můžeme položit $4 = (a, 1, 0)$, takže $2-4-12 = (1, -a, 0)$ a $2 = (a, 1, 1)$. Dále jest $2-5-9 = (1, 0, -a)$ a položíme-li $5 = (a, b, 1)$, pak $5-8-12 = (b, -a, 0)$, $3-7-12 = (1, -1, 0)$ a můžeme volit $8 = (a, b, c)$. Z toho je $7-8-9 = (c, 0, -a)$, $7 = (a, a, c)$.

Napišme tyto výsledky přehledněji:

$1-4-9 = (0, 0, 1)$, $2-5-9 = (1, 0, -a)$, $3-6-9 = (1, 0, -1)$,
$7-8-9 = (c, 0, -a)$, $1-6-12 = (0, 1, 0)$, $2-4-12 = (1, -a, 0)$,
$3-7-12 = (1, -1, 0)$, $5-8-12 = (b, -a, 0)$, $1-2-3 = (0, 1, -1)$,
$1 = (1, 0, 0)$, $2 = (a, 1, 1)$, $3 = (1, 1, 1)$, $4 = (a, 1, 0)$,
$5 = (a, b, 1)$, $6 = (1, 0, 1)$, $7 = (a, a, c)$, $8 = (a, b, c)$,
$9 = (0, 1, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$, kde čísla $a$, $b$, $c$ mohou (zatím) nabývat libovolných hodnot s výjimkou hodnot uvedených v následující větě:

**Věta 1.** *Pro čísla $a$, $b$, $c$* (z předchozích výsledků) *platí:*

$$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \neq 1,\ a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c.$$

Důkaz. Kdyby $a = 0$, ležel by bod $4$ na přímce $2-5-9$,
$b = 0$, ležel by bod $5$ na přímce $1-6-12$,
$c = 0$, ležel by bod $7$ na přímce $1-4-9$,
$a = 1$, ležel by bod $3$ na přímce $2-4-12$,
$b = 1$, ležel by bod $5$ na přímce $1-2-3$,
$c = 1$, ležel by bod $7$ na přímce $2-5-9$,
$a = b$, ležel by bod $5$ na přímce $3-7-12$,
$a = c$, ležel by bod $7$ na přímce $3-6-9$,
$b = c$, ležel by bod $8$ na přímce $1-2-3$.

Pro další výpočty je výhodné zapsat ještě souřadnice přímek:

$2-6 = (1, 1-a, -1)$, $4-6 = (-1, a, 1)$,
$2-7 = (c-a, a-ac, a^2-a)$, $4-7 = (c, -ac, a^2-a)$,
$2-8 = (c-b, a-ac, ab-a)$, $4-8 = (c, -ac, ab-a)$,
$3-4 = (1, -a, a-1)$, $5-6 = (b, 1-a, -b)$,
$3-5 = (1-b, a-1, b-a)$, $5-7 = (bc-a, a-ac, a^2-ab)$,
$6-7 = (a, c-a, -a)$, $3-8 = (c-b, a-c, b-a)$,
$4-5 = (1, -a, ab-a)$, $6-8 = (b, c-a, -b)$.

Jak těchto výsledků později použijeme, bude patrno.

Zcela obdobně zvolíme souřadnicový systém ve skupině $2jk$. Tentokrát však již budu postupovat rychleji:

## 2. Souřadnicový systém pro skupinu $2jk$.

Protože žádné tři z bodů $1, 3, 9, 12$ neleží na konfigurační přímce (ani nemohou ležet na přímce nekonfigurační), zvolme $1 = (1, 1, 1)$, $3 = (0, 0, 1)$, $9 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 1, 0)$. Zcela obdobným způsobem jako v předchozím případě najdeme souřadnice devíti konfiguračních přímek a desíti konfiguračních bodů. Podrobný důkaz neprovádím a pouze výsledky shrnuji:
$1-4-9 = (0, 1, -1)$, $2-5-9 = (0, a, -1)$, $3-6-9 = (0, 1, 0)$,
$7-8-9 = (0, a, -c)$, $1-6-12 = (1, 0, -1)$, $2-7-12 = (a, 0, -1)$,
$3-4-12 = (1, 0, 0)$, $5-8-12 = (a, 0, -b)$, $1-2-3 = (1, -1, 0)$;
$1=(1, 1, 1)$, $2 = (1, 1, a)$, $3 = (0, 0, 1)$, $4 = (0, 1, 1)$,
$5 = (b, 1, a)$, $6 = (1, 0, 1)$, $7 = (1, c, a)$, $8 = (b, c, a)$,
$9 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 1, 0)$, kde čísla $a, b, c$ mohou nabývat libovolných hodnot, kromě výjimek uvedených ve větě 1.

Vypočítejme ještě:

$2-4 = (1-a, -1, 1)$, $2-6 = (1, a-1, -1)$, $2-8 = (a-ac, ab-a, c-b)$,
$3-5 = (1, -b, 0)$, $3-7 = (c, -1, 0)$, $3-8 = (c, -b, 0)$,
$4-5 = (a-1, b, -b)$,
$4-6 = (1, 1, -1)$, $4-7 = (a-c, 1, -1)$, $4-8 = (a-c, b, -b)$,
$6-8 = (-c, b-a, c)$,
$5-6 = (1, a-b, -1)$, $5-7 = (a-ac, a-ab, bc-1)$, $6-7 = (c, a-1, -c)$.

## 3. Souřadnicový systém pro skupinu $3jk$.

$7-8-9 = (0, c, -1)$, $1-6-12 = (1, -a, 0)$, $2-7-12 = (1, 0, 0)$,
$1-4-9 = (0, a, -1)$, $2-5-9 = (0, 0, 1)$, $3-6-9 = (0, 1, -1)$,
$3-5-12 = (1, -1, 0)$, $4-8-12 = (1, -b, 0)$, $1-2-3 = (1, 0, -1)$;
$1 = (a, 1, a)$, $2 = (0, 1, 0)$, $3 = (1, 1, 1)$, $4 = (b, 1, a)$,
$5 = (1, 1, 0)$, $6 = (a, 1, 1)$, $7 = (0, 1, c)$, $8 = (b, 1, c)$,
$9 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$, kde pro čísla $a, b, c$ platí věta:

**Věta 2.** *Pro čísla $a, b, c$* (z předchozích výsledků) *platí nerovnosti:*

$$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \neq 1,\ a \neq b,\ a \neq c.$$

Důkaz této věty je zcela obdobný, jako důkaz věty 1; nebudu ho proto uvádět.

Napišme ještě souřadnice těchto přímek:

$2-4 = (a, 0, -b)$, $2-6 = (1, 0, -a)$, $2-8 = (c, 0, -b)$,
$3-4 = (a-1, b-a, 1-b)$, $3-7 = (c-1, -c, 1)$, $3-8 = (c-1, b-c, 1-b)$,
$4-5 = (a, -a, 1-b)$, $4-6 = (1-a, a^2-b, b-a)$, $4-7 = (c-a, -bc, b)$,
$5-6 = (1, -1, 1-a)$ $5-7 = (c, -c, 1)$, $5-8 = (c, -c, 1-b)$
$6-7 = (c-1, -ac, a)$, $6-8 = (c-1, b-ac, a-b)$.

## 4. Souřadnicový systém pro skupinu $4jk$.

$1-4-9 = (1, 0, -1)$, $2-5-9 = (1, 0, -a)$, $3-6-9 = (0, 0, 1)$,
$7-8-9 = (b, 0, -a)$, $1-6-12 = (1, -1, 0)$, $2-7-12 = (1, -a, 0)$,
$3-8-12 = (0, 1, 0)$, $4-5-12 = (c, -a, 0)$, $1-2-3 = (0, 1, -1)$;
$1 = (1, 1, 1)$, $2 = (a, 1, 1)$, $3 = (1, 0, 0)$, $4 = (a, c, a)$,
$5 = (a, c, 1)$, $6 = (1, 1, 0)$, $7 = (a, 1, b)$, $8 = (a, 0, b)$,
$9 = (0, 1, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$, kde pro čísla $a, b, c$ platí věta 2.

Napišme souřadnice dalších přímek:

$2-4 = (a-c, a-a^2, ac-a)$, $5-8 = (bc, a-ab, -ac)$, $6-7 = (b, -b, 1-a)$,
$3-4 = (0, -a, c)$, $5-7 = (bc-1, a-ab, a-ac)$, $6-8 = (-b, b, a)$,
$3-5 = (0, -1, c)$, $4-7 = (bc-a, a^2-ab, a-ac)$, $3-7 = (0, -b, 1)$,
$4-8 = (bc, a^2-ab, -ac)$, $5-6 = (-1, 1, a-c)$, $2-6 = (-1, 1, a-1)$,
$4-6 = (-a, a, a-c)$, $2-8 = (b, a-ab, -a)$.

## 5. Souřadnicový systém pro skupinu $5jk$.

$1-4-9 = (0, 1, -a)$, $2-5-9 = (0, 0, 1)$, $3-6-9 = (0, 1, -1)$,
$7-8-9 = (0, c, -a)$, $1-8-12 = (a, -1, 0)$, $2-6-12 = (1, 0, 0)$,
$3-5-12 = (1, -1, 0)$, $4-7-12 = (a, -b, 0)$, $1-2-3 = (1, 0, -1)$,
$1 = (1, a, 1)$, $2 = (0, 1, 0)$, $3 = (1, 1, 1)$, $4 = (b, a, 1)$,
$5 = (1, 1, 0)$, $6 = (0, 1, 1)$, $7 = (b, a, c)$, $8 = (1, a, c)$,
$9 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$, kde pro čísla $a, b, c$ platí věta 1.

Napišme ještě souřadnice přímek:

$3-7 = (c-a, b-c, a-b)$, $4-5 = (1, -1, a-b)$, $6-8 = (c-a, 1, -1)$,
$4-6 = (a-1, -b, b)$, $5-8 = (c, -c, a-1)$, $3-4 = (1-a, b-1, a-b)$,
$2-4 = (1, 0, -b)$, $6-7 = (c-a, b, -b)$, $3-8 = (c-a, 1-c, a-1)$,
$5-7 = (c, -c, a-b)$, $2-8 = (c, 0, -1)$, $2-7 = (c, 0, -b)$,
$4-8 = (ac-a, 1-bc, ab-a)$, $5-6 = (1, -1, 1)$.

### 6. Souřadnicový systém pro skupinu $6jk$.

$1{-}4{-}9 = (0, a, -1)$, $2{-}5{-}9 = (0, 1, 0)$, $3{-}6{-}9 = (0, 1, -1)$,
$7{-}8{-}9 = (0, a, -b)$, $1{-}2{-}3 = (1, -1, 0)$, $1{-}8{-}12 = (a, 0, -1)$,
$2{-}6{-}12 = (1, 0, 0)$, $3{-}7{-}12 = (1, 0, -1)$, $4{-}5{-}12 = (a, 0, -c)$;
$1 = (1, 1, a)$, $2 = (0, 0, 1)$, $3 = (1, 1, 1)$, $4 = (c, 1, a)$,
$5 = (c, 0, a)$, $6 = (0, 1, 1)$, $7 = (a, b, a)$, $8 = (1, b, a)$,
$9 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 1, 0)$, kde pro čísla $a$, $b$, $c$ platí věta 2.

Napišme ještě souřadnice přímek:

$2{-}4 = (1, -c, 0)$, $2{-}7 = (b, -a, 0)$, $2{-}8 = (b, -1, 0)$,
$3{-}4 = (a-1, c-a, 1-c)$, $3{-}5 = (a, c-a, -c)$, $4{-}6 = (1-a, -c, c)$,
$3{-}8 = (a-b, 1-a, b-1)$, $4{-}7 = (a-ab, a^2-ac, bc-a)$, $5{-}6 = (a, c, -c)$,
$4{-}8 = (a-ab, a-ac, bc-1)$, $6{-}8 = (a-b, 1, -1)$, $5{-}7 = (ab, ac-a^2, -bc)$,
$5{-}8 = (ab, ac-a, -bc)$, $6{-}7 = (a-b, a, -a)$.

Druhým úkolem této kapitoly je dokázat, že skutečně žádné schema uvedené v tabulce 1 (konec předchozí kapitoly) není realisovatelné. Důkaz pro první schema v této tabulce uvedené provedu podrobně.

Schema 126, t. j.

$$\frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,5\\6\,4\,7\,8\end{matrix}},\quad \frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\,4\,6\\5\,7\,8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\,4\,5\\7\,8\,6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}.$$

Použijeme souřadnicového systému (navrženého pro skupinu $1jk$); zvolme tento postup:

Najděme nutnou a postačující podmínku, kterou musí splňovat čísla $a$, $b$, $c$, aby

1. přímky $3{-}5$, $4{-}7$, $6{-}8$ procházely bodem $10$,
2. přímky $2{-}7$, $4{-}8$, $5{-}6$ procházely bodem $11$,
3. body $1$, $10$, $11$ ležely na přímce.

Ad 1: Souřadnice přímek $3{-}5$, $4{-}7$, $6{-}8$ najdeme ve výsledcích (viz souřadnicový systém pro skupinu $1jk$). Hledaná podmínka 1 tedy zní:

$$\begin{vmatrix} 1-b, & a-1, & b-a \\ a\;, & -ac, & a^2-a \\ b\;, & c-a, & -b \end{vmatrix} = 0 .$$

Čtenář se snadno přesvědčí, že tato podmínka zní:

$(c-a) . (b-a) . (a+c-1) = 0$. Vzhledem k větě 1 jest tudíž $a+c-1 = 0$. Tuto podmínku označím $d_{12X}$ (první dva indexy se shodují s prvními dvěma číslicemi hledaného schematu 126). Jest tedy $d_{12X} = a+c-1 = 0$.

Ad 2: Zcela obdobně ze souřadnic přímek *2—7*, *4—8*, *5—6* zjistíme nutnou a postačující podmínku, aby na těchto přímkách ležel bod *11*. Jest to podmínka (vzhledem k větě 1) $d_{1X6} = a-b-1 = 0$. Význam indexů ($1X6$) je již snadno pochopitelný.

Ad 3: Vypočítáme-li konečně (ku příkladu) z přímek *3—5*, *6—8* souřadnice bodu *10* a z přímek *4—8*, *5—6* souřadnice bodu *11*, vidíme, že nutná a postačující podmínka, aby body *1*, *10*, *11* ležely na přímce, zní:

$$\begin{vmatrix} abc-ab+a^2b-a^2, & bc-ab+ab^2, & c-ac+abc \\ b-bc+ac-a^2\ , & b-ab\ , & c-a+b-bc \\ 1\ , & 0\ , & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Snadno vypočítáme, že (vzhledem k větě 1) musí platit $d_{126} = a^2-ab-c = 0$. V tom je však spor, neboť platí: $(a-b)\,.\,(a-c) = d_{126}-c.d_{1X6} = 0$, protože $d_{126} = d_{1X6} = 0$. Nemůže však býti $(a-b)\,.\,(a-c) = 0$, jak tvrdí věta 1. Je tedy skutečně schema 126 nerealisovatelné.

Než budu pokračovat v dalších důkazech, napíši (pro usnadnění práce a úsporu místa) všechny nutné a postačující podmínky — obdobné výrazům $d_{1X6}$, $d_{12X}$ — které budeme později potřebovat. Předpokládám při tom, že je již čtenáři zcela jasný význam indexů u těchto výrazů. Pro snadnější přehled napíši výrazy $d_{ijk}$ v tomto pořadí: Nejprve všechny výrazy s prvním indexem 1, pak 2, ..., atd až 6.

### Výrazy $d_{ijk}$

$$\begin{aligned}
d_{10X} &= abc-bc+a^2b-ab^2+ab+a-2a^2\\
d_{12X} &= a+c-1\\
d_{13X} &= 3ac-a^2-a^2c-abc+a^2b-c^2\\
d_{17X} &= 2a-b+a^2b+ab-ac+abc-ab^2-2a^2\\
d_{18X} &= abc-a^2b+a^2c-2ac-c^2\\
d_{19X} &= 2abc-ab+bc-a^2c-bc^2\\
d_{1X3} &= abc-bc-c+2a-ac-a^2+c^2\\
d_{1X4} &= c-bc+3ab-a-b-ab^2\\
d_{1X6} &= a-b-1\\
d_{1X7} &= 2a^2+c-a^2c-c^2+bc+ac-ab-2a\\
d_{1X8} &= 2ab+c-bc-b-ab^2\\
d_{1X9} &= ac-abc-2bc+b^2c+b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{22X} &= abc-a+c+b-bc-bc^2\\
d_{23X} &= a+bc-1-c-ac+c^2\\
d_{24X} &= a+bc-1-b-ab+b^2\\
d_{26X} &= b^2c-b-abc+a+bc-c\\
d_{27X} &= 1
\end{aligned}$$

$d_{28X} = bc^2+b^2c-c-b+ac+ab-2abc$
$d_{29X} = 1$
$d_{2X0} = b^2c-bc^2-b+c-ab^2c+ac^2+2abc-3ac+a$
$d_{2X3} = b^2c-bc^2-b+c-ab^2-a+3ab-2abc+abc^2$
$d_{2X7} = 1-bc$
$d_{2X8} = 2a-2-b-c$
$d_{2X9} = 1-bc-2a+ac+ab$

$d_{30X} = c^2-ac^2-bc^2+2bc-c+abc^2-ac+a^2c-ab+a-abc$
$d_{31X} = c^2-c+bc-ac^2-ac+a^2c+a-b$
$d_{34X} = a^2+abc-ac-a-bc+c+b-b^2$
$d_{35X} = b^2c-a^2-b^2+b-2bc+abc+a^2b-a^2bc+ac$
$d_{37X} = a+b+ac-c-a^2$
$d_{38X} = c-a+b+abc-2bc$
$d_{39X} = bc^2-c^2+ac-2bc+c-a+b^2c-b^2-abc^2+b+ac^2+a^2b-a^2c$
$d_{3X0} = ac-a-bc+c+ac^2-c^2$
$d_{3X1} = a+1-c$
$d_{3X2} = ac-abc+b^2-a^2$
$d_{3X7} = c^2-bc^2-ac+abc-bc+b$
$d_{3X8} = a^2b-ab+bc-ac-b^2+a^2$
$d_{3X9} = 2c-bc-a+ac^2-c^2$

$d_{40X} = a^2b-bc+abc-ab^2c+b^2c^2-a^2$
$d_{41X} = 1$
$d_{42X} = ab-a^2+b^2c^2-abc+a^2bc-ab^2c$
$d_{43X} = 1-bc+ab-a^2$
$d_{45X} = a^2bc-ab^2c+b^2c^2+a^2b-a^2-abc$
$d_{46X} = ab^2c-b^2c^2-abc+bc-ab+a^2$
$d_{4X0} = 3ab+b^2c-a-bc-b-ab^2$
$d_{4X2} = a-2$
$d_{4X1} = a-1+bc-b$
$d_{4X3} = 2abc-2bc+a^2c-a^2bc-ac-a+b+c$
$d_{4X8} = 2a+ab-abc-bc-c+a^2c-2a^2+bc^2$
$d_{4X9} = 1-2a+c+ab-bc$

$d_{50X} = bc-c-ab-ac+2a-1+c^2$
$d_{54X} = d_{55X} = 1$
$d_{56X} = b+c-ac-ab+2a^2-a^2b+2abc-a^2c-2a+ab^2-bc^2+ac^2-b^2c$
$d_{58X} = a^2b+a-a^2-ab^2-2abc-c+ac+b^2c+bc-b+ab$
$d_{5X1} = c-bc-a+ac+1-c^2$
$d_{5X6} = b^2c+ab-b+bc^2+ac-c-2abc$
$d_{5X7} = a-abc-b+b^2c+bc-c$

$$d_{60X} = bc-1+2a-ac$$
$$d_{61X} = a^3b-2a^2bc+a^3c-a^3+ab^2c+2abc^2-a^2c^2+a^2c-b^2c^2+ab-abc-a^2b$$
$$d_{62X} = 1$$
$$d_{63X} = 2a^3-2a^2+ab-ab^2c-a^3c+2a^2bc-a^2c+ac-bc+b^2c^2+a^2c^2-2abc^2+ \\ +abc-a^3b$$
$$d_{68X} = a^3c-a^3+a^2+ab^2c-2a^2bc-a^2c^2+a^2c-ac-b^2c^2+2abc^2+a^3b-a^2b- \\ -abc+bc$$
$$d_{69X} = ab^2c+a^3c-2a^3-2a^2bc-b^2c^2-a^2c^2+a^2c+2abc^2-abc+a^3b+a^2$$
$$d_{6X0} = abc+ac-a^2-bc-abc^2+b^2c^2$$
$$d_{6X1} = a^2-a^2c+abc-a^2bc+abc^2-b^2c^2$$
$$d_{6X5} = 1$$
$$d_{6X6} = a^2-a^2c+bc-b^2c^2+abc^2-abc$$
$$d_{6X8} = bc-ac-1+a^2$$
$$d_{6X9} = abc-a^2bc-ac+abc^2+a^2-b^2c^2$$

## Nerealisovatelná schemata

Postupujme v pořadí určeném tabulkou 1, při čemž s výhodou použijeme výrazů $d_{ijk}$ nahoře napsaných.

1. Schema 126. Důkaz byl již proveden.

2. Schema 178. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní: $(b-a) \,.\, d_{178} = 0$, kde $d_{178} = ab+c-b = 0$. Protože však $b \,.\, (a-b) = d_{1X8} + (b-1) \,.\, d_{178} = 0$, je z toho vidět spor s větou 1.

3. Schema 227. Jest $b \,.\, (1-c) = d_{22X} + (a-c) \,.\, d_{2X7}$. Spor s větou 1.

4, 5, 6. Schemata 270, 278, 279. Podmínka $d_{27X} = 1$ je ve sporu s větou 1.

7. Schema 287. Jest $a \,.\, (b-1)^2 = b \,.\, d_{28X} + (a+bc-2ab+b^2) \,.\, d_{2X7} = 0$.

8. Schema 289. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní: $(b-c) \,.\, d_{289} = 0$, kde $d_{289} = b+c-3a+1+a^2 = 0$. Zřejmě platí:

$$a \,.\, (1-a) \,.\, (bc-1) = d_{28X} - d_{2X9} + (1-bc) \,.\, d_{289} = 0.$$

Nemůže však být $(1-bc) = 0$, neboť by bod *3* ležel na *5—7—10*.

9, 10, 11. Schemata 290, 297, 298. Podmínka $d_{29X} = 1$ je ve sporu s větou 1.

12. Schema 307. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce zní: $d_{307} = ab^2-2b^2c+bc+ac^2-a^2c+ab^2c-abc^2+ac-ab+bc^2-c^2$. Jest však:

$$(a-1) \,.\, (b-a) \,.\, (b-1) \,.\, c^2 = \\ = c \,.\, (1-a) \,.\, (d_{30X} - d_{307}) + (b-1) \,.\, (d_{307} + b \,.\, d_{30X}) = 0.$$

13. Schema 309. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní: $d_{309} = a^2bc+abc^2-ab^2c+b^2c-bc^2-ab^2+2a^2c-2ac+c^2-ac^2+ab-a^3c = 0$.

Platí však:

$c \,.\, (a-1) \,.\, (a-b) \,.\, (a-c) = c \,.\, d_{309} + (1-b) \,.\, (ac+a-c) \,.\, d_{3X9} +$
$+ (a+ac-2c) \,.\, d_{30X} = 0.$

14. Schema 342. Platí $bc \,.\, (1-b) = (a+b) \,.\, d_{34X} + (a+b-1) \,.\, d_{3X2} = 0.$

15. Schema 370. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní:
$a \,.\, (a-c) \,.\, (a-1) \,.\, d_{370} - a \,.\, d_{3X0} - a^2 \,.\, d_{37X} = 0,$ kde $d_{370} = 1+ac-c = 0.$
Jest však: $a-1 = (1-a) \,.\, d_{3X0} + d_{37X} + (ac+a-b-c-1) \,.\, d_{370} = 0.$

16. Schema 378. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní:
$a^2c-a^3b+a^2bc-a^3+2a^2b-abc-ac+a^2 = b \,.\, (a-1) \,.\, (c-b) +$
$+ (a+ab-b) \,.\, d_{37X} = 0.$ Kdyby však bylo $c-b = 0$, ležel by bod *3* na přímce *2—8—11.*

17. Schema 379. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní:
$a \,.\, (a-c) \,.\, (2-a) \,.\, d_{37X} - a \,.\, d_{3X9} + a \,.\, (a-c) \,.\, d_{379} = 0,$ kde
$d_{379} = 2a^2c-1-2a-5ac+3c+3a^2-a^3 = 0.$ Dále platí:
$(2a-3) \,.\, d_{3X9} = (a-1) \,.\, M + c \,.\, (3-2a) \,.\, d_{37X} + (2c-1) \,.\, d_{379} = 0,$ kde
$M = (a+1) \,.\, (c-a+1) = 0.$ V tom však je spor s větou 2, neboť kdyby bylo $c-a+1 = 0$, pak by z rovnice $d_{37X} = a \,.\, (c-a+1) + (b-c) = 0$ bylo $b-c = 0$ a na přímce *3—8—10* by ležel bod *2.* Nemůže být ani $(a+1) = 0$, jak snadno zjistíme dosazením tohoto výsledku do podmínky $d_{379} = 0.$ (Vychází totiž $2c+1 = 0$, což dosazeno spolu s výsledkem $a+1 = 0$ do podmínky $d_{37X} = 0$ dává $b-1 = 0$.)

18. Schema 387. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní:
$(b-c) \,.\, (a-1) \,.\, b = (c-b) \,.\, d_{38X} = 0.$ Kdyby bylo $b-c = 0$, ležel by bod *3* na přímce *2—8—11.*

19. Schema 389. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní:
$(c-b) \,.\, d_{389} = 0,$ kde $d_{389} = abc-bc-a+ac+ab-a^2c = 0.$ Kdyby totiž bylo $b-c = 0$, ležel by bod *3* na přímce *2—8—11.* Dále je
$(b-1) \,.\, (a-c) \,.\, M = (c-1) \,.\, d_{389} + c \,.\, (a-1) \,.\, d_{38X} = 0,$ kde
$M = c-ac-2 = 0.$ Zřejmě je $c \,.\, d_{38X} + (ac+1-2c) \,.\, d_{3X9} = (c-1) \,.\, N = 0,$
$N-P = (2c-ac-a+1) \,.\, M = 0,$ kde $P = 2+c-a = 0,$
$N = a+a^2c-2c+2c^2+a^2c^2-3ac^2 = 0.$ Protože však
$c \,.\, (c-b) = d_{3X9} + (c-1) \,.\, (M+P) = 0$ a protože — jak jsme již ukázali — je $c-b \neq 0$, vidíme spor s větou 2.

20. Schema 390. Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní:
$d_{390} = 2a^2c-a^2b-a^2bc+a-b+b^2+a^2c^2-ac^2-a^2 = 0.$ Platí však:

$$ac(a-b) \,.\, (a-1) \,.\, (1-c) =$$
$$= (b-a) \,.\, d_{39X} + (b-ac) \,.\, d_{390} + (a-b-ab-a^2b+a^2c+b^2) \,.\, d_{3X0} = 0.$$

21, 22, 23, 24. Schemata 410, 413, 418, 419. Podmínka $d_{41X} = 1$ je ve sporu s větou 2.

25. Schema 432. Jest $(b-a) = b \,.\, d_{43X} + (ab+1-b^2) \,.\, d_{4X2} = 0.$

26. Schema 438. Jest $(a-1)^2 = (1-c) \, . \, d_{43X} - d_{4X8} = 0$.

27. Schema 501. Platí $a \, . \, (1-b) = d_{50X} + d_{5X1} = 0$.

28, 29, 30. Schemata 541, 545, 546. Podmínka $d_{54X} = 1$ je ve sporu s větou 1.

31, 32, 33. Schemata 550, 554, 556. Podmínka $d_{55X} = 1$ je ve sporu s větou 1.

34. Schema 587. Platí $a \, . \, (b-1) \, . \, (a-b-c) = d_{58X} - d_{5X7} = 0$. Nemůže však být $a-b-c = 0$, neboť by na přímce *6—7—11* ležel bod *5*.

35. Schema 605. Podmínka $d_{6X5} = 1$ je ve sporu s větou 2.

36. Schema 606. Jest $a \, . \, (1-a) = d_{6X6} + (bc-a) \, . \, d_{60X} = 0$.

37, 38, 39. Schemata 621, 625, 626. Podmínka $d_{62X} = 1$ je ve sporu s větou 2.

Tím je dokázáno, že žádné ze schemat, obsažených v tabulce 1 (konec kapitoly I), není realisovatelné.

Zároveň je také zřejmé, že nemusíme již hledat, zda některá z těchto schemat snad jsou ekvivalentní. Musíme však provést důkaz, že realisovatelná schemata (která uvádím v následující kapitole) jsou navzájem různá. Jakým způsobem se to dá nejbezpečněji (a snad i nejrychleji) zjistit, o tom pojednám v závěru příští kapitoly.

## III. Jemnější dělení. Realisovatelné konfigurace

V úvodu jsme rozdělili body do typů A, B, C, D, E. Pro další úkoly je výhodné toto dělení ještě zjemnit, a to takto:

Zkoumejme nejprve jen body typu C a buď na př. *1* takovým bodem, odděleným od bodů *2*, *3*, *4*. Pak *2—3*, *2—4*, ale *3* : *4* (což je známá vlastnost $C$-bodů). Kromě přímek *2—3*, *2—4* procházejí bodem *2* ještě další dvě přímky, bodem *3* (kromě *2—3*) ještě další tři přímky a bodem *4* (kromě *2—4*) rovněž ještě další tři přímky. Žádná z těchto desíti přímek (přímky *2—3*, *2—4* v to počítaje) není incidentní s bodem *1* (protože dle předpokladu jest *1* : *2*, *3*, *4*) a existuje tudíž šest konfiguračních přímek, na kterých neleží ani jeden z bodů *2*, *3*, *4*. Z těchto šesti přímek procházejí čtyři bodem *1* a na zbývajících dvou již neleží ani bod *1*, ani body *2*, *3*, *4* (od kterých je tento $C$-bod oddělen). Můžeme tudíž vyslovit větu:

**Věta 3.** *V každé konfiguraci, obsahující aspoň jeden* $C$-bod, *existuje ke každému* $C$-bodu *dvojice přímek, které nejsou incidentní s tímto* $C$-bodem, *ani s body, od kterých je oddělen.*

Zcela obdobná věta (jejíž důkaz již ponechávám čtenáři) platí také pro body typu E:

**Věta 4.** *V každé konfiguraci, obsahující aspoň jeden* $E$-bod, *existuje ke každému* $E$-bodu *dvojice přímek, které nejsou incidentní s tímto* $E$-bodem, *ani s body, od kterých je oddělen.*

Na základě těchto vět můžeme $C$-body a $E$-body dělit na dva druhy, jak je provedeno v této úmluvě:

Úmluva 1. Jestliže dvě přímky z dvojice uvedené ve větě 3 (respektive 4) procházejí jedním konfiguračním bodem, pak říkáme, že uvedený $C$-bod (resp. $E$-bod) patří do typu $C^1$ (resp. $E^1$). Jinak říkáme, že patří do typu $C^2$ (resp. $E^2$).

Čtenář snadno zjistí, že takovéto zjemnění nelze provádět ani u $A$-bodů, ani u $D$-bodů.

Soustřeďme se nyní na $B$-body a nechť konkretně *1* je $B$-bod oddělený od bodů *2*, *3*, *4*. Pak je ovšem *2—3*, *2—4*, *3—4*, ale nikoliv *2—3—4*. Nepočítáme-li přímky *2—3*, *2—4*, *3—4*, pak každým z bodů 2, 3, 4 procházejí ještě další dvě konfigurační přímky. Celkem tedy body *2*, *3 4* (spolu s přímkami *2—3*, *2—4*, *3—4*) prochází devět konfiguračních přímek, z nichž žádná není incidentní s bodem *1* (podle předpokladu *1* : *2*, *3*, *4*). Na zbývajících sedmi konfiguračních přímkách neleží tudíž žádný z bodů *2*, *3*, *4*. Z těchto sedmi přímek však čtyři procházejí bodem *1*; existuje tedy trojice přímek, na kterých neleží ani bod *1*, ani body *2*, *3*, *4* (od kterých je tento $B$-bod oddělen). Dokážeme ještě, že aspoň dvě z těchto přímek se protínají v konfiguračním bodě. Kdyby tomu totiž tak nebylo, pak by na těchto třech přímkách leželo devět konfiguračních bodů — různých od bodů *1*, *2*, *3*, *4* — a v tom je spor. Můžeme tedy vyslovit větu:

**Věta 5.** *V každé konfiguraci, obsahující aspoň jeden* $B$-bod, *existuje ke každému* $B$-bodu *trojice přímek (z nichž aspoň dvě se protínají v konfiguračním bodě), které nejsou incidentní s tímto* $B$-bodem *ani s body, od kterých je oddělen.*

A nyní opět podle toho, jaká je vzájemná poloha těchto tří přímek, můžeme rozdělit $B$-body na čtyři druhy, což učiníme úmluvou:

Úmluva 2. Jestliže tři přímky z trojice uvedené ve větě 5 se neprotínají v jediném bodě, mohou pro tři průsečíky vždy dvou z nich nastat tři případy:

1. Jeden průsečík je konfigurační bod a dva nekonfigurační; pak bod $B$ označíme $B^1$.
2. Dva průsečíky jsou konfigurační body a třetí není konfigurační; bod $B$ pak označíme $B^2$.
3. Všechny tři průsečíky jsou konfigurační body; bod $B$ pak označíme $B^3$.
4. Jestliže tři přímky naší trojice se protínají v jediném bodě (což dle předchozích úvah může být jen bod konfigurační), označíme náš $B$-bod stručně $B^4$.

Že skutečně mohou existovat body $C^1$, $C^2$, $E^1$, $E^2$, $B^1$, $B^2$, $B^3$, $B^4$, přesvědčí se čtenář později, neboť u každé z realisovatelných konfigurací uvedu, jak jsou jednotlivé body odděleny a jakých jsou typů (již zjemněných). Body *10*, *11* jsou vždy typu $C^1$. Je to způsobeno volbou počátečních podmínek.

Tohoto jemnějšího dělení bodů použijeme především k uspořádání konfigurací. Tak ku příkladu konfigurace třídy $B_4C_5D_2E_1$ (viz Úvod) můžeme rozdělit ještě do několika typů, z nichž jeden uvádím, a to typ: $B_1^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$. Do tohoto typu patří všechny konfigurace obsahující čtyři $B$-body (z nichž jeden je typu $B^1$ a tři typu $B^2$), pět $C$-bodů (z nichž čtyři jsou typu $C^1$ a jeden typu $C^2$), jeden $E$ bod typu $E^1$, dva $D$-body a žádný $A$-bod.

Realisovatelné konfigurace pak v dalším seřazuji takto: Nejprve uvádím konfiguraci neobsahující $B$-body (je jediná). Pak konfigurace s jedním $B$-bodem, dále se dvěma $B$-body, atd. Mají-li konfigurace stejný počet $B$-bodů, seřazuji je podle typů těchto $B$-bodů (resp. $C$-bodů, atd.) atd. Tím zároveň vysvětluji pořadí schemat v tabulce 2 (konec I. kapitoly). Tohoto seřazení později s výhodou použijeme při důkazu, že všechna níže uvedená realisosovatelná schemata jsou navzájem různá.

Než přikročím k vlastním důkazům, upozorňuji, že při výpočtech budu používat již zavedených souřadnicových systémů, jakož i výrazů $d_{ijk}$ z předchozí kapitoly. Třeba se ještě také zmínit o pojmech cizí přímka a čistá konfigurace. Tyto pojmy definuji — jak je zvykem — takto:

Definice cizích přímek. Jestliže tři konfigurační body leží na nekonfigurační přímce, pak této přímce říkáme *cizí přímka.*

Definice čisté konfigurace. Konfigurace, ve kterých se nevyskytují cizí přímky nazývám *čisté konfigurace.*

V některé literatuře se zavádí ještě pojem *cizích* bodů a definice čisté konfigurace pak zní jinak. V této práci však pod pojmem konfigurace čistá je míněna konfigurace nahoře definovaná. Na to čtenáře výslovně upozorňuji.

U každé z níže uvedených konfigurací upozorním na případné reálné řešení. V poslední kapitole pak přímo u každé z konfigurací uvedu souhrnně počet reálných i imaginárních řešení.

Protože počet čistých konfigurací značně převládá, upozorňuji, že není-li výslovně řečeno jinak, je vždy uvedená konfigurace čistá.

## Realisovatelné konfigurace

**1. Typ** $C_6^1C_1^2D_4E_1^2$, schema 439, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 8\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 6\\5\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\8\ 7\ 6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

Podmínka, aby body *1, 10, 11* ležely na přímce, zní: $b\,.\,(1-c)\,.\,d_{43X} = 0$ (výrazy $d_{iXj}$, resp. $d_{ijX}$, nechť si čtenář laskavě vyhledá v kapitole II). Dále platí: $b\,.\,d_{4X9} = b\,.\,d_{43X} + b\,.\,M = (b-1)\,.\,d_{43X} + (a-1)\,.\,N = 0$, kde $M = ab-a-1 = 0$, $N = c-2a+a^2 = 0$. Vzhledem k tomu, že pro tři neznámé $a$, $b$, $c$ (pro které platí věta 2) máme předepsány jen dvě rovnice

($M = 0$ a $N = 0$), můžeme souřadnice všech dvanácti konfiguračních bodů získat tak, že do souřadnic:

$1 = (1, 1, 1)$, $2 = (a, 1, 1,)$, $3 = (1, 0, 0)$, $4 = (a, c, a)$, $5 = (a, c, 1)$, $6 = (1, 1, 0)$, $7 = (a, 1, b)$, $8 = (a, 0, b)$, $9 = (0, 1, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$ dosadíme za $b$, $c$ výrazy

$b = \frac{a+1}{a}$; $c = 2a-a^2$. Dostaneme tak:

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 1, 1), & 7 &= (a^2, a, a+1), \\ 2 &= (a, 1, 1), & 8 &= (a^2, 0, a+1), \\ 3 &= (1, 0, 0), & 9 &= (0, 1, 0), \\ 4 &= (1, 2-a, 1), & 10 &= (2a^2+a-a^3, a^2+2a-a^3, a+1), \\ 5 &= (a, 2a-a^2, 1), & 11 &= (2a^2-a^3, a^2+a-a^3, 1), \\ 6 &= (1, 1, 0), & 12 &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

kde $a$ může nabývat všech hodnot nad tělesem komplexních čísel, ale $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, $a \neq 2$, $a^2-2 \neq 0$, $a^2-a-1 \neq 0$. Snadno totiž nalezneme, že $a \neq 0$, $a \neq 1$ dle věty 2 a z téhož důvodu musí být $a \neq -1$, resp. $a \neq 2$, resp. $a^2-a-1 \neq 0$, (neboť jinak by bylo $b = 0$, resp. $c = 0$, resp. $a = b$). Poněkud nesnadněji se hledá, proč musí být také $a^2 - 2 \neq 0$. V opačném případě by však bod *3* ležel na přímce *4—7—11*.

Pro libovolnou přípustnou hodnotu $a$ jest v této konfiguraci vždy cizí přímka *2—4—6* a kromě toho další dvě cizí přímky dostaneme, položíme-li $a = 1 \pm \sqrt{2}$ (a to přímky *9—10—12*, *1—5—8*). V tomto případě také vzniká incidence (kterou bychom mohli nazvat n á h o d n o u), že totiž přímky *3—8—12*, *1—4—9*, *6—7—10* procházejí jedním bodem, právě tak jako přímky *3—5—10*, *1—4—9*, *2—8—11*.

Jednotlivé body této konfigurace jsou těchto typů a takto odděleny:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *1 : 5, 7, 8* | $D$ | *5 : 1, 7, 8* | $D$ | *9 : 10, 11, 12* | $D$ |
| *2 : 4, 6, 10* | $C^1$ | *6 : 2, 4, 8* | $C^1$ | *10 : 2, 9, 12* | $C^1$ |
| *3 : 4, 7, 11* | $E^2$ | *7 : 1, 3, 5* | $C^1$ | *11 : 3, 9, 12* | $C^1$ |
| *4 : 2, 3, 6* | $C^2$ | *8 : 1, 5, 6* | $C^1$ | *12 : 9, 10, 11* | $D$ |

Tato konfigurace je jediná, která nemá $B$-body.

**2. Typ** $B_1^2C_4^1C_3^2D_4$, s c h e m a 349, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 5\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 6\\7\ 5\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\8\ 7\ 6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

Vypočítáme-li souřadnice bodů *10*, *11* z přímek *3—7*, *6—8*; *2—8*, *4—7* dostaneme: $10 = (b, 1-a+b, b+c-ac)$; $11 = (bc, 2c-a, c^2)$. Podmínka, aby body *1*, *10*, *11* ležely na přímce, tedy zní: $d_{349} = a^2+b^2-ab-ac = 0$. Dále platí: $c \,.\, d_{34X} = b \,.\, d_{3X9} + (c-a) \,.\, M$; $d_{34X} = N + (1-b) \,.\, M$, kde $M = c-b-ac = 0$, $N = 2b-2b^2+a^2-a = 0$.

Z těchto tří rovnic ($d_{349}$, $M$, $N$) můžeme již snadno vypočítat $b$, $c$ jako funkce $a$ a podmínku pro $a$:

$$2b = 7a^2-6a+3\,;\quad 2c = 14a^2-11a+5\,;\quad 7a^3-9a^2+5a-1 = 0\,.$$

Pomocí těchto rovnic (viz souřadnicový systém pro skupinu $3ij$) dostáváme:

$$\begin{array}{ll}
1 = (a, 1, a), & 7 = (0, -7a^2+2a+1, 1), \\
2 = (0, 1, 0), & 8 = (1-a, -7a^2+2a+1, 1), \\
3 = (1, 1, 1), & 9 = (1, 0, 0), \\
4 = (7a^2-6a+3, 2, 2a), & 10 = (1, -7a^2+2a+2, 2), \\
5 = (1, 1, 0), & 11 = (1-a, 2-2a, 1), \\
6 = (a, 1, 1), & 12 = (0, 0, 1),
\end{array}$$

kde pro $a$ platí $7a^3-9a^2+5a-1 = 0$; $a_1 \in (0, 1)$.

Jednotlivé body jsou takto odděleny a těchto typů:

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $D$ | $5 : 1, 7, 8$ ....... $D$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 6, 10$ ...... $C^2$ | $6 : 2, 4, 7$ ....... $C^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 5, 6$ ....... $C^1$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 3, 6$ ....... $C^2$ | $8 : 1, 3, 5$ ....... $C^1$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

Tato konfigurace spolu s předchozí (439) jsou jediné dvě konfigurace obsahující více než dva $D$-body.

Protože u zbývajících konfigurací se provádí výpočet obdobně jako u této, nebudu již výpočet provádět a omezím se pouze na výsledek.

**3. Typ** $B_1^2C_4^1C_4^2D_2E_1^2$, schema 197, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 5\\6\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\8\ 7\ 6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 6\\8\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}\,.$$

V tomto případě je výhodné vypočítat souřadnice bodu $10$ z přímek $3-8$, $5-6$ a souřadnice bodu $11$ z přímek $2-8$, $4-5$. Pak totiž vyjde podmínka $d_{197}$ (aby body $1$, $10$, $11$ ležely na přímce) ve velmi jednoduchém tvaru $d_{197} = a-b-1 = 0$. Další výpočty přenechávám čtenáři:

$$\begin{array}{ll}
1 = (1, 0, 0,), & 7 = (1, 1, 2), \\
2 = (x+1, 4, 4), & 8 = (x+1, x-3, 2x+2), \\
3 = (1, 1, 1), & 9 = (0, 1, 0), \\
4 = (x+1, 4, 0), & 10 = (3-x, -x-1, 4), \\
5 = (x+1, x-3, 4), & 11 = (x+5, -x-1, 4), \\
6 = (1, 0, 1), & 12 = (0, 0, 1),
\end{array}$$

kde pro $x$ platí rovnice $x^2 + 7 = 0$.[2])

[2]) Podmínka pro $a$ vyšla původně $2a^2-a+1=0$. Abychom mohli snadněji počítat souřadnice konfiguračních bodů, provedl jsem substituci $4a = x+1$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 3, 7$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 7, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 2, 4, 8$ ....... $C^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 5, 11$ ...... $E^2$ | $7 : 1, 2, 5$ ....... $C^1$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 6, 8$ ....... $C^2$ | $8 : 1, 4, 6$ ....... $C^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**4. Typ** $B_2^1 C_4^1 C_4^2 D_2$, schema 619, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\8&6&7&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&7&6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, a)\,, & 7 &= (2a,\ ax+a+4,\ 2a)\,,\\
2 &= (0, 0, 1)\,, & 8 &= (2,\ ax+a+4,\ 2a)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (4-ax-3a,\ 2,\ 2a)\,, & 10 &= (4,\ 2x+10,\ 5a+4+ax)\,,\\
5 &= (1,\ 0,\ ax+3a-2-x)\,, & 11 &= (2,\ ax+a+4,\ 3ax+7a-2x)\,,\\
6 &= (0, 1, 1)\,, & 12 &= (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $a$, $x$ platí současně $a^2+ax-x = 0$, $x^2+5x+8 = 0$.[3])

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 6, 7$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 3, 7$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 7, 10$ ...... $B^1$ | $6 : 1, 4, 8$ ....... $C^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 5, 8, 11$ ...... $B^1$ | $7 : 1, 2, 5$ ....... $C^1$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 6, 8$ ....... $C^2$ | $8 : 3, 4, 6$ ....... $C^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**5. Typ** $B_1^1 B_1^2 C_4^1 C_4^2 D_2$, schema 127, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\5&7&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&6\\8&5&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 0, 0)\,, & 7 &= (a,\ a,\ 1-a)\,,\\
2 &= (a, 1, 1)\,, & 8 &= (2a^2-a,\ a^3-a^2,\ 3a-2a^2-1)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (0, 1, 0)\,,\\
4 &= (a, 1, 0)\,, & 10 &= (a^4-5a^3+4a^2-a,\ 2a^3-a^4-a^2,\\
& & & \quad a^4-a^3-4a^2+4a-1)\,,\\
5 &= (2a^2-a,\ a^3-a^2,\ 2a-1)\,, & 11 &= (2a^3+a^2-a,\ a^3+a^2-a,\ 2a-1)\,,\\
6 &= (1, 0, 1)\,, & 12 &= (0, 0, 1);
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $a^6-4a^4-4a^3+11a^2-6a+1 = 0$, $a_1 \in (0, 1)$, $a_2 \in (1, 2)$.[4])

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 6, 7$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 7, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 2, 4, 5$ ....... $B^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 8, 11$ ...... $C^2$ | $7 : 1, 2, 5$ ....... $C^1$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 6, 8$ ....... $C^2$ | $8 : 1, 3, 4$ ....... $C^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

---

[3]) Pro snadnější výpočet souřadnic konfiguračních bodů provedl jsem ve výsledné rovnici pro $a$ ($a^4-5a^3+13a^2-16a+8 = 0$) substituci $a = 1-t$.

[4]) K podstatnému zjednodušení této rovnice dojde, provedeme-li substituci $a = \dfrac{1}{t+1}$, neboť touto substitucí přejde daná rovnice na tvar $t^6 - 4t^4 + 5t^2 - 1 = 0$. Doporučuji zvláště pro event. přesnější odhad kořenů.

**6. Typ** $B_1^1B_1^2C_4^1C_4^2D_2$, schema 391, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\6\,7\,5\,8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\,4\,5\\8\,7\,6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\,5\,6\\4\,7\,8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\,10\\3\,11\end{matrix}}.$$

$1 = (a, 1, a)$, $7 = (0, 1, a+1)$,
$2 = (0, 1, 0)$, $8 = (2a^3-a^5+a^2-a, 1, a+1)$,
$3 = (1, 1, 1)$, $9 = (1, 0, 0)$,
$4 = (2a^3-a^5+a^2-a, 1, a)$, $10 = (a^5-2a^3+2a, a^5-2a^3+a+1, 1)$,
$5 = (1, 1, 0)$, $11 = (a^4-2a^2-a+1, a^3-a^2-a, -1)$,
$6 = (a, 1, 1)$, $12 = (0, 0, 1)$,

kde pro $a$ platí rovnice $a^6+a^5-a^4-2a^3+a+1 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 4, 7$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 8, 10$ ...... $C^2$ | $6 : 2, 4, 8$ ....... $C^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 7, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 3, 5$ ....... $C^1$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 5, 6$ ....... $B^1$ | $8 : 1, 2, 6$ ....... $C^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**7. Typ** $B_1^1B_1^2C_4^1C_4^2D_2$, schema 430, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\6\,7\,8\,5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\,4\,6\\5\,8\,7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\,5\,6\\4\,7\,8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\,10\\3\,11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 1, 1)$, $7 = (2a, 2, a^2)$,
$2 = (a, 1, 1)$, $8 = (2, 0, a)$,
$3 = (1, 0, 0)$, $9 = (0, 1, 0)$,
$4 = (1, 3a^2-a^3-a-1, 1)$, $10 = (2a^2-a^3+3a-4, a^3-3a^2+a+2, 1)$,
$5 = (a, a^3-3a^2+a+2, 1)$, $11 = (a^3-2a^2+1, 1, a^2-a-1)$,
$6 = (1, 1, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$,

kde pro $a$ platí rovnice $a^4-2a^3-2a^2+2a+2 = 0$; $a_1 \in (1, 2)$; $a_2 \in (2, 3)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 6, 8$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 8, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 2, 4, 5$ ....... $B^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 7, 11$ ...... $C^2$ | $7 : 1, 3, 4$ ....... $C^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 6, 7$ ....... $C^2$ | $8 : 1, 2, 5$ ....... $C^1$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**8. Typ** $B_1^1 B_1^2 C_4^1 C_4^2 D_2$, schema 609, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 7 \\ 4\ 5\ 6\ 8 \end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 8\ 6\ 7\ 5 \end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix} 3\ 5\ 6 \\ 4\ 7\ 8 \end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix} 2\ 4\ 5 \\ 8\ 7\ 6 \end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix} 2\ 10 \\ 3\ 11 \end{matrix}}.$$

$1 = (1, 1, a)$, $7 = (1, 2a-4+2t-at, 1)$,
$2 = (0, 0, 1)$, $8 = (2, 5a+2t-4-2at, a)$,
$3 = (1, 1, 1)$, $9 = (1, 0, 0)$,
$4 = (2, 2t-2-a, 1+at-2a)$, $10 = (2, 2at+2-6a, 6t-10-a)$,
$5 = (2, 0, 1+at-2a)$, $11 = (2, 5a+2t-4-2at, 2t+3a-at-3)$,
$6 = (0, 1, 1)$, $12 = (0, 1, 0)$,

kde pro $a, t$ platí současně $a^2-ta+1 = 0$; $2t^2-10t+13 = 0$.[5])

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* : *5, 6, 7* | $C^2$ | *5* : *1, 3, 8* | $C^2$ | *9* : *10, 11, 12* | $D$ |
| *2* : *4, 7, 10* | $B^1$ | *6* : *1, 4, 7* | $C^1$ | *10* : *2, 9, 12* | $C^1$ |
| *3* : *5, 8, 11* | $C^2$ | *7* : *1, 2, 6* | $C^1$ | *11* : *3, 9, 12* | $C^1$ |
| *4* : *2, 6, 8* | $B^2$ | *8* : *3, 4, 5* | $C^2$ | *12* : *9, 10, 11* | $D$ |

**9. Typ** $B_2^2 C_6^1 C_2^2 D_2$, schema 186, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 7 \\ 4\ 5\ 6\ 8 \end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 5 \\ 6\ 4\ 7\ 8 \end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix} 3\ 4\ 5 \\ 8\ 6\ 7 \end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix} 2\ 4\ 5 \\ 7\ 8\ 6 \end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix} 2\ 10 \\ 3\ 11 \end{matrix}}.$$

$1 = (1, 0, 0)$, $7 = (x, x, 1)$,
$2 = (x+6, 3, 3)$, $8 = (11x, 5x+3, 11)$,
$3 = (1, 1, 1)$, $9 = (0, 1, 0)$,
$4 = (x+6, 3, 0)$, $10 = (6-x, 3-x, 1)$,
$5 = (x+6, x+3, 3)$, $11 = (4-x, 3-x, 1)$,
$6 = (1, 0, 1)$, $12 = (0, 0, 1)$,

kde pro $x$ platí $x^2-3 = 0$.[6])

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* : *5, 7, 8* | $B^2$ | *5* : *1, 3, 4* | $C^1$ | *9* : *10, 11, 12* | $D$ |
| *2* : *6, 8, 10* | $C^2$ | *6* : *2, 7, 8* | $C^1$ | *10* : *2, 9, 12* | $C^1$ |
| *3* : *4, 5, 11* | $C^2$ | *7* : *1, 4, 6* | $B^2$ | *11* : *3, 9, 12* | $C^1$ |
| *4* : *3, 5, 7* | $C^1$ | *8* : *1, 2, 6* | $C^1$ | *12* : *9, 10, 11* | $D$ |

[5]) Původní podmínka pro $a$ vychází $4a^4 - 20a^3 + 34a^2 - 20a + 4 = 0$.

[6]) Podmínka pro $a$ vychází $3a^2 - 12a + 11 = 0$. Pro výpočet souřadnic konfiguračních bodů je však výhodné použít substituce $a = \frac{2x+1}{x}$, kterou původní rovnice přejde na tvar $x^2 - 3 = 0$. Výhoda této substituce spočívá hlavně v tom, že použitím poslední rovnice se dá konfigurace snadněji nakreslit.

**10. Typ** $B_2^2C_6^1C_2^2D_2$, schema 198, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\8&7&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&6&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}\,.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 0, 0)\,, && 7 = (3, 3, 2a^2-4a^3+5a-6)\,,\\
&2 = (a, 1, 1)\,, && 8 = (5a^3-2a^2-6a+12, 3, 3a^3-6a+9)\,,\\
&3 = (1, 1, 1)\,, && 9 = (0, 1, 0)\,,\\
&4 = (a, 1, 0)\,, && 10 = (2a-3-a^3, -1, 2a^3-a^2-2a+3)\,,\\
&5 = (3a, 2a^3-a-a^2+6, 3)\,, && 11 = (2a^3-a^2-3a+3, -1, 2a^3-a^2-2a+3)\,,\\
&6 = (1, 0, 1)\,, && 12 = (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $a^4 + a^3 - 2a^2 + 3 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8 \ldots\ldots\; B^2$ | $5 : 1, 3, 4 \ldots\ldots\; C^1$ | $9 : 10, 11, 12 \ldots\; D$ |
| $2 : 6, 7, 10 \ldots\ldots\; C^2$ | $6 : 2, 7, 8 \ldots\ldots\; C^1$ | $10 : 2, 9, 12 \ldots\; C^1$ |
| $3 : 4, 5, 11 \ldots\ldots\; C^2$ | $7 : 1, 2, 6 \ldots\ldots\; C^1$ | $11 : 3, 9, 12 \ldots\; C^1$ |
| $4 : 3, 5, 8 \ldots\ldots\; C^1$ | $8 : 1, 4, 6 \ldots\ldots\; B^2$ | $12 : 9, 10, 11 \ldots\; D$ |

**11. Typ** $B_2^2C_6^1C_2^2D_2$, schema 239, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&7&4&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\5&8&7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&7&6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}\,.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, 1), && 7 = (1, a^3-4a^2+7a-2, a),\\
&2 = (1, 1, a), && 8 = (a^3-5a^2+10a-3, a^3-4a^2+7a-2, a),\\
&3 = (0, 0, 1), && 9 = (1, 0, 0),\\
&4 = (0, 1, 1), && 10 = (a^3-5a^2+10a-3, 1, -a^3+4a^2-6a+3),\\
&5 = (a^3-5a^2+10a-3, 1, a), && 11 = (a^3-5a^2+9a-2, a^3-4a^2+6a-1, 2a-a^2),\\
&6 = (1, 0, 1), && 12 = (0, 1, 0),
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí rovnice $a^4-5a^3+10a^2-6a+1 = 0$; $a_1 \in (0; 0{,}5)$; $a_2 \in (0{,}5; 1)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8 \ldots\ldots\; C^1$ | $5 : 1, 4, 7 \ldots\ldots\; C^2$ | $9 : 10, 11, 12 \ldots\; D$ |
| $2 : 4, 6, 10 \ldots\ldots\; C^1$ | $6 : 2, 4, 8 \ldots\ldots\; C^1$ | $10 : 2, 9, 12 \ldots\; C^1$ |
| $3 : 7, 8, 11 \ldots\ldots\; B^2$ | $7 : 1, 3, 5 \ldots\ldots\; C^1$ | $11 : 3, 9, 12 \ldots\; C^1$ |
| $4 : 2, 5, 6 \ldots\ldots\; C^2$ | $8 : 1, 3, 6 \ldots\ldots\; B^2$ | $12 : 9, 10, 11 \ldots\; D$ |

Tato konfigurace není čistá, protože body *1*, *5*, *7* leží na přímce.

**12. Typ** $B_2^2C_6^1C_2^2D_2$, schema 381, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 8\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\8\ 6\ 7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 5\ 6\\4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

| | |
|---|---|
| $1 = (a, 1, a)$. | $7 = (0, 1, a+1)$, |
| $2 = (0, 1, 0)$, | $8 = (1, 1+a-a^2, 1+2a-a^3)$, |
| $3 = (1, 1, 1)$, | $9 = (1, 0, 0)$, |
| $4 = (1, a+1-a^2, a+a^2-a^3)$, | $10 = (1, a, a^2-1)$, |
| $5 = (1, 1, 0)$, | $11 = (a+1, a^4, 2a^2+a-a^4)$, |
| $6 = (a, 1, 1)$, | $12 = (0, 0, 1)$, |

kde pro $a$ platí rovnice $a^4+a^3-a^2-a-1 = 0$; $a_1 \in (-2, -1)$; $a_2 \in (1, 2)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $B^2$ | $5 : 1, 4, 6$ ....... $B^2$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 8, 10$ ...... $C^2$ | $6 : 2, 5, 8$ ....... $C^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 7, 11$ ...... $C^2$ | $7 : 1, 3, 4$ ....... $C^1$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 5, 7$ ....... $C^1$ | $8 : 1, 2, 6$ ....... $C^1$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**13. Typ** $B_2^2C_6^1C_2^2D_2$, schema 409, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 8\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\7\ 8\ 6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 5\ 6\\4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

| | |
|---|---|
| $1 = (1, 1, 1)$, | $4 = (3x+4, x^2+x+2, 3x+4)$, |
| $2 = (x+1, x, x)$, | $5 = (3x+4, x^2+x+2, x^3-x^2+4x+5)$, |
| $3 = (1, 0, 0)$, | $8 = (x^2-2x-2, 0, -x-5)$, |
| $6 = (1, 1, 0)$, | $7 = (x^2-2x-2, x^3-2x+5, -x-5)$, |
| $9 = (0, 1, 0)$, | $10 = (8x^2-2x^3+21x+18, x^3+6x^2+7x+10, 3x^2+19x+20)$, |
| $12 = (0, 0, 1)$, | $11 = (10x^2-5x^3+2x-18, 9x^2-3x^3-4x-15, 2x^2+9x-5)$, |

kde pro $x$ platí $x^4+5x+5 = 0$.[7])

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^1$ | $5 : 1, 3, 8$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 6, 10$ ...... $C^1$ | $6 : 2, 4, 7$ ....... $C^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 5, 7, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 3, 6$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 6, 8$ ....... $C^1$ | $8 : 1, 4, 5$ ....... $C^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

---

[7]) Původní podmínka $5a^4-15a^3+15a^2-5a+1 = 0$ přechází substitucí $a = \dfrac{x+1}{x}$ na tvar $x^4+5x+5 = 0$.

**14. Typ** $B_2^2 C_6^1 C_2^2 D_2$, schema 461, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\7&8&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1), & 7 &= (a^2, a, a-1), \\
2 &= (a, 1, 1), & 8 &= (a^2, 0, a-1), \\
3 &= (1, 0, 0), & 9 &= (0, 1, 0), \\
4 &= (a, 1-a, a), & 10 &= (2a^2-2a+1, a, a-1), \\
5 &= (a, 1-a, 1), & 11 &= (3a^2-a+1, 1, 3a-1), \\
6 &= (1, 1, 0), & 12 &= (0, 0, 1),
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $3a^3-5a^2+4a-1 = 0$; $a_1 \in (0, 1)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 3, 7$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 8, 10$ ...... $C^1$ | $6 : 2, 4, 8$ ....... $C^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 5, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 4, 5$ ....... $C^1$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 6, 7$ ....... $B^2$ | $8 : 1, 2, 6$ ....... $C^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**15. Typ** $B_2^2 C_4^1 C_4^2 D_2$, schema 319, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&8&7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&7&6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (a, 1, a), & 7 &= (0, a-1, a^2), \\
2 &= (0, 1, 0), & 8 &= (a^3+a+1, a, a^3-a^4+a+1), \\
3 &= (1, 1, 1), & 9 &= (1, 0, 0), \\
4 &= (a^3+a+1, a, a^2), & 10 &= (a^4-a^3+a^2+a, 2a-1, a^2), \\
5 &= (1, 1, 0), & 11 &= (a^3+a+1, a+1, a^3-a^4+a+1), \\
6 &= (a, 1, 1), & 12 &= (0, 0, 1),
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $a^5-2a^4+2a^3-a^2+1 = 0$; $a_1 \in (-1, 0)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^1$ | $5 : 1, 4, 7$ ....... $C^2$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 6, 10$ ...... $C^2$ | $6 : 2, 4, 8$ ....... $C^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 7, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 3, 5$ ....... $C^1$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 5, 6$ ....... $C^2$ | $8 : 1, 3, 6$ ....... $B^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**16. Typ** $B_2^2C_4^1C_4^2D_2$, schema 460, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\6\,7\,8\,5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\,4\,5\\7\,8\,6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\,5\,6\\4\,7\,8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}.$$

| | |
|---|---|
| $1 = (1, 1, 1)$ , | $7 = (b^2, 2, 2b)$ , |
| $2 = (b^2, 2, 2)$ , | $8 = (b, 0, 2)$ , |
| $3 = (1, 0, 0)$ | $9 = (0, 1, 0)$, |
| $4 = (1, 2-b, 1)$ , | $10 = (1+b^2, 2, 2b)$ , |
| $5 = (1, 2-b, 2b+2-2b^2)$ , | $11 = (b+2+b^2, 2, 2+2b)$ , |
| $6 = (1, 1, 0)$ , | $12 = (0, 0, 1)$ , |

kde pro $b$ platí $b^3-b-1 = 0$; $b_1 \in (1, 2)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 3, 8$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 8, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 2, 4, 7$ ....... $C^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 5, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 4, 6$ ....... $C^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 6, 7$ ....... $C^2$ | $8 : 1, 2, 5$ ....... $C^1$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**17. Typ** $B_2^2C_4^1C_4^2D_2$, schema 691, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\,2\,3\,4\\8\,6\,7\,5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\,4\,5\\8\,7\,6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\,5\,6\\4\,8\,7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\;10\\3\;11\end{matrix}}.$$

| | |
|---|---|
| $1 = (1, 1, x-xy)$ , | $7 = (x-xy, 1-x, x-xy)$ , |
| $2 = (0, 0, 1)$ , | $8 = (1, 1-x, x-xy)$ , |
| $3 = (1, 1, 1)$ , | $9 = (1, 0, 0)$ , |
| $4 = (1+x, 1, x-xy)$ , | $10 = (3-y, 2, 3-y + x-xy)$ , |
| $5 = (1 + x, 0, x-xy)$ , | $11 = (2x+2, 2, x-xy+2)$ , |
| $6 = (0, 1, 1)$ , | $12 = (0, 1, 0)$ , |

kde pro $x$, $y$ platí současně $x^2+x(y-1) + 1 = 0$, $y^2-5= 0$.[8])

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 6, 7$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 3, 7$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 7, 8, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 1, 4, 8$ ....... $C^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 5, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 2, 5$ ....... $C^1$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 6, 8$ ....... $C^2$ | $8 : 2, 4, 6$ ....... $C^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

Konfigurace není čistá, neboť body *1*, *5*, *7* leží na cizí přímce.

---

[8]) Podmínka pro $c$ vycházela $c^4-6c^3+10c^2-8c+4 = 0$. Provedl jsem substituci $c = 1 + x$ a toho jsem použil pro snadnější výpočet souřadnic konfiguračních bodů.

**18. Typ** $B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1E_1^2$, schema 301, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&8&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

| | | |
|---|---|---|
| $1 = (1, 2, 1)$, | $5 = (1, 1, 0)$, | $9 = (1, 0, 0)$, |
| $2 = (0, 1, 0)$, | $6 = (1, 2, 2)$, | $10 = (8, 14, 9)$, |
| $3 = (1, 1, 1)$, | $7 = (0, 2, 3)$, | $11 = (4, 6, 5)$, |
| $4 = (4, 10, 5)$, | $8 = (4, 10, 15)$, | $12 = (0, 0, 1)$, |

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ...... $B^2$ | $5 : 1, 4, 6$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 8, 10$ ...... $E^2$ | $6 : 2, 4, 5$ ....... $C^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 7, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 3, 4$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 5, 6, 7$ ....... $C^1$ | $8 : 1, 2, 3$ ....... $E^1$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

Tato konfigurace se dá konstruovat lineárně, právě tak jako konfigurace následující, protože u nich nenastává adjunkce irracionality (to znamená, že se dá konstruovat v projektivní rovině nad tělesem racionálních čísel). Je to konfigurace čistá a pro její nakreslení můžeme s výhodou použít incidencí (které jsem u první z konfigurací — schema 439 — nazval „náhodné"). Přímky *1—10—11, 3—5—12, 7—8—9* se totiž protínají v jednom bodě, právě tak jako přímky *3—5—12, 1—4—9, 6—7—11.*

**19. Typ** $B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_2^2$, schema 341, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&8&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

Tato konfigurace je dalším případem konfigurace, která se dá konstruovat lineárně (viz konfiguraci předchozí), neboť souřadnice konfiguračních bodů jsou:

| | | |
|---|---|---|
| $1 = (3, 2, 3)$ | $5 = (1, 1, 0)$ | $9 = (1, 0, 0)$ |
| $2 = (0, 1, 0)$ | $6 = (3, 2, 2)$ | $10 = (8, 6, 3)$ |
| $3 = (1, 1, 1)$, | $7 = (0, 2, 5)$ | $11 = (20, 14, 15)$ |
| $4 = (4, 2, 3)$ | $8 = (4, 2, 5)$ | $12 = (0, 0, 1)$ |

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 6, 7$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 8, 10$ ...... $E^2$ | $6 : 2, 4, 5$ ....... $B^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 4, 5$ ....... $C^1$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 6, 7$ ....... $B^2$ | $8 : 1, 2, 3$ ....... $E^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

Tři konfigurační přímky *6—7—11, 3—5—12, 1—4—9* se protínají v bodě, což je opět případ „náhodné" incidence. Tato okolnost je velmi výhodná při konstrukci.

**20. Typ** $B_2^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2E_1^1E_1^2$, schema 106, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\7&8&6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 0, 0)\,, & 7 &= (x-1, x-1, 2)\,,\\
2 &= (x+3, 2, 2)\,, & 8 &= (3x-3, x-3, 6)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (0, 1, 0)\,,\\
4 &= (x+3, 2, 0)\,, & 10 &= (x+5, 2, x-1)\,,\\
5 &= (x+3, x+1, 2)\,, & 11 &= (2, 1-x, x+1)\,,\\
6 &= (1, 0, 1)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

**kde** pro $x$ platí $x^2+3 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| *1* : *5, 7, 8* ....... $B^2$ | *5* : *1, 3, 4* ....... $B^2$ | *9* : *10, 11, 12* ... $D$ |
| *2* : *6, 8, 10* ...... $E^2$ | *6* : *2, 4, 7* ....... $C^2$ | *10* : *2, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *3* : *5, 8, 11* ...... $B^3$ | *7* : *1, 4, 6* ....... $C^1$ | *11* : *3, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *4* : *5, 6, 7* ....... $C^1$ | *8* : *1, 2, 3* ....... $E^1$ | *12* : *9, 10, 11* .... $D$ |

Konfigurace není čistá; body *4, 6, 7* leží na přímce.

**21. Typ** $B_4^1C_4^1C_1^2D_2E_1^2$, schema 134, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\5&8&7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&6\\7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 0, 0)\,, & 7 &= (at-a-t+2, at-a-t+2, 1)\,,\\
2 &= (a, 1, 1)\,, & 8 &= (at-a-t+2, -a, 1)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (0, 1, 0)\,,\\
4 &= (a, 1, 0)\,, & 10 &= (-t-a-at, a, 1)\,,\\
5 &= (a, a+t+at+2, 1)\,, & 11 &= (t+a-at, a, 1)\,,\\
6 &= (1, 0, 1)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

**kde** pro $a$, $t$ platí současně $a^2+ta+1 = 0$; $t^2-2 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| *1* : *5, 7, 8* ....... $C^2$ | *5* : *1, 6, 7* ....... $C^1$ | *9* : *10, 11, 12* ... $D$ |
| *2* : *6, 8, 10* ...... $B^1$ | *6* : *2, 4, 5* ....... $B^1$ | *10* : *2, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *3* : *4, 8, 11* ...... $B^1$ | *7* : *1, 4, 5* ....... $C^1$ | *11* : *3, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *4* : *3, 6, 7* ....... $B^1$ | *8* : *1, 2, 3* ....... $E^2$ | *12* : *9, 10, 11* .... $D$ |

**22. Typ** $B_3^1 B_1^2 C_2^1 C_3^2 D_2 E_1^1$, schema 421, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 8\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 6\\5\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 5\ 6\\4\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 4 &= (6a-5,\ 3a^3-16a^2+22a-8,\ 6a-5)\,,\\
2 &= (a, 1, 1)\,, & 5 &= (6a^2-5a,\ -9a^3+12a^2-6a-1,\ 6a-5)\,,\\
3 &= (1, 0, 0)\,, & 7 &= (6a^2-5a,\ 6a-5,\ 3a^2-4a+7)\,,\\
6 &= (1, 1, 0)\,, & 8 &= (6a^2-5a,\ 0,\ 3a^2-4a+7)\,,\\
9 &= (0, 1, 0)\,, & 10 &= (3a^2+2a+2,\ -3a^2+7a+2,\ 3a^2-4a+7)\,,\\
12 &= (0, 0, 1)\,, & 11 &= (3a^3+2a^2-4a+5,\ -3a^3+13a^2-9a+5,\ 3a^3-4a^2+7a)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $3a^4-7a^3+10a^2-2a+1 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 6, 7$ ....... $C^2$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 8, 10$ ...... $E^1$ | $6 : 2, 4, 5$ ....... $B^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 7, 11$ ...... $B^1$ | $7 : 1, 3, 5$ ....... $C^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 6, 8$ ....... $B^1$ | $8 : 1, 2, 4$ ....... $B^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**23. Typ** $B_2^1 B_2^2 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^2$, schema 359, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 5\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\7\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\8\ 7\ 6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
2 &= (0, 1, 0)\,, & 1 &= (2c^3-2c^2+c,\ c^3-c+1,\ 2c^3-2c^2+c)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 4 &= (c^4-c+1,\ c^3-c+1,\ 2c^3-2c^2+c)\,,\\
5 &= (1, 1, 0)\,, & 6 &= (2c^3-2c^2+c,\ c^3-c+1,\ c^3-c+1)\,,\\
7 &= (0, 1, c)\,, & 8 &= (c^4-c+1,\ c^3-c+1,\ c^4-c^2+c)\,,\\
9 &= (1, 0, 0)\,, & 10 &= (c^4-c+1,\ c^4-c^3+c^2-c+1,\ c^3-c+1)\,,\\
12 &= (0, 0, 1)\,, & 11 &= (c^4-c+1,\ 2c^3-2c^2+1,\ c^4-c^2+c)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $c$ platí $c^8-2c^7+3c^6-3c^5+2c^4-c^3+2c^2-2c+1 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^1$ | $5 : 1, 4, 7$ ....... $C^2$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 6, 10$ ...... $E^2$ | $6 : 2, 7, 8$ ....... $B^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 5, 6$ ....... $C^1$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 3, 5$ ....... $B^1$ | $8 : 1, 3, 6$ ....... $B^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**24. Typ** $B_1^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$, schema 223, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&7&4&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\5&7&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\6&8&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 1, 1)$, $7 = (2, 2c, c+x+2)$,
$2 = (2, 2, x+c+2)$, $8 = (2x, 2c, c+x+2)$,
$3 = (0, 0, 1)$, $9 = (1, 0, 0)$,
$4 = (0, 1, 1)$, $10 = (2x, 2, 2x+1-cx)$,
$5 = (2x, 2, x+c+2)$, $11 = (cx-1-2x, 2-c-x, c-2x-1)$,
$6 = (1, 0, 1)$, $12 = (0, 1, 0)$,

kde pro $c$, $x$ platí současně $c^2-2x-1 = 0$; $x^2+1 = 0$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *1 : 5, 7, 8* | $B^2$ | *5 : 1, 4, 6* | $C^1$ | *9 : 10, 11, 12* | $D$ |
| *2 : 4, 8, 10* | $B^1$ | *6 : 4, 5, 7* | $C^1$ | *10 : 2, 9, 12* | $C^1$ |
| *3 : 7, 8, 11* | $B^2$ | *7 : 1, 3, 6* | $B^2$ | *11 : 3, 9, 12* | $C^1$ |
| *4 : 2, 5, 6* | $C^2$ | *8 : 1, 2, 3* | $E^1$ | *12 : 9, 10, 11* | $D$ |

**25. Typ** $B_1^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$, schema 230, t. j.

$$\frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&7&4&8\end{matrix}},\quad \frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\5&8&7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 1, 1)$, $5 = (2a+1, 1, a)$, $9 = (1, 0, 0)$,
$2 = (1, 1, a)$, $6 = (1, 0, 1)$, $10 = (2a+1, 1, a+2)$,
$3 = (0, 0, 1)$, $7 = (1, -1, a)$, $11 = (a, a-2, a^2-2)$,
$4 = (0, 1, 1)$, $8 = (2a+1, -1, a)$, $12 = (0, 1, 0)$,

kde pro $a$ platí $a^3-a^2-a-1 = 0$ ; $a_1 \in (1, 2)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *1 : 5, 7, 8* | $B^2$ | *7 : 1, 3, 4* | $B^2$ |
| *2 : 6, 8, 10* | $B^1$ | *8 : 1, 2, 3* | $E^1$ |
| *3 : 7, 8, 11* | $B^2$ | *9 : 10, 11, 12* | $D$ |
| *4 : 5, 6, 7* | $C^1$ | *10 : 2, 9, 12* | $C^1$ |
| *5 : 1, 4, 6* | $C^1$ | *11 : 3, 9, 12* | $C^1$ |
| *6 : 2, 4, 5* | $C^2$ | *12 : 9, 10, 11* | $D$ |

**26. Typ** $B_1^1 B_3^2 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^1$, schema 310, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{matrix}}, \quad \frac{12}{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 5 & 8 \end{matrix}}, \quad \frac{10}{\begin{matrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \end{matrix}}, \quad \frac{11}{\begin{matrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{matrix}}, \quad \frac{1}{\begin{matrix} 2 & 10 \\ 3 & 11 \end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned} 1 &= (a, 1, a), & 7 &= (0, 1, 2), \\ 2 &= (0, 1, 0), & 8 &= (5a - 2, 2, 4), \\ 3 &= (1, 1, 1), & 9 &= (1, 0, 0), \\ 4 &= (5a - 2, 2, 2a), & 10 &= (3a + 2, 4 - 2a, 4), \\ 5 &= (1, 1, 0), & 11 &= (4a, 4a + 1, 2), \\ 6 &= (a, 1, 1), & 12 &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $4a^2 - 5a + 2 = 0$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ | $B^2$ | $5 : 1, 4, 6$ | $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ | $D$ |
| $2 : 6, 8, 10$ | $B^1$ | $6 : 2, 4, 5$ | $C^2$ | $10 : 2, 9, 12$ | $C^1$ |
| $3 : 7, 8, 11$ | $B^2$ | $7 : 1, 3, 4$ | $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ | $C^1$ |
| $4 : 5, 6, 7$ | $C^1$ | $8 : 1, 2, 3$ | $E^1$ | $12 : 9, 10, 11$ | $D$ |

**27. Typ** $B_1^1 B_3^2 C_2^1 C_3^2 D_2 E_1^2$, schema 194, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{matrix}}, \quad \frac{12}{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 7 & 8 \end{matrix}}, \quad \frac{10}{\begin{matrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 6 \end{matrix}}, \quad \frac{11}{\begin{matrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 8 \end{matrix}}, \quad \frac{1}{\begin{matrix} 2 & 10 \\ 3 & 11 \end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 0, 0), \; 2 = (a, 1, 1), \; 3 = (1, 1, 1); \; 4 = (a, 1, 0), \\ 5 &= (5a^3 - 5a^2 + 2a, 5a^4 - a^5 - 5a^3 + 2a^2 + 1, 5a^2 - 5a + 2), \; 6 = (1, 0, 1), \\ 7 &= (5a^3 - 5a^2 + 2a, 5a^3 - 5a^2 + 2a, -a^6 + 4a^5 - 6a^4 + 6a^3 - a^2 - 3a + 2), \\ 8 &= (5a^3 - 5a^2 + 2a, -a^5 + 5a^4 - 5a^3 + 2a^2 + 1, \\ &\quad -a^6 + 4a^5 - 6a^4 + 6a^3 - a^2 - 3a + 2), \\ 9 &= (0, 1, 0), \\ 10 &= (5a^2 - 5a + 2, -a^7 + 3a^6 - 5a^4 - a^2 - 2, \\ &\quad a^7 - 4a^6 + a^5 + 13a^4 - 12a^3 - 2a^2 + 4a - 3), \\ 11 &= (a^7 - 4a^6 + 5a^5 + 3a^4 - 5a^3 + a^2 - a, a^5 - 1, 5a^3 - 5a^2 + 2a), \\ 12 &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $a^8 - 5a^7 + 7a^6 + 3a^5 - 14a^4 + 12a^3 - 3a^2 - a + 1 = 0$; $a_1 \in (-2, -1)$; $a_2 \in (-1, 0)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ | $C^2$ | $5 : 1, 3, 7$ | $C^2$ | $9 : 10, 11, 12$ | $D$ |
| $2 : 6, 8, 10$ | $B^1$ | $6 : 2, 4, 7$ | $B^2$ | $10 : 2, 9, 12$ | $C^1$ |
| $3 : 4, 5, 11$ | $E^2$ | $7 : 1, 5, 6$ | $C^2$ | $11 : 3, 9, 12$ | $C^1$ |
| $4 : 3, 6, 8$ | $B^2$ | $8 : 1, 2, 4$ | $B^2$ | $12 : 9, 10, 11$ | $D$ |

**28. Typ** $B_4^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$, schema 462, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\7&8&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\6&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, 1), && 7 = (10c - 4, 5c - 2, 4),\\
&2 = (2, 1, 1), && 8 = (5c - 2, 0, 2),\\
&3 = (1, 0, 0), && 9 = (0, 1, 0),\\
&4 = (2, c, 2), && 10 = (c + 6, 5c - 2, 4),\\
&5 = (2, c, 1), && 11 = (17c - 12, 5c - 4, 12c - 8),\\
&6 = (1, 1, 0), && 12 = (0, 0, 1),
\end{aligned}$$

kde pro $c$ platí $4c^2-5c+2 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| *1* : *5, 7, 8* ....... $C^1$ | *5* : *1, 3, 7* ....... $C^2$ | *9* : *10, 11, 12* .... $D$ |
| *2* : *4, 8, 10* ...... $E^1$ | *6* : *4, 7, 8* ....... $B^2$ | *10* : *2, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *3* : *4, 5, 11* ...... $B^2$ | *7* : *1, 5, 6* ....... $C^1$ | *11* : *3, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *4* : *2, 3, 6* ....... $B^2$ | *8* : *1, 2, 6* ....... $B^2$ | *12* : *9, 10, 11* .... $D$ |

**29. Typ** $B_4^2C_4^1C_1^2D_2E_1^2$, schema 357, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\7&6&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&6\\8&5&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (2c^3-c^2+c-3.\ 1,\ 2c^3-c^2+c-3)\ , && 7 = (0, 1, c)\ ,\\
&2 = (0, 1, 0)\ , && 8 = (c+1, 1, c)\ ,\\
&3 = (1, 1, 1)\ , && 9 = (1, 0, 0)\ ,\\
&4 = (c+1, 1, 2c^3-c^2+c-3)\ , && 10 = (c+1, c, 1)\ ,\\
&5 = (1, 1, 0)\ , && 11 = (11c+11, 2c^3-7c^2+8c+12, 11c)\ ,\\
&6 = (2c^3-c^2+c-3, 1, 1)\ , && 12 = (0, 0, 1)\ ,
\end{aligned}$$

kde pro $c$ platí rovnice $c^4-2c-1 = 0$; $c_1 \in (-1, 0)$; $c_2 \in (1, 2)$.

| | | |
|---|---|---|
| *1* : *5, 7, 8* ....... $C^1$ | *5* : *1, 6, 7* ....... $C^1$ | *9* : *10, 11, 12* ... $D$ |
| *2* : *4, 6, 10* ...... $E^2$ | *6* : *2, 5, 8* ....... $B^2$ | *10* : *2, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *3* : *4, 8, 11* ...... $B^2$ | *7* : *1, 4, 5* ....... $C^2$ | *11* : *3, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *4* : *2, 3, 7* ....... $B^2$ | *8* : *1, 3, 6* ....... $B^2$ | *12* : *9, 10, 11* .... $D$ |

**30. Typ** $B_4^2C_4^1C_1^2D_2E_1^2$, schema 507, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\8&6&5&7\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&6\\8&5&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$1 = (2, x + 3, 2)$, $\quad 7 = (2, 3x - 7, -8)$,
$2 = (0, 1, 0)$, $\quad 8 = (2, x + 3, 2x + 2)$,
$3 = (1, 1, 1)$, $\quad 9 = (1, 0, 0)$,
$4 = (-x - 1, 2x + 6, 4)$, $\quad 10 = (3x + 3, 12, 8)$,
$5 = (1, 1, 0)$, $\quad 11 = (2, 5x + 3, 2x + 2)$,
$6 = (0, 1, 1)$, $\quad 12 = (0, 0, 1)$,

kde pro $x$ platí $3x^2+5 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 6, 7$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 6, 8$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 7, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 1, 4, 5$ ....... $C^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 7, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 2, 3$ ....... $E^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 6, 8$ ....... $B^2$ | $8 : 3, 4, 5$ ....... $B^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**31. Typ** $B_3^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2E_1^1$, schema 302, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\6&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 2, 1)$, $\quad 7 = (0, 1, c)$,
$2 = (0, 1, 0)$, $\quad 8 = (3c-1-c^2, 2, 2c)$,
$3 = (1, 1, 1)$, $\quad 9 = (1, 0, 0)$,
$4 = (3c-1-c^2, 2, 1)$, $\quad 10 = (1, 2c^2-9c+13, c^2-4c+6)$,
$5 = (1, 1, 0)$, $\quad 11 = (1, c^2-4c+6, 2)$,
$6 = (1, 2, 2)$, $\quad 12 = (0, 0, 1)$,

kde pro $c$ platí rovnice $c^3-5c^2+8c-3 = 0$; $c_1 \in (0, 1)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $B^2$ | $5 : 1, 4, 6$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 8, 10$ ...... $B^3$ | $6 : 4, 5, 7$ ....... $C^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 7, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 3, 6$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 5, 6$ ....... $C^2$ | $8 : 1, 2, 3$ ....... $E^1$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**32. Typ** $B_3^2 B_1^3 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^1$, schema 459, t. j.

$$\frac{9}{\begin{smallmatrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{12}{\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{smallmatrix}},\quad \frac{10}{\begin{smallmatrix}3&4&5\\7&6&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{11}{\begin{smallmatrix}2&4&5\\8&7&6\end{smallmatrix}},\quad \frac{1}{\begin{smallmatrix}2&10\\3&11\end{smallmatrix}}.$$

$1 = (1, 1, 1)$, $2 = (a, 1, 1)$, $3 = (1, 0, 0)$,
$4 = (a^5-2a^4+a^3+4a^2-3a,\ a^4-7a^3+16a^2-12a+3,\ a^5-2a^4+a^3+4a^2-3a)$,
$5 = (a^5-2a^4+a^3+4a^2-3a,\ a^4-7a^3+16a^2-12a+3,\ a^4-2a^3+a^2+4a-3)$,
$6 = (1, 1, 0)$,
$7 = (a^5-2a^4+6a^3-6a^2+3a,\ a^4-2a^3+6a^2-6a+3,\ 2a^4-4a^3+7a^2-2a)$,
$8 = (a^4-2a^3+6a^2-6a+3,\ 0,\ 2a^3-4a^2+7a-2)$, $9 = (0, 1, 0)$,
$10 = (3a^4-8a^3+12a^2-5a-1,\ a^4-2a^3+a^2+4a-3,$
$a^5-5a^4+17a^3-28a^2+27a-11)$,
$11 = (a^5-4a^4+5a^3+2a^2-11a+6,\ a^4-4a^3+10a^2-13a+5,\ 1-3a^2)$,
$12 = (0, 0, 1)$,

kde pro $a$ platí rovnice $a^6-7a^5+24a^4-43a^3+51a^2-36a+11 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1: 5, 7, 8$ ....... $C^1$ | $5: 1, 3, 7$ ....... $C^2$ | $9: 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2: 4, 6, 10$ ...... $E^1$ | $6: 2, 7, 8$ ....... $B^2$ | $10: 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3: 4, 5, 11$ ...... $B^2$ | $7: 1, 5, 6$ ....... $C^1$ | $11: 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4: 2, 3, 8$ ....... $B^3$ | $8: 1, 4, 6$ ....... $B^2$ | $12: 9, 10, 11$ .... $D$ |

**33. Typ** $B_3^2 B_1^3 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^2$, schema 372, t. j.

$$\frac{9}{\begin{smallmatrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{12}{\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{10}{\begin{smallmatrix}3&4&6\\8&5&7\end{smallmatrix}},\quad \frac{11}{\begin{smallmatrix}2&4&5\\6&7&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{1}{\begin{smallmatrix}2&10\\3&11\end{smallmatrix}}.$$

$1 = (a, 1, a)$, $7 = (0,\ 2a^2-a^4-a-2,\ 3)$,
$2 = (0, 1, 0)$, $8 = (a^4-3a^3+a^2+a+2,\ 2a^2-a^4-a-2,\ 3)$,
$3 = (1, 1, 1)$, $4 = (3a^3-2a^4+a^2+a-4,\ 3,\ 3a)$,
$9 = (1, 0, 0)$, $10 = (a^4-3a^3+a^2+a+5,\ 8a^4-15a^3+5a^2-7a+25,\ 3)$,
$5 = (1, 1, 0)$, $11 = (3a,\ 3a^3-2a^4+a^2+a-4,\ 3)$,
$6 = (a, 1, 1)$, $12 = (0, 0, 1)$,

kde pro $a$ platí rovnice $a^5-2a^4+a^3-a^2+3a-1 = 0$; $a_1 \in (0, 1)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1: 5, 7, 8$ ....... $C^1$ | $5: 1, 6, 7$ ....... $C^1$ | $9: 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2: 4, 8, 10$ ...... $B^3$ | $6: 4, 5, 8$ ....... $B^2$ | $10: 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3: 4, 7, 11$ ...... $E^2$ | $7: 1, 3, 5$ ....... $C^2$ | $11: 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4: 2, 3, 6$ ....... $B^2$ | $8: 1, 2, 6$ ....... $B^2$ | $12: 9, 10, 11$ .... $D$ |

**34. Typ** $B_3^2 B_1^3 C_4^1 C_1^2 D_2 E_1^2$, schema 601, t. j.

$$\frac{9}{\substack{1\;2\;3\;7\\4\;5\;6\;8}},\quad \frac{12}{\substack{1\;2\;3\;4\\8\;6\;7\;5}},\quad \frac{10}{\substack{3\;5\;6\\4\;7\;8}},\quad \frac{11}{\substack{2\;5\;6\\4\;8\;7}},\quad \frac{1}{\substack{2\;10\\3\;11}}.$$

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 1, x+1)\,, & 7 &= (x+1, -1-2x, x+1)\,,\\ 2 &= (0, 0, 1)\,, & 8 &= (1, -1-2x, x+1)\,,\\ 3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\ 4 &= (5x-12x^2+10, 2, 2x+2)\,, & 10 &= (2, 4x^2+x, 4x^2+7x+4)\,,\\ 5 &= (5x-12x^2+10, 0, 2x+2)\,, & 11 &= (3x-4x^2+4, 2x+2, 6x+4)\,,\\ 6 &= (0, 1, 1)\,, & 12 &= (0, 1, 0)\,, \end{aligned}$$

kde pro $x$ platí rovnice $4x^3+x^2-4x-2 = 0$; $x_1 \in (1, 2)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 6, 7$ ....... $C^1$ | $5 : 1, 3, 6$ ....... $C^2$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 7, 8, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 1, 4, 5$ ....... $C^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 5, 8, 11$ ...... $E^2$ | $7 : 1, 2, 4$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 6, 7, 8$ ....... $B^2$ | $8 : 2, 3, 4$ ....... $B^3$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**35. Typ** $B_2^1 B_3^2 C_4^1 C_1^2 D_2$, schema 398, t. j.

$$\frac{9}{\substack{1\;2\;3\;7\\4\;5\;6\;8}},\quad \frac{12}{\substack{1\;2\;3\;4\\6\;7\;5\;8}},\quad \frac{10}{\substack{3\;4\;5\\8\;7\;6}},\quad \frac{11}{\substack{2\;4\;5\\8\;6\;7}},\quad \frac{1}{\substack{2\;10\\3\;11}}.$$

$1 = (a, 1, a)$, $2 = (0, 1, 0)$, $3 = (1, 1, 1)$,
$4 = (2a^2-2a^3-2a+1, a^2-4a+2, a^3-4a^2+2a)$, $5 = (1, 1, 0)$,
$6 = (a, 1, 1)$, $7 = (0, a^2-4a+2, a^4-2a^5-3a^3+5a^2-7a+3)$,
$8 = (2a^2-2a^3-2a+1, a^2-4a+2, a^4-2a^5-3a^3+5a^2-7a+3)$, $9 = (1, 0, 0)$,
$10 = (4a^4-6a^3+6a^2-4a+1, 2a^4-3a^3+7a^2-7a+2, 2a^3-a^2-2a+1)$,
$11 = (2a^3-2a^2+2a-1, 2a^3-3a^2+6a-3, 2a^5-a^4+3a^3-5a^2+7a-3)$,
$12 = (0, 0, 1)$,

kde pro $a$ platí rovnice $2a^6-3a^5+6a^4-12a^3+15a^2-9a+2 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^1$ | $5 : 1, 4, 8$ ....... $C^2$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 6, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 2, 7, 8$ ....... $B^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 7, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 3, 6$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 3, 5$ ....... $B^1$ | $8 : 1, 5, 6$ ....... $C^1$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**36. Typ** $B_2^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2$, schema 423, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 8\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 6\\5\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\6\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, 1)\,, && 4 = (a^4-3a^3+3a^2-3a+1,\ a^3-2a^2,\ a^4-3a^3+3a^2-3a+1)\,,\\
&2 = (a, 1, 1)\,, && 5 = (a^5-3a^4+3a^3-3a^2+a,\ a^4-2a^3,\\
& && \quad a^4-3a^3+3a^2-3a+1)\,,\\
&3 = (1, 0, 0)\,, && 7 = (a^5-2a^4+a^2-a,\ a^4-2a^3+a-1,\ a^4-2a^3+a^2-a)\,,\\
&6 = (1, 1, 0)\,, && 8 = (a^4-2a^3+a-1,\ 0,\ a^3-2a^2+a-1)\,,\\
&9 = (0, 1, 0)\,, && 10 = (2a^4-7a^3+7a^2-4a+1,\ a^5-2a^4,\\
& && \quad a^5-3a^4+3a^3-3a^2+a)\,,\\
&12 = (0, 0, 1)\,, && 11 = (a^3-2a^2+2a,\ 1,\ a^2-a+1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí rovnice $a^9-4a^8+3a^7+8a^6-23a^5+33a^4-29a^3+17a^2-6a+1 = 0$; $a_1 \in (-3, -2)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^1$ | $5 : 1, 6, 8$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 8, 10$ ...... $B^1$ | $6 : 4, 5, 7$ ....... $B^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 7, 11$ ...... $B^1$ | $7 : 1, 3, 6$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 3, 6$ ....... $B^2$ | $8 : 1, 2, 5$ ....... $C^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**37. Typ** $B_2^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2$, schema 428, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 8\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 6\\5\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\8\ 6\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, 1)\,, && 7 = (a,\ 1,\ -a^6+4a^5-6a^4+6a^3-5a^2+3a-1)\,,\\
&2 = (a, 1, 1)\,, && 8 = (1,\ 0,\ -a^6+3a^5-3a^4+3a^3-3a^2+a-1)\,,\\
&3 = (1, 0, 0)\,, && 9 = (0, 1, 0)\,,\\
&4 = (a^2, a-1, a^2)\,, && 10 = (-a^6+4a^5-7a^4+8a^3-6a^2+4a-2,\ a-1,\ a)\,,\\
&5 = (a^2, a-1, a)\,, && 11 = (a+1,\ 1,\ -a^6+3a^5-3a^4+3a^3-3a^2+a)\,,\\
&6 = (1, 1, 0)\,, && 12 = (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí rovnice $a^7-4a^6+7a^5-9a^4+9a^3-6a^2+4a-1 = 0$; $a_1 \in (0, 1)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^1$ | $5 : 1, 6, 8$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 6, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 2, 5, 7$ ....... $B^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 7, 11$ ...... $B^1$ | $7 : 1, 3, 6$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 3, 8$ ....... $B^2$ | $8 : 1, 4, 5$ ....... $C^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**38.** **Typ** $B_1^1B_4^2C_4^1C_1^2D_2$, schema 686, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\8&6&7&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\8&6&7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\7&8&6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, x+1),\ 2 = (0, 0, 1),\ 3 = (1, 1, 1)\,,\\
4 &= (2x^5-5x^4-3x^3+4x^2+4x,\ 4x^5-x^6-2x^4-8x^3+4x^2+3x+1\,,\\
&\quad -x^7+3x^6+2x^5-10x^4-4x^3+7x^2+4x+1)\,,\\
5 &= (2x^5-5x^4-3x^3+4x^2+4x,\ 0,\ 3x^6-x^7+2x^5-10x^4-4x^3+7x^2+4x+1)\,,\\
6 &= (0, 1, 1),\\
7 &= (3x^4-2x^5+8x^3-x^2-8x-4,\ x^5-2x^4-x^3+4x^2-x-3\,,\\
&\quad 3x^4-2x^5+8x^3-x^2-8x-4)\,,\\
8 &= (5x^3-2x^4+3x^2-4x-4,\ x^5-2x^4-x^3+4x^2-x-3\,,\\
&\quad 3x^4-2x^5+8x^3-x^2-8x-4)\,,\\
10 &= (7x^9-22x^8-4x^7+46x^6+8x^5-36x^4-21x^3+4x^2+14x+6\,,\\
&\quad 3x^8-8x^7-11x^6+33x^5+6x^4-22x^3-10x^2+5x+3\,,\\
&\quad 17x^8-x^9-31x^7-47x^6+67x^5+59x^4-33x^3-29x^2-3x-2)\,,\\
11 &= (3x^4-2x^5+8x^3-x^2-8x-4,\ x^5-2x^4-x^3+4x^2-x-3,\\
&\quad x^9-3x^8-3x^7+11x^6+5x^5-10x^4+5x^2-6x-5)\,,\\
9 &= (1, 0, 0)\,,\\
12 &= (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $x$ platí

$x^{10}-3x^9-4x^8+13x^7+9x^6-16x^5-13x^4+4x^3+6x^2+3x+1=0$; $x_1 \in (-2, -1)$; $x_2 \in (-1, 0)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1: 5, 6, 7$ | $C^1$ | $5: 1, 3, 8$ | $B^2$ | $9: 10, 11, 12$ | $D$ |
| $2: 4, 8, 10$ | $B^2$ | $6: 1, 7, 8$ | $C^1$ | $10: 2, 9, 12$ | $C^1$ |
| $3: 4, 5, 11$ | $B^2$ | $7: 1, 4, 6$ | $C^2$ | $11: 3, 9, 12$ | $C^1$ |
| $4: 2, 3, 7$ | $B^2$ | $8: 2, 5, 6$ | $B^1$ | $12: 9, 10, 11$ | $D$ |

**39.** **Typ** $B_1^1B_4^2C_2^1C_3^2D_2$, schema 690, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\8&6&7&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\8&7&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, a),\ 2 = (0, 0, 1),\ 3 = (1, 1, 1)\,,\\
4 &= (a^6-3a^5+a^4+a^3+a^2,\ -a^4+2a^3-a+1,\ -a^5+2a^4-a^2+a)\,,\\
5 &= (a^5-3a^4+a^3+a^2+a,\ 0,\ -a^4+2a^3-a+1),\ 6 = (0, 1, 1)\,,\\
7 &= (a^3-3a^2+a-1,\ a^4-3a^3+3a^2-2a-1\,,\ a^3-3a^2+a-1)\,,\\
8 &= (a^3-3a^2+a-1,\ a^5-3a^4+3a^3-2a^2-a,\ a^4-3a^3+a^2-a)\,,
\end{aligned}$$

$9 = (1, 0, 0)$,

$10 = (-a^7+7a^6-17a^5+19a^4-15a^3+9a^2-3a+1\ ,$
$a^8-5a^7+11a^6-15a^5+13a^4-11a^3+10a^2-5a+2\ ,$
$2a^6-10a^5+17a^4-17a^3+13a^2-5a+2)\ ,$

$11 = (-a^7+6a^6-11a^5+6a^4-2a^3+3a^2+1\ ,$
$a^8-5a^7+8a^6-3a^5+6a^3-5a^4-3a^2+7a-2\ ,$
$2a^6-9a^5+13a^4-9a^3+3a^2+4a-1)\ ,$

$12 = (0, 1, 0)\ ,$

kde pro $a$ platí $a^9-6a^8+14a^7-18a^6+18a^5-19a^4+18a^3-9a^2+3a-1 = 0$, $a_1 \in (0, 1)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 6, 7$ ....... $C^2$ | $5 : 1, 3, 8$ ....... $B^2$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 7, 8, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 1, 4, 7$ ....... $C^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 5, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 2, 6$ ....... $C^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 6, 8$ ....... $B^2$ | $8 : 2, 4, 5$ ....... $B^1$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**40. Typ** $B_1^1B_3^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$, schema 610, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\8\ 6\ 7\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\4\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 5\ 6\\4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}\ .$$

$1 = (1, 1, x+1)\ ,$ $7 = (x^2-1, x^3+x+1, x^2-1)\ ,$
$2 = (0, 0, 1)\ ,$ $8 = (x-1, x^3+x+1, x^2-1)\ ,$
$3 = (1, 1, 1)\ ,$ $9 = (1, 0, 0)\ ,$
$4 = (x-1, x, x^2+x)\ ,$ $10 = (x^3-x, x^4+x^2-1, x^3-2x-1)\ ,$
$5 = (x-1, 0, x^2+x)\ ,$ $11 = (x-1, x, x^2-2-x^3)\ ,$
$6 = (0, 1, 1)\ ,$ $12 = (0, 1, 0)\ ,$

kde pro $x$ platí $x^5-x^4+2x^3+2 = 0$; $x_1 \in (-1, 0)$ .

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 6, 7$ ....... $C^1$ | $5 : 1, 3, 6$ ....... $C^2$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 7, 8, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 1, 4, 5$ ....... $C^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 5, 8, 11$ ...... $B^1$ | $7 : 1, 2, 4$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 6, 7, 8$ ....... $B^2$ | $8 : 2, 3, 4$ ....... $B^3$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**41. Typ** $B_1^1B_3^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$, schema 639, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\8\ 6\ 7\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 6\\5\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\8\ 7\ 6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}\ .$$

$1 = (1, 1, x+1)$, $2 = (1, 0, 1)$, $3 = (1, 1, 1)$ ,
$4 = (-x^5-2x^4-3x^3-4x^2-3x-1, x^5-3x^4-3x^3-x^2, x^6-2x^5-6x^4-4x^3-x^2)$ ,
$5 = (x^4+x^3+2x^2+2x+1, 0, 3x^4-x^5+3x^3+x^2)$ , $6 = (0, 1, 1)$ ,

$7 = (x^5+3x^4+x^3-2x^2-x,\ x^4+x^3+2x^2+2x+1,\ x^5+3x^4+x^3-2x^2-x)$ ,
$8 = (x^4+2x^3-x^2-x,\ x^4+x^3+2x^2+2x+1,\ x^5+3x^4+x^3-2x^2-x)$ ,
$9 = (1, 0, 0)$,
$10 = (x^6-x^7+10x^5+5x^4-4x^3-4x^2-x,\ x^7-x^8+4x^5-4x^3+x^2+2x+1,$
$x^8-6x^7+6x^6+21x^5-4x^4-17x^3-4x^2+3x+2)$,
$11 = (5x^7-2x^8-x^6-13x^5+x^4+5x^3-6x^2-9x-3,\ x^6-4x^5+x^4+x^3-8x^2-7x-2$
$6x^7-2x^8-2x^6-16x^5+x^4+6x^3-11x^2-12x-4)$ , $12 = (0, 1, 0)$ ,

kde pro $x$ platí $x^9-2x^8-x^7+7x^6+x^5-5x^4+x^3+6x^2+4x+1=0$; $x_1 \in (-2, -1)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 6, 5, 7$ ....... $C^1$ | $5 : 1, 7, 8$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 7, 10$ ...... $B^1$ | $6 : 1, 4, 8$ ....... $B^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 2, 5$ ....... $C^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 3, 6$ ....... $B^2$ | $8 : 3, 5, 6$ ....... $B^3$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**42. Typ** $B_4^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$, schema 348, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&6&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$1 = (2, x-xy+2, 2)$ , $7 = (0, xy-2y+3x-4, 2)$ ,
$2 = (0, 1, 0)$ , $8 = (xy+2x-y-1, xy-2y+3x-4, 2)$ ,
$3 = (1, 1, 1)$ , $9 = (1, 0, 0)$ ,
$4 = (1-y-xy, 2+x-xy, 2)$ , $10 = (xy+2x+2y+4, xy+3x+3y+5, 2)$ ,
$5 = (1, 1, 0)$ , $11 = (xy+2x-y-1, 5x+2xy-3y-5, 2)$ ,
$6 = (x+y+1, 2, 2)$ , $12 = (0, 0, 1)$ ,

kde pro $x$, $y$ platí $x^2-2=0$, $y^2-3=0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $C^1$ | $5 : 1, 6, 8$ ....... $C^1$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 6, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 2, 5, 7$ ....... $B^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 4, 6$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 3, 7$ ....... $B^3$ | $8 : 1, 3, 5$ ....... $C^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**43. Typ** $B_4^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$, schema 468, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\7&8&6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&6&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 1, 1)$, $2 = (x+1, 1, 1)$, $3 = (1, 0, 0)$, $12 = (0, 0, 1)$ ,
$4 = (5x^4+8x^3-x^2-4x,\ x^4+11x^3+x^2-4x+1,\ 5x^4+8x^3-x^2-4x)$ ,
$5 = (5x^4+8x^3-x^2-4x,\ x^4+11x^3+x^2-4x+1,\ 5x^3+3x^2-4x)$ , $6 = (1, 1, 0)$ ,
$7 = (5x^4+13x^3+7x^2-5x-4,\ 5x^3+8x^2-x-4,\ x^4+3x^3-x^2-7x-5)$ ,

$8 = (5x^4+13x^3+7x^2-5x-4,\ 0,\ x^4+3x^3-x^2-7x-5)$ , $9 = (0, 1, 0)$ ,
$10 = (x^7+4x^6+15x^5+21x^4+11x^3-3x^2-9x-5,\ 5x^3+8x^2-x-4,$
$x^4+3x^3-x^2-7x-5)$ ,
$11 = (-x^5-2x^4+4x^3+x^2-5x-1,\ 5x^3+3x^2-4x,$
$-x^7-x^6-5x^5+11x^4+21x^3-x^2-9x+2)$ ,

kde pro $x$ platí $x^8+3x^7+10x^6+6x^5-10x^4-8x^3+3x^2+x-1 = 0$; $x_1 \in (-1, 0)$; $x_2 \in (0, 1)$.

| | | |
|---|---|---|
| *1* : *5, 7, 8* ....... $C^1$ | *5* : *1, 3, 8* ....... $C^2$ | *9* : *10, 11, 12* ... $D$ |
| *2* : *4, 6, 10* ...... $B^2$ | *6* : *2, 7, 8* ....... $B^2$ | *10* : *2, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *3* : *4, 5, 11* ...... $B^2$ | *7* : *1, 4, 6* ....... $B^2$ | *11* : *3, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *4* : *2, 3, 7* ....... $B^3$ | *8* : *1, 5, 6* ....... $C^1$ | *12* : *9, 10, 11* .... $D$ |

**44. Typ** $B_4^2 B_1^3 C_4^1 C_1^2 D_2$, schema 506, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\8\ 6\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\7\ 8\ 6\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, a, 1)$ , $7 = (4a-a^2-2,\ a^2-3a+2,\ 1)$ ,
$2 = (0, 1, 0)$ , $8 = (2a^2-7a+3,\ a^2-3a+2,\ 1)$ ,
$3 = (1, 1, 1)$ , $9 = (1, 0, 0)$ ,
$4 = (1,\ a^2-2a,\ a-2)$ , $10 = (3a^2-11a+4,\ a^2-4a,\ -1)$ ,
$5 = (1, 1, 0)$ , $11 = (a-1,\ 2a-1,\ a)$ ,
$6 = (0, 1, 1)$ , $12 = (0, 0, 1)$ ,

kde pro $a$ platí $a^3-4a^2+3a-1 = 0$; $a_1 \in (3, 4)$.

| | | |
|---|---|---|
| *1* : *5, 6, 7* ....... $C^1$ | *5* : *1, 4, 8* ....... $B^2$ | *9* : *10, 11, 12* ... $D$ |
| *2* : *4, 8, 10* ...... $B^3$ | *6* : *1, 4, 7* ....... $C^1$ | *10* : *2, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *3* : *7, 8, 11* ...... $B^2$ | *7* : *1, 3, 6* ....... $C^2$ | *11* : *3, 9, 12* ..... $C^1$ |
| *4* : *2, 5, 6* ....... $B^2$ | *8* : *2, 3, 5* ....... $B^2$ | *12* : *9, 10, 11* .... $D$ |

Tato konfigurace není čistá, neboť body *1, 6, 7* leží na přímce.

**45. Typ** $B_4^2 B_1^3 C_4^1 C_1^2 D_2$, schema 567, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\8\ 6\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\7\ 8\ 6\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 6\\8\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$1 = (1,\ 2-x^3-x,\ 1)$ , $7 = (x^3-1,\ x^3+x-2,\ x^4+x^3+x^2-1)$ ,
$2 = (0, 1, 0)$ , $8 = (1,\ 2-x-x^3,\ 1-x^4-x^3-x^2)$ ,
$3 = (1, 1, 1)$ , $9 = (1, 0, 0)$ ,
$4 = (1-x^3,\ 2-x^3-x,\ 1)$ , $10 = (x^4+x^2-x+1,\ x^4+x^2-2x+2,\ 1-x)$ ,
$5 = (1, 1, 0)$ , $11 = (1,\ x^5-x^2-x+2,\ 1-x^4-x^3-x^2)$ ,
$6 = (0, 1, 1)$ , $12 = (0, 0, 1)$ ,

kde pro $x$ platí $x^6+x^5+x^4-x^3-x^2+1 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1:5, 6, 7$ ....... $C^1$ | $5:1, 7, 8$ ....... $C^1$ | $9:10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2:4, 7, 10$ ...... $B^2$ | $6:1, 4, 8$ ....... $B^2$ | $10:2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3:4, 8, 11$ ...... $B^3$ | $7:1, 2, 5$ ....... $C^2$ | $11:3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4:2, 3, 6$ ....... $B^2$ | $8:3, 5, 6$ ....... $B^2$ | $12:9, 10, 11$ .... $D$ |

**46. Typ** $B_3^2B_2^4C_4^1C_1^2D_2$, schema 402, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\ \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 8\ 5\end{matrix}},\ \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\4\ 7\ 8\end{matrix}},\ \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\6\ 7\ 8\end{matrix}},\ \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, 1), && 4 = (2b^2-9b+8, 2b^2-8b+6, 2b^2-9b+8),\\
&2 = (2, 1, 1), && 5 = (4b^2-18b+16, 4b^2-16b+12, 2b^2-9b+8),\\
&3 = (1, 0, 0), && 10 = (2b^3-4b^2-12b+16, 2b^3-8b^2+6b, 2b^3-9b^2+8b),\\
&6 = (1, 1, 0), && 11 = (9b^2-38b+32, 5b^2-20b+16, 4b^2-18b+16),\\
&7 = (2, 1, b), && 8 = (2, 0, b),\\
&9 = (0, 1, 0), && 12 = (0, 0, 1),
\end{aligned}$$

kde pro $b$ platí $8b^4-61b^3+160b^2-168b+64 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1:5, 7, 8$ ....... $B^2$ | $5:1, 3, 6$ ....... $B^4$ | $9:10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2:4, 8, 10$ ...... $C^1$ | $6:4, 5, 7$ ....... $B^2$ | $10:2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3:5, 7, 11$ ...... $B^2$ | $7:1, 3, 6$ ....... $B^4$ | $11:3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4:2, 6, 8$ ....... $C^1$ | $8:1, 2, 4$ ....... $C^2$ | $12:9, 10, 11$ .... $D$ |

**47. Typ** $B_2^2B_1^3B_2^4C_2^1C_3^2D_2$, schema 193, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\ \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 5\\6\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\ \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\8\ 7\ 6\end{matrix}},\ \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\6\ 8\ 7\end{matrix}},\ \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 0, 0), && 7 = (a-a^3, a-a^3, 1),\\
&2 = (a, 1, 1), && 8 = (a^2-a^4, a^2-a^3+2a-1, a),\\
&3 = (1, 1, 1), && 9 = (0, 1, 0),\\
&4 = (a, 1, 0), && 5 = (a, a^5-a^6+4a^4-3a^3+5a-2, 1),\\
&6 = (1, 0, 1), && 10 = (a+a^4, a+a^2, 1),\\
&12 = (0, 0, 1), && 11 = (1-a+a^3, a+a^2, 1),
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $a^7-2a^6-2a^5+4a^4-2a^3-2a^2+3a-1 = 0$; $a_1 \in (2, 3)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1:5, 7, 8$ ....... $B^2$ | $5:1, 3, 4$ ....... $C^2$ | $9:10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2:7, 8, 10$ ...... $B^3$ | $6:4, 7, 8$ ....... $B^2$ | $10:2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3:4, 5, 11$ ...... $C^2$ | $7:1, 2, 6$ ....... $B^4$ | $11:3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4:3, 5, 6$ ....... $C^2$ | $8:1, 2, 6$ ....... $B^4$ | $12:9, 10, 11$ .... $D$ |

**48. Typ** $B_2^1B_5^2C_2^1D_2E_1^2$, schema 138, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&5\\6&4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&6\\5&8&7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&4&5\\8&6&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 0, 0)\,, && 7 = (1, 1, 2)\,,\\
&2 = (a, 1, 1)\,, && 8 = (a, 1-2a, 2a)\,,\\
&3 = (1, 1, 1)\,, && 9 = (0, 1, 0)\,,\\
&4 = (a, 1, 0)\,, && 10 = (2a, 1-a, a+1)\,,\\
&5 = (a, 1-2a, 1)\,, && 11 = (a+2-4a^2, 1, 2-4a^2)\,,\\
&6 = (1, 0, 1)\,, && 12 = (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $4a^3-4a^2-3a+1 = 0$; $a_1 \in (-1, 0)$; $a_2 \in (0, 1)$; $a_3 \in (1, 2)$ .

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $B^2$ | $5 : 1, 4, 6$ ....... $B^2$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 7, 10$ ...... $E^2$ | $6 : 2, 5, 8$ ....... $B^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 8, 11$ ...... $B^1$ | $7 : 1, 2, 4$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 3, 5, 7$ ....... $B^2$ | $8 : 1, 3, 6$ ....... $B^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**49. Typ** $B_1^1B_6^2C_2^1D_2E_1^1$, schema 401, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&8&5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&8&7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (1, 1, 1)\,, && 5 = (a, 3a, 1)\,, && 9 = (0, 1, 0)\,,\\
&2 = (a, 1, 1)\,, && 6 = (1, 1, 0)\,, && 10 = (2, 3, 1)\,,\\
&3 = (1, 0, 0)\,, && 7 = (a, 1, -a)\,, && 11 = (3a, 6a-1, 1)\,,\\
&4 = (1, 3, 1)\,, && 8 = (1, 0, -1)\,, && 12 = (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $3a^2-2a+1 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $B^2$ | $5 : 1, 3, 6$ ....... $B^2$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 6, 8, 10$ ...... $E^1$ | $6 : 2, 4, 5$ ....... $B^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 5, 7, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 3, 4$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 6, 7, 8$ ....... $B^2$ | $8 : 1, 2, 4$ ....... $B^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**50. Typ** $B_1^1B_3^2B_1^3B_2^4C_2^1D_2E_1^2$, schema 350, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1&2&3&4\\6&7&5&8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3&4&5\\7&6&8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2&5&6\\4&7&8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2&10\\3&11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
&1 = (2, tx-t+2, 2)\,, && 7 = (0, t+2-tx, 2)\,,\\
&2 = (0, 1, 0)\,, && 8 = (4t+6-2x-3tx, t+2-tx, 2)\,,\\
&3 = (1, 1, 1)\,, && 9 = (1, 0, 0)\,,\\
&4 = (tx-2t+2, tx-t+2, 2)\,, && 10 = (t-x-tx+4, tx+x-2t, 2)\,,\\
&5 = (1, 1, 0)\,, && 11 = (tx-2t+2, 4-t, 2)\,,\\
&6 = (tx+2x-2t-2, 2, 2)\,, && 12 = (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $t$, $x$ platí $x^2-x-t = 0$; $t^2-2 = 0$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1: 5, 7, 8$ | $B^2$ | $5: 1, 4, 6$ | $B^4$ | $9: 10, 11, 12$ | $D$ |
| $2: 6, 8, 10$ | $B^1$ | $6: 2, 5, 7$ | $B^2$ | $10: 2, 9, 12$ | $C^1$ |
| $3: 4, 8, 11$ | $B^2$ | $7: 1, 4, 6$ | $B^4$ | $11: 3, 9, 12$ | $C^1$ |
| $4: 3, 5, 7$ | $B^3$ | $8: 1, 2, 3$ | $E^2$ | $12: 9, 10, 11$ | $D$ |

**51. Typ** $B_1^1B_3^2B_1^3B_2^4C_2^1D_2E_1^2$, schema 382, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 5\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\8\ 6\ 7\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\6\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (c-c^2, 1, c-c^2)\,, & 7 &= (0, 1, c)\,,\\
2 &= (0, 1, 0)\,, & 8 &= (2c^2-c^3-c+1, 1, c)\,,\\
3 &= (1, 1, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (2c^2-c^3-c+1, 1, c-c^2)\,, & 10 &= (c^3-c^2+c-1, c^3-c^2+c-2, -c)\,,\\
5 &= (1, 1, 0)\,, & 11 &= (c-c^2, 1-c, 1)\,,\\
6 &= (c-c^2, 1, 0)\,, & 12 &= (0, 0, 1)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $c$ platí $c^5-2c^4+3c^3-4c^2+2c-1 = 0$; $c_1 \in (1, 2)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1: 5, 7, 8$ | $B^4$ | $5: 1, 4, 6$ | $B^2$ | $9: 10, 11, 12$ | $D$ |
| $2: 4, 8, 10$ | $B^3$ | $6: 5, 7, 8$ | $B^4$ | $10: 2, 9, 12$ | $C^1$ |
| $3: 4, 7, 11$ | $E^2$ | $7: 1, 3, 6$ | $B^2$ | $11: 3, 9, 12$ | $C^1$ |
| $4: 2, 3, 5$ | $B^1$ | $8: 1, 2, 6$ | $B^2$ | $12: 9, 10, 11$ | $D$ |

**52. Typ** $B_2^1B_6^2C_2^1D_2$, schema 450, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\6\ 7\ 8\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\7\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 5\ 6\\4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\3\ 11\end{matrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 4 &= (a^2-3a+5, 3-2a, a^2-3a+5)\,,\\
2 &= (a, 1, 1)\,, & 5 &= (a^3-3a^2+5a, 3a-2a^2, a^2-3a+5)\,,\\
3 &= (1, 0, 0)\,, & 7 &= (a^3+a^2-a, a^2+a-1, a^3-4a^2+8a-5)\,,\\
6 &= (1, 1, 0)\,, & 8 &= (a^3+a^2-a, 0, a^3-4a^2+8a-5)\,,\\
9 &= (0, 1, 0)\,, & 10 &= (a^3-a^2+4a-3, a^2+a-1, a^3-4a^2+8a-5)\,,\\
12 &= (0, 0, 1)\,, & 11 &= (a^3-2a^2+5a-5, 2a-3, a^3-5a^2+9a-7)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $a^5-8a^4+21a^3-29a^2+19a-5 = 0$; $a_1 \in (4, 5)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1: 5, 7, 8$ | $B^2$ | $5: 1, 3, 6$ | $B^2$ | $9: 10, 11, 12$ | $D$ |
| $2: 6, 8, 10$ | $B^2$ | $6: 2, 5, 7$ | $B^1$ | $10: 2, 9, 12$ | $C^1$ |
| $3: 4, 5, 11$ | $B^2$ | $7: 1, 4, 6$ | $B^2$ | $11: 3, 9, 12$ | $C^1$ |
| $4: 3, 7, 8$ | $B^1$ | $8: 1, 2, 4$ | $B^2$ | $12: 9, 10, 11$ | $D$ |

**53. Typ** $B_1^1 B_6^2 B_1^3 C_2^1 D_2$, schema 107, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 5\\ 6\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 5\ 6\\ 4\ 7\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 6\\ 8\ 5\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 0, 0)$, $\quad 5 = (3a^2-a,\ a^3-a^2+5a-3,\ 3a-1)$,
$2 = (a, 1, 1)$, $\quad 8 = (3a^2-a,\ a^3-a^2+5a-3,\ -a^2+9a-5)$,
$3 = (1, 1, 1)$, $\quad 7 = (3a^2-a,\ 3a^2-a,\ -a^2+9a-5)$,
$4 = (a, 1, 0)$, $\quad 10 = (a^4+a^3+a^2+2a-2,\ a^3-a^2+5a-3,\ a^4+a^3-3a^2+12a-7)$,
$6 = (1, 0, 1)$, $\quad 11 = (3a^3-5a^2+10a-5,\ a^3-a^2+5a-3,\ a^4+a^3-3a^2+12a-7)$,
$9 = (0, 1, 0)$, $\quad 12 = (0, 0, 1)$,

kde pro $a$ platí $a^5-2a^3+11a^2-14a+5 = 0$; $a_1 \in (-3, -2)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $B^2$ | $5 : 1, 3, 6$ ....... $B^2$ | $9 : 10, 11, 12$ .... $D$ |
| $2 : 6, 7, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 2, 4, 5$ ....... $B^1$ | $10 : 2, 9, 12$ ...... $C^1$ |
| $3 : 5, 8, 11$ ...... $B^3$ | $7 : 1, 2, 4$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ...... $C^1$ |
| $4 : 6, 7, 8$ ....... $B^2$ | $8 : 1, 3, 4$ ....... $B^2$ | $12 : 9, 10, 11$ ..... $D$ |

**54. Typ** $B_1^1 B_5^2 B_2^4 C_2^1 D_2$, schema 453, t. j.

$$\frac{9}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 7\\ 4\ 5\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{12}{\begin{matrix}1\ 2\ 3\ 4\\ 6\ 7\ 8\ 5\end{matrix}},\quad \frac{10}{\begin{matrix}3\ 4\ 5\\ 7\ 6\ 8\end{matrix}},\quad \frac{11}{\begin{matrix}2\ 4\ 5\\ 6\ 8\ 7\end{matrix}},\quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 10\\ 3\ 11\end{matrix}}.$$

$1 = (1, 1, 1)$, $\quad 2 = (2c^7-c^8-c^6-c^5+2c^4-2c+3,\ 1,\ 1)$,
$3 = (1, 0, 0)$, $\quad 4 = (1,\ -c^7-c^4-c^3+c^2+c-1,\ 1)$,
$6 = (1, 1, 0)$, $\quad 5 = (2c^7-c^8-c^6-c^5+2c^4-2c+3,\ c,\ 1)$,
$8 = (c^2-c+1, 0, 1)$, $\quad 7 = (c^2-c+1,\ c^6-c^7-c^5-c^4+c^3,\ 1)$,
$9 = (0, 1, 0)$, $\quad 10 = (c^6-c^5+2c^3-c^2-c+2,\ c^6-c^7-c^5-c^4+c^3,\ 1)$,
$12 = (0, 0, 1)$, $\quad 11 = (2c^7-c^8-c^6-c^5+c^4+c^2-2c+2,\ c^2-c^4,\ 1)$,

kde pro $c$ platí $c^9-2c^8+2c^7-c^5+c^3+c^2-2c+1 = 0$; $c_1 \in (-1, 0)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $B^4$ | $5 : 1, 3, 6$ ....... $B^2$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 8, 10$ ...... $B^1$ | $6 : 5, 7, 8$ ....... $B^4$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 4, 5, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 4, 6$ ....... $B^2$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 3, 7$ ....... $B^2$ | $8 : 1, 2, 6$ ....... $B^2$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**55. Typ** $B_3^2 B_5^3 C_2^1 D_2$, schema 228, t. j.

$$\frac{9}{\begin{smallmatrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{12}{\begin{smallmatrix}1&2&3&5\\6&7&4&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{10}{\begin{smallmatrix}3&4&6\\5&7&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{11}{\begin{smallmatrix}2&4&5\\8&6&7\end{smallmatrix}},\quad \frac{1}{\begin{smallmatrix}2&10\\3&11\end{smallmatrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 7 &= (2, 2-2x-2bx, 3+b-x-bx)\,,\\
2 &= (2, 2, 3+b-x-bx)\,, & 8 &= (2b, 2-2x-2bx, 3+b-x-bx)\,,\\
3 &= (0, 0, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (0, 1, 1)\,, & 10 &= (2b, 2, 3b-bx+x+1)\,,\\
5 &= (2b, 2, 3+b-x-bx)\,, & 11 &= (b+1, 2-x-bx, 3+b-x-bx)\,,\\
6 &= (1, 0, 1)\,, & 12 &= (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $b$, $x$ platí $b^2+2bx-x = 0$, $x^2+1 = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $B^3$ | $5 : 1, 4, 6$ ....... $B^3$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 6, 10$ ...... $B^3$ | $6 : 2, 5, 7$ ....... $B^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 7, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 3, 6$ ....... $B^3$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 5, 8$ ....... $B^2$ | $8 : 1, 3, 4$ ....... $B^3$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**56. Typ** $B_3^2 B_5^3 C_2^1 D_2$, schema 248, t. j.

$$\frac{9}{\begin{smallmatrix}1&2&3&7\\4&5&6&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{12}{\begin{smallmatrix}1&2&3&5\\6&7&4&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{10}{\begin{smallmatrix}3&4&6\\7&5&8\end{smallmatrix}},\quad \frac{11}{\begin{smallmatrix}2&4&5\\8&6&7\end{smallmatrix}},\quad \frac{1}{\begin{smallmatrix}2&10\\3&11\end{smallmatrix}}.$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1, 1, 1)\,, & 7 &= (1, a^2-2a, a)\,,\\
2 &= (1, 1, a)\,, & 8 &= (-a^2+4a-2, a^2-2a, a)\,,\\
3 &= (0, 0, 1)\,, & 9 &= (1, 0, 0)\,,\\
4 &= (0, 1, 1)\,, & 10 &= (1, a^2-2a, a^2-3a+3)\,,\\
5 &= (-a^2+4a-2, 1, a)\,, & 11 &= (-a^2+4a-1, a^2-2a+1, 2a)\,,\\
6 &= (1, 0, 1)\,, & 12 &= (0, 1, 0)\,,
\end{aligned}$$

kde pro $a$ platí $a^3-7a^2+13a-5 = 0$; $a_1 \in (0, 1)$; $a_2 \in (2, 3)$; $a_3 \in (4, 5)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $B^3$ | $5 : 1, 3, 6$ ....... $B^3$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 6, 10$ ...... $B^3$ | $6 : 2, 5, 7$ ....... $B^2$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 5, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 4, 6$ ....... $B^3$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 7, 8$ ....... $B^2$ | $8 : 1, 3, 4$ ....... $B^3$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

**57. Typ** $B_3^2B_5^3C_2^1D_2$, schema 318, t. j.

$$\frac{9}{\begin{smallmatrix}1\,2\,3\,7\\4\,5\,6\,8\end{smallmatrix}},\quad \frac{12}{\begin{smallmatrix}1\,2\,3\,4\\6\,7\,5\,8\end{smallmatrix}},\quad \frac{10}{\begin{smallmatrix}3\,5\,6\\4\,8\,7\end{smallmatrix}},\quad \frac{11}{\begin{smallmatrix}2\,4\,5\\8\,6\,7\end{smallmatrix}},\quad \frac{1}{\begin{smallmatrix}2\,10\\3\,11\end{smallmatrix}}.$$

$1 = (a, 1, a)$, $2 = (0, 1, 0)$, $3 = (1, 1, 1)$,
$4 = (a^5-5a^4+7a^3-4a^2+2a+1, 2, 2a)$, $5 = (1, 1, 0)$, $6 = (a, 1, 1)$,
$7 = (0, 2a^5-9a^4+14a^3-17a^2+9a-5, 2)$, $9 = (1, 0, 0)$,
$8 = (a^5-4a^4+4a^3-2a^2-a+1, 2a^5-9a^4+14a^3-17a^2+9a-5, 2)$,
$10 = (2a^5-8a^4+9a^3-7a^2+1, 3a^5-13a^4+19a^3-22a^2+10a-5, 2)$,
$11 = (a^5-4a^4+4a^3-2a^2-a+1, 3a^5-13a^4+18a^3-19a^2+8a-4)$,
$12 = (0, 0, 1)$,

kde pro $a$ platí $a^6-4a^5+5a^4-6a^3+2a^2-2a-1 = 0$; $a_1 \in (-1, 0)$; $a_2 \in (2, 3)$.

| | | |
|---|---|---|
| $1 : 5, 7, 8$ ....... $B^3$ | $5 : 1, 4, 6$ ....... $B^3$ | $9 : 10, 11, 12$ ... $D$ |
| $2 : 4, 6, 10$ ...... $B^2$ | $6 : 2, 5, 8$ ....... $B^3$ | $10 : 2, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $3 : 7, 8, 11$ ...... $B^2$ | $7 : 1, 3, 4$ ....... $B^3$ | $11 : 3, 9, 12$ ..... $C^1$ |
| $4 : 2, 5, 7$ ....... $B^2$ | $8 : 1, 3, 6$ ....... $B^3$ | $12 : 9, 10, 11$ .... $D$ |

---

Zbývá ještě provést důkaz, že všechna tato schemata jsou navzájem různá. K tomu nám pomáhá věta:

**Věta 6.** *Jsou-li dvě schemata různého typu, nemohou být ekvivalentní.*

Snadný důkaz této věty nebudu provádět.

Ukažme nyní na příkladě, jak této věty použijeme. Stačí především zkoumat schemata stejného typu. Tak na př. schemata 230 a 310, která jsou uvedena s pořadovými čísly 25 a 26, jsou obě typu $B_1^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$. V obou je jen jeden bod typu $B^1$ (u obou je to bod *2*). Musí tedy hledaná permutace být taková, aby bod *2* z jednoho schematu přešel opět na bod *2* schematu druhého, což stručně zapíšeme (*2 2*). Podobně vzhledem k bodům $C^2$, $E^1$ vidíme, že musí platit (*6 6*) a (*8 8*). Přímka *6—8—11* přechází tedy ze schematu 230 opět na přímku *6—8—11* schematu 310, čili musí platit také (*11 11*). Protože také přímka *2—4—11* musí přejít na přímku *2—4—11*, platí také (*4 4*). Pak ale přímka *4—8—10* ze schematu 230 by musela přejít na přímku *4—8—12* ve schematu 310, čili (*10 12*), ale to není možné, neboť bod *10* je $C$-bod a bod *12* je $D$-bod. Neexistuje tudíž permutace čísel 1, 2, 3, ..., 12, kterou by přecházelo schema 230 na schema 310 a tato schemata jsou tedy různá.

Zcela obdobné důkazy jsem provedl u všech schemat stejného typu a vždy se ukázalo, že jsou navzájem různá. Tyto výpočty již provádět nebudu. Chtěl bych jen ještě poznamenat, že při provádění takovýchto důkazů lze s výhodou použít ještě dalšího zjemňování. Tak na př. poznáme ihned, že schemata 357 a 507 (uvedená s pořadovými čísly 29 a 30) nemohou být ekvivalentní (ačkoliv jsou stejného typu), protože v prvém z nich je jediný $C^2$-bod oddělen od bodů *1, 4, 5*, což jsou (postupně) body $C^1$, $B^2$, $C^1$, kdežto v druhém schematu je jediný $C^2$-bod oddělen od bodů *5, 6, 7*, což jsou body $C^1$, $C^1$, $E^2$. Dalšího zjemnění můžeme dosáhnout třeba u bodů $B^2$, uvážíme-li, že je v konfiguraci (která aspoň jeden bod typu $B^2$ obsahuje) právě jediný bod, který je různý od tohoto $B^2$-bodu i od bodů, od kterých je tento $B^2$-bod oddělen a který neleží na žádné přímce z trojice uvedené ve větě 5. Jak by se tohoto poznatku dalo použít, je již jasné. Dalším zjemňováním se již zabývat nebudu, protože zjemnění, kterých jsme užili (a popsali zde i v úmluvách 1, 2), v našich případech zcela postačí.

Čtenář si zřejmě také povšiml, že u schemat 402, 193, 350, 382 a 453 (uvedených s pořadovými čísly 46, 47, 50, 51 a 54) existují vždy dva body, které jsou odděleny od téže trojice bodů. Oba tyto body jsou typu $B^4$ a není to náhodné, neboť platí věta:

**Věta 7.** *Nutná a postačující podmínka, aby dva body byly odděleny od téže trojice bodů je: Oba tyto body jsou typu* $B^4$.

Poměrně snadný důkaz této věty ponechávám opět čtenáři.

## IV. Závěr

Přijmeme-li definici ekvivalence konfigurací (viz kapitolu I), vidíme, že *existuje* **57 konfigurací** $(12_4, 16_3)$, *které obsahují aspoň jeden bod typu D; dají se realisovat body a přímkami nad tělesem komplexních čísel.* Jsou to:

| Poř. číslo | Třída | Typ | Řešení[9]) | Poznámka |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $C_7D_4E_1$ | $C_6^1C_1^2D_4E_1^2$ | $\infty^1$ | Jediný typ bez $B$-bodů. |
| 2 | $B_1C_7D_4$ | $B_1^2C_4^1C_3^2D_4$ | (1,2) | První dva typy jsou jediné |
| 3 | $B_1C_8D_2E_1$ | $B_1^2C_4^1C_4^2D_2E_1^2$ | (0,2) | s více než dvěma $D$-body. |
| 4 | $B_2C_8D_2$ | $B_2^1C_4^1C_4^2D_2$ | (0,4) | |
| 5 | | $B_1^1B_1^2C_4^1C_4^2D_2$ | (2,4) | |
| 6 | | | (0,6) | |
| 7 | | | (2,2) | |
| 8 | | | (0,4) | |
| 9 | | $B_2^2C_6^1C_2^2D_2$ | (2,0) | |
| 10 | | | (0,4) | |
| 11 | | | (2,2) | Konfigurace není čistá. |
| 12 | | | (2,2) | |

[9]) Ve čtvrtém sloupci nadepsaném „Řešení" uvádím, kolika možnými způsoby je daná konfigurace řešitelná. První číslo v závorce $(i, j)$ uvádí počet reálných řešení, druhé pak počet řešení imaginárních.

| Poř. číslo | Třída | Typ | Řešení[9]) | Poznámka |
|---|---|---|---|---|
| 13 | | | (0,4) | |
| 14 | | | (1,2) | |
| 15 | | $B_2^2C_4^1C_4^2D_2$ | (1,4) | |
| 16 | | | (1,2) | |
| 17 | | | (2,2) | |
| 18 | $B_3C_5D_2E_2$ | $B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1E_1^2$ | (1,0) | Tyto tři konfigurace jsou |
| 19 | | $B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_2^2$ | (1,0) | jediné, které obsahují dva |
| 20 | | $B_2^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2E_1^1E_1^2$ | (0,2) | $E$-body. |
| 21 | $B_4C_5D_2E_1$ | $B_4^1C_4^1C_1^2D_2E_1^2$ | (0,4) | |
| 22 | | $B_3^1B_1^2C_2^1C_3^2D_2E_1^1$ | (0,4) | |
| 23 | | $B_2^1B_2^2C_4^1C_1^2D_2E_1^2$ | (0,8) | |
| 24 | | $B_1^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$ | (0,4) | |
| 25 | | | (1,2) | |
| 26 | | | (0,2) | |
| 27 | | $B_1^1B_3^2C_2^1C_3^2D_2E_1^2$ | (2,6) | |
| 28 | | $B_4^2C_4^1C_1^2D_2E_1^1$ | (0,2) | |
| 29 | | $B_4^2C_4^1C_1^2D_2E_1^2$ | (2,2) | |
| 30 | | | (0,2) | |
| 31 | | $B_3^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2E_1^1$ | (1,2) | |
| 32 | | | (0,6) | |
| 33 | | $B_3^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2E_1^2$ | (1,4) | |
| 34 | | | (1,2) | |
| 35 | $B_5C_5D_2$ | $B_2^1B_3^2C_4^1C_1^2D_2$ | (0,6) | |
| 36 | | | (1,8) | |
| 37 | | | (1,6) | |
| 38 | | $B_1^1B_4^2C_4^1C_1^2D_2$ | (2,8) | |
| 39 | | $B_1^1B_4^2C_2^1C_3^2D_2$ | (1,8) | |
| 40 | | $B_1^1B_3^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$ | (1,4) | |
| 41 | | | (1,8) | |
| 42 | | $B_4^2B_1^3C_4^1C_1^2D_2$ | (4,0) | |
| 43 | | | (2,6) | |
| 44 | | | (1,2) | |
| 45 | | | (0,6) | |
| 46 | | $B_3^2B_2^4C_4^1C_1^2D_2$ | (0,4) | |
| 47 | | $B_2^2B_1^3B_2^4C_2^1C_3^2D_2$ | (1,6) | |
| 48 | $B_7C_2D_2E_1$ | $B_2^1B_5^2C_2^1D_2E_1^2$ | (3,0) | |
| 49 | | $B_1^1B_6^2C_2^1D_2E_1^1$ | (0,2) | |
| 50 | | $B_1^1B_3^2B_1^3B_2^4C_2^1D_2E_1^2$ | (2,2) | |
| 51 | | | (1,4) | |
| 52 | $B_8C_2D_2$ | $B_2^1B_6^2C_2^1D_2$ | (1,4) | |
| 53 | | $B_1^1B_6^2B_1^3C_2^1D_2$ | (1,4) | |
| 54 | | $B_1^1B_5^2B_2^4C_2^1D_2$ | (1,8) | |
| 55 | | $B_3^2B_5^3C_2^1D_2$ | (0,4) | |
| 56 | | | (3,0) | |
| 57 | | | (2,4) | |

## LITERATURA

[1] *B. Bydžovský:* Über eine ebene Konfiguration ($12_4$, $16_3$), Věstník Král. české spol. nauk, 1939.

[2] *J. de Vries:* Über gewisse ebene Konfigurationen, Acta matematica, *12*, 1889, 67.

[3] *O. Hesse:* Über Curven dritter Ordnung ..., J. f. reine u. angew. Math. *36*, 1848, 156—176. — Sebrané spisy, str. 155 a n.

[4] *O. Hesse:* Eine Bemerkung zum Pascalschen Theorem, J. f. reine u. angew. Math. *41*, 1851, 270. — Sebrané spisy (Mnichov 1897), str. 254.

[5] *G. Salmon* (něm. překlad W. Fiedler): Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 1873, čl. 151, 152.

[6] *Th. Reye:* Konstruktion der Konfigurationen, Acta Math. *1*, 1882, str. 97 a n.

[7] *Th. Reye:* Geometrie der Lage, 3. B., 1910, str. 234 a n.

[8] *H. Schroeter:* Über ebene Konfigurationen, J. f. reine u. angew. Math. *108*, 1891, str. 297.

[9] *M. Zacharias:* Untersuchungen über ebene Konfigurationen ($12_4$, $16_3$), Deutsche Mathematik, *6*, čís. 2 a 3.

[10] *J. Metelka:* O jistých konfiguracích ($12_4$, $16_3$) v rovině, Věstník Král. české spol. nauk, 1944.

[11] *B. Bydžovský:* Poznámky k theorii konfigurace ($12_4$, $16_3$), Časopis pro pěst. mat. *74*, 1950. (Zprávy ze spol. sjezdu matematiků čsl. a polských.)

[12] *B. Bydžovský:* O dvou nových konfiguracích ($12_4$, $16_3$), Časopis pro pěst. mat. *79*, 1954.

[13] *J. Metelka:* O rovinných konfiguracích ($12_4$, $16_3$), Časopis pro pěst. mat. *80*, 1955, 133 a n.

[14] *F. Levi:* Geometrische Konfigurationen, Leipzig, 1929.

[15] *V. Metelka:* O jistých rovinných konfiguracích ($12_4$, $16_3$), které obsahují aspoň jeden bod typu $D$, Časopis pro pěst. mat. *80*, 1955, 146 a n.


Резюме

## ПЛОСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ ($12_4$, $16_3$), СОДЕРЖАЩИЕ ХОТЯ БЫ ОДНУ $D$-ТОЧКУ


ВАЦЛАВ МЕТЕЛКА (Václav Metelka), Либерец.



(Поступило в редакцию 18/IV 1956г.)


Вацлав Метелка разработал вместе со своим братом (Иосеф Метелка, Оломоуц) план для отыскания всех плоских конфигураций ($12_4$, $16_3$), которые можно осуществить в проективной плоскости при помощи точек и прямых над полем комплексных чисел. Для реализации этого плана нужно было прежде всего ввести эффективный принцип для классификации плоских конфигураций $(12_4, 16_3)$, как это намечено здесь.

Обозначим двенадцать точек конфигурации цифрами *1*, *2*, *3*, ..., *12*. Точка *1* является (как и все точки конфигурации) инцидентной в точности с четырьмя прямыми конфигурации, на которых лежит — кроме точки *1* — еще дальнейших девять (напр. *5*, *6*, ..., *12*) точек конфигурации. Мы говорим, что точка *1 соединена* с этими точками (что можно кратко обозначить *1—5*, *1—6*, ..., *1—12*). От остальных трех точек конфигурации (*2*, *3*, *4*) точка *1 отделена* (*1* : *2*, *1* : *3*, *1* : *4*).

В зависимости от взаимного расположения этих трех точек (*2*, *3*, *4*) точку *1* можно отнести к одному из пяти типов. Так, например, если *2* : *3*, *2* : *4*, *3* : *4*, то скажем, что *1* является $A$-точкой. В случае, когда *2—3*, *2* : *4*, *3* : *4*, мы скажем, что *1* является $D$-точкой. Нет нужды рассматривать дальнейшие возможности взаимного расположения точек *2*, *3*, *4*, так как для дальнейших объяснений вполне достаточно этих двух типов.

Брат автора отыскал в своей статье (И. Метелка, [13]) все конфигурации $(12_4, 16_3)$, содержащие хотя бы одну $A$-точку. Этим самым была исчерпана первая часть программы.

Работа же Вацлава Метелки выполняет вторую часть этой программы, так как в ней отысканы все возможные плоские конфигурации $(12_4, 16_3)$, содержащие хотя бы одну $D$-точку.

Здесь *автор доказал, что имеется ровно* 57 *конфигураций*, причем в его работе приводятся не только все схемы инцидентностей (т. е. схемы, показывающие способ соединения точек конфигурации), но и вычисление координат точек конфигурации.

Далее в его работе доказывается, что все эти конфигурации отличны друг от друга (по определению эквивалентных конфигураций), другими словами, что не существует перестановка чисел 1, 2, ..., 12, которая переводила бы точки одной схемы инцидентности в точки другой схемы.

Так как классификация конфигураций по числу точек типа $A$, $D$, ..., и т. д. оказалась еще недостаточной, в этой работе была проведена классификация, несколько более сложная, но зато значительно более контрастная, чем исходная классификация.

В заключительной главе этой работы конфигурации расположены в соответствии с этой новой классификацией с указанием, какие из них можно осуществить в проективной плоскости над полем комплексных (соотв. действительных) чисел; указано и число возможных способов осуществления.

Все эти конфигурации являются новыми и не были до сих пор опубликованы.

Zusammenfassung

# ÜBER EBENE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$, DIE MINDESTENS EINEN $D$-PUNKT ENTHALTEN

VÁCLAV METELKA, Liberec.

(Eingelangt am 18. April 1956.)

Der Autor hat mit seinem Bruder JOSEF METELKA (Olomouc) einen Plan auf die Entdeckung aller Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ entworfen, die in einer projektiven Ebene mit Punkten und Geraden oberhalb des Körpers der komplexen Zahlen realisiert werden können. Zur Verwirklichung dieses Planes war es vor allem notwendig, ein wirksames Ordnungsprinzip der ebenen Konfigurationen, wie hier angegeben, einzuführen:

Zwölf Konfigurationspunkte seien mit Nummern $1, 2, \ldots, 12$ bezeichnet. Der Punkt $1$ ist (wie jeder Konfigurationspunkt) mit eben vier Konfigurationsgeraden inzident, auf welchen — mit Ausnahme von Punkt $1$ — noch weitere neun (z. B. $5, 6, \ldots, 12$) Konfigurationspunkte liegen. Man sagt, dass der Punkt $1$ mit diesen Punkten verbunden ist (was man kurz $1—5, 1—6, \ldots$ $\ldots, 1—12$ bezeichnet). Von den übrigen drei Konfigurationspunkten $(2, 3, 4)$ ist der Punkt $1$ abgetrennt $(1 : 2, 1 : 3. 1 : 4)$.

Je nach der gegenseitigen Stellung dieser drei Punkte $(2, 3, 4)$ können wir den Punkt $1$ in einen von fünf Typen einreihen. So zum Beispiel, gilt es $2 : 3$, $2 : 4$, $3 : 4$, so sagen wir, dass $1$ der $A$-Punkt ist. Im Falle, dass $2—3$, $2 : 4$, $3 : 4$, sagen wir, dass $1$ der $D$-Punkt ist. Weitere Möglichkeiten gegenseitiger Stellung der Punkte $2, 3, 4$ braucht man nicht anzuführen, weil für weitere Erörterung die zwei gegebenen Typen vollkommen genügen.

Der Bruder des Autors hat in seiner Arbeit [13] alle Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ entdeckt, die wenigstens einen $A$-Punkt enthalten. Damit war der erste Teil des Planes erschöpft.

Die Arbeit vom Autor erfüllt dann den zweiten Teil dieses Planes, denn sie enthält alle möglichen ebenen Konfigurationen $(12_4, 16_3)$, die mindestens einen $D$-Punkt haben.

Der Autor hat hier bewiesen, dass die *Gesamtzahl der Konfigurationen genau* 57 *beträgt*, und in seiner Arbeit sind nicht nur alle Inzidenzschemas (d. h. Schemas, die angeben, auf welche Weise die Verbindung der Konfigurationspunkte erfolgt), sondern auch die Ausrechnung der Koordinaten der Konfigurationspunkte angeführt.

Weiter ist in seiner Arbeit bewiesen, dass alle diese Konfigurationen (nach der Definition der Äquivalentkonfigurationen) voneinander verschieden sind, was bedeutet, dass keine Permutation der Nummern $1, 2, 3, \ldots, 12$, durch welche die Punkte eines Inzidenzschemas in ein anderes Schema übergehen könnten, vorhanden ist.

Da es sich ergab, dass die Klassifikation der Konfigurationen nach der Anzahl der Punkte des Types $A, D, \ldots$ usw. nocht nicht hinreichend ist, ist in dieser Arbeit eine — auf wesentlichere Art abgestufte — Klassifikation durchgeführt worden, die nichtsdestoweniger nur ein wenig anspruchsvoller als die ursprüngliche Klassifikation ist.

Im Schlusskapitel sind dann die Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ nach der neuen Klassifikation geordnet, und zwar mit der Angabe, welche von ihnen in der projektiven Ebene oberhalb des Körpers der komplexen, bzw. reellen Zahlen und auf wieviel mögliche Weisen realisierbar sind.

Alle diese Konfigurationen sind neu und ursprünglich und sind noch nie früher abgedruckt worden.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

# K JEDNÉ METODĚ UŽÍVANÉ PŘI VÝPOČTU HODNOT KOMPLEXNÍCH KOŘENŮ ALGEBRAICKÉ ROVNICE METODOU GRAEFFEOVOU

VLADIMÍR HORÁK, Brno.

(Došlo dne 6. října 1956.) DT:512.35

Graeffeovou metodou můžeme určit pro danou algebraickou rovnici absolutní hodnoty reálných a komplexních kořenů. K určení komplexních kořenů z těchto absolutních hodnot užíváme různých metod, které jsou však tím komplikovanější, čím více komplexních kořenů daná rovnice obsahuje. V této práci je provedeno propracování jisté metody pro určení komplexních kořenů dané algebraické rovnice. Poněvadž uvedené výsledky se nemění, má-li rovnice také kořeny reálné, budeme se zabývat jenom rovnicemi, které mají vesměs komplexní kořeny.

Předpokládejme v dalším, že algebraická rovnice s reálnými koeficienty $2n$-tého stupně

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0 \tag{1}$$

má samé komplexní kořeny, které jsou jednoduché a jejichž absolutní hodnoty můžeme určit metodou Graeffeovou.

**Věta 1.** *Nechť absolutní hodnoty kořenů rovnice* (1) *jsou*

$$r_i = \sqrt{\xi_i\bar{\xi}_i}\,, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n\,, \tag{2}$$

*kde* $\xi_i$ a $\bar{\xi}_i$ *značí čísla komplexně sdružená; nechť tyto absolutní hodnoty splňují nerovnosti*

$$0 < r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_n\,. \tag{3}$$

*Rozvineme-li* (1) *podle mocnin proměnné*

$$y = x - u\,, \tag{4}$$

*kde pro u platí buď*

$$0 < u < U = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Min}\,(r_{i+1} - r_i)\,,\ r_{i+1} \neq r_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{5}$$

*jestliže se všechna* $r_i$ *navzájem nerovnají, nebo*

$$0 < u\,, \tag{5'}$$

*jestliže $r_i$ jsou vesměs sobě rovna, a vypočteme-li absolutní hodnoty kořenů $\eta_i = \xi_i - u$, $\bar{\eta}_i = \bar{\xi}_i - u$ upravené rovnice*

$$a_0 y^{2n} + \alpha_1 y^{2n-1} + \ldots + \alpha_{2n} = 0\,, \tag{6}$$

*pak pro tyto absolutní hodnoty*

$$\varrho_i = \sqrt{\eta_i \bar{\eta}_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

*platí*

$$0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_n \tag{8}$$

*a jednotlivé komplexně sdružené kořeny rovnice* (1) *obdržíme jako kořeny n kvadratických rovnic*

$$x^2 + \frac{\varrho_i^2 - r_i^2 - u^2}{u}\, x + r_i^2 = 0\,, \tag{9}$$

*kde $\varrho_i$ a $r_i$ jsou hodnoty stojící na témž pořadovém místě v nerovnostech* (3) *a* (8).

Důkaz. Jestliže $r_i < r_{i+1}$ ($i$ lib.), pak z trojúhelníkové nerovnosti a užitím (5) plyne ihned $\varrho_i < \varrho_{i+1}$. Jestliže

$$r_i = r_{i+1} \quad (i \text{ lib.})\,, \tag{10}$$

musí být amplitudy $\varphi_i$ a $\varphi_{i+1}$ příslušných kořenů různé, poněvadž násobné kořeny vylučujeme a pro amplitudy příslušných kořenů s kladnou imaginární částí platí $0 < \varphi_i < \varphi_{i+1} < \pi$ a tedy

$$\cos \varphi_i > \cos \varphi_{i+1}\,. \tag{11}$$

Obecně ale je

$$\varrho_j^2 = (\xi_j - u)(\bar{\xi}_j - u) = r_j^2 - 2ur_j \cos \varphi_j + u^2\,, \tag{12}$$

čili plyne z (10) a (11) opět $0 < \varrho_i < \varrho_{i+1}$. Dají se tedy hodnoty $r_i$ a $\varrho_i$ jednoznačně přiřadit a platí $\xi_i \bar{\xi}_i = r_i^2$ a podle (12) $\xi_i + \bar{\xi}_i = -\dfrac{\varrho_i^2 - r_i^2 - u^2}{u}$, čili $\xi_i$ a $\bar{\xi}_i$ jsou kořeny kvadratických rovnic (9).

**Věta 2.** *Nechť jsou splněny předpoklady věty 1 a nechť h je první index, pro nějž platí $r_{h-1} < r_h$. Je-li řád čísla $r_i$ roven $p_i$, pak číslo $U$ definované v* (5) *je nejvýše řádu $p_h$. Poněvadž $r_i$ mohou být vypočtena na konečný počet cifer, může být řád čísla $U$ roven až nejnižšímu z řádů poslední od nuly různé cifry čísla $r_{j-1}$ nebo $r_j$, pro něž platí $r_{j-1} < r_j$.*

Důkaz. Řád čísla $\dfrac{r_i - r_{i-1}}{2}$ je nejvýše $p_i$, ale může být roven až řádu poslední od nuly různé cifry čísla $r_i$ nebo $r_{i-1}$. Odtud je tvrzení zřejmé.

Důsledek. Jestliže vezmeme místo rovnice (1) rovnici reciprokou, pak absolutní hodnoty $s_1, s_2, \ldots, s_n$ kořenů této rovnice jsou s absolutními hodnotami (2) kořenů rovnice (1) ve vztahu

$$0 < s_n \leqq s_{n-1} \leqq \ldots \leqq s_1\,,$$

kde $s_i = 1/r_i$; nechť $h$ je poslední index, pro nějž platí $s_{h+1} < s_h$; je-li řád čísla $s_i$ roven $q_i$, je číslo $U = \frac{1}{2}\,\mathrm{Min}\,(s_i - s_{i+1})$, $s_i \neq s_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, nejvýše řádu $q_h$.

Z důvodů praktických je nutné klást na parametr $u$ ještě další požadavek. Mohlo by se totiž stát, že hodnota $u$ je tak malá, že v rozvoji (6), který je tvaru

$$a_0 y^{2n} + \left[a_1 + \binom{2n}{1} a_0 u\right] y^{2n-1} + \left[a_2 + \binom{2n-1}{1} a_1 u + \binom{2n}{2} a_0 u^2\right] y^{2n-2} + \\ + \ldots + [a_{2n} + a_{2n-1} u + \ldots + a_1 u^{2n-1} + a_0 u^{2n}] = 0\,, \tag{6'}$$

ovlivní tato hodnota koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ rovnice (1) až na místech, jejichž řád je značně nižší než řád jednotlivých koeficientů, a pak by se koeficienty rovnice (6), jestliže bychom je museli zaokrouhlit, vůbec nebo téměř vůbec nelišily od koeficientů $a_i$ rovnice (1) a tím bychom pro $\varrho_i$ obdrželi značně nepřesné výsledky a také velké chyby pro kořeny. Koeficienty v rovnici (6') jsou tvaru

$$\beta = b_0 u^m + b_1 u^{m-1} + \ldots + b_m\,, \tag{13}$$

při čemž jednotlivé sčítance mohou být čísla různých řádů a s různým počtem cifer, takže výsledný koeficient $\beta$ může mít značný počet cifer a bude nutné jej pro další výpočty zaokrouhlit. Počet cifer nějakého čísla definujme takto:

**Definice 1.** *Říkáme, že číslo $C$ má $\gamma$ cifer, jestliže rozdíl řádů první a poslední od nuly různé cifry zvětšený o jednotku je roven $\gamma$.*

**Věta 3.** *Nechť čísla $b_0, b_1, \ldots, b_m$, z nichž alespoň dvě jsou od nuly různá, mají po řadě řády $p_0, p_1, \ldots, p_m$, při tom číslům $b_i = 0$ řád nepřisuzujeme. Utvoříme-li číslo (13), kde $u = 10^p$, $p$ celé, pak řády jednotlivých sčítanců (pokud $b_i \neq 0$) jsou*

$$q_0 = p_0 + mp\,, \quad q_1 = p_1 + (m-1)\,p\,, \ldots, q_m = p_m\,. \tag{14}$$

*Dá se určit interval $\langle \bar{p}_\beta, \bar{\bar{p}}_\beta \rangle$ tak, že pro každé $p$ mimo tento interval čísla (14) v napsaném pořadí tvoří monotonní posloupnost, která je pro $p < \bar{p}_\beta$ rostoucí a pro $p < \bar{\bar{p}}_\beta$ klesající. Jsou-li pouze dvě z čísel $b_i$ různá od nuly, pak $\bar{p}_\beta = \bar{\bar{p}}_\beta$ a místo intervalu máme jediný bod.*

Důkaz. Je zřejmé, že sčítance v (13) nabývají pro $u = 10^p$ řády uvedené v (14). Aby se dvě z čísel (14) rovnala, na př. $q_j$ a $q_k$ $(j \neq k)$, musela by mít rovnice

$$p_j + (m-j)\,p = p_k + (m-k)\,p \tag{15}$$

celočíselné řešení pro $p$; obecně (15) celočíselné řešení nemá a označme proto její kořen $p_{jk}$ $(j \neq k)$.

Jestliže platí nerovnosti

$$0 < m - j < m - k\,, \quad \bar{p} > p_{jk}\,, \tag{16}$$

pak je

$$p_j + (m-j)\,\bar{p} < p_k + (m-k)\,\bar{p}\,. \tag{17}$$

Stejně pro $0 < m - j < m - k$, $\bar{p} < p_{jk}$ platí (17) s opačným znaménkem nerovnosti.

Vypočteme-li všechna možná čísla $p_{jk}$, obdržíme množinu čísel, která není prázdná. Označme nejmenší číslo této množiny $\bar{p}_\beta$ a největší $\bar{\bar{p}}_\beta$; tato dvě čísla splývají v případě, že pouze dvě čísla $b_i$ jsou různá od nuly. Je-li nyní $p > \bar{\bar{p}}_\beta = \operatorname*{Max}_{j,k} p_{jk}$, pak pro čísla $q_i$ platí podle (17) $q_0 < q_1 < \ldots < q_m$ a podobně pro $p < \bar{p}_\beta = \operatorname*{Min}_{j,k} p_{jk}$ platí $q_0 > q_1 > \ldots > q_m$. Snadno se vidí, že čím více se $p$ liší od $p_{jk}$, tím více se řády $q_j$ a $q_k$ od sebe liší.

**Důsledek.** Podle předcházející věty můžeme pro každý koeficient rovnice (6') určit interval $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$; volíme-li řád $p$ čísla $u$ tak, že je $p < \operatorname*{Min}_i \bar{p}_{\alpha_i}$, pak zřejmě sčítance nejvyššího řádu v jednotlivých koeficientech budou právě koeficienty $a_i$ původní rovnice, pokud jsou různé od nuly, a poněvadž řád dalšího sčítance je menší, proto nemusí se žádný nebo většina koeficientů, které zaokrouhlíme, lišit od koeficientů rovnice původní.

Stejně volíme-li řád $p$ čísla $u$ tak, že je $p > \operatorname*{Max}_i \bar{\bar{p}}_{\alpha_i}$, potom sčítanec nejvyššího řádu v koeficientu $\alpha_i$ bude právě $\binom{2n}{i} a_0 u^i$ a tedy po zaokrouhlení $\alpha_i$ nemusela by se rovnice (6') vůbec lišit od rovnice $a_0(y + u)^{2n} = 0$, je-li řád $p$ dosti vysoký. Z těchto důvodů je třeba volit řád $p$ čísla $u$ v intervalu

$$\langle \operatorname*{Min}_i \bar{p}_{\alpha_i}\,, \quad \operatorname*{Max}_i \bar{\bar{p}}_{\alpha_i}\,. \rangle \tag{18}$$

Abychom vhodně zvolili číslo $u$, bude výhodné řídit se zásadami následujícího pravidla:

**Pravidlo 1.** a) Řád čísla $u$ volíme v intervalu (18) a to tak, aby pokud možno ležel v průniku všech a nebo alespoň většiny z intervalů $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$.

b) V jednotlivých intervalech, pokud jejich části patří do průniku, snažíme se určit řád $p$ tak, aby po zaokrouhlení $\alpha_i$ nebyl roven ani prvnímu, ani poslednímu sčítanci. Z toho důvodu je výhodné sestavit si pro každý koeficient $\alpha_i$ tabulku tvaru

| $p =$ | $p_0 + ip$ | $p_1 + (i-1)p$ | $\ldots$ | | $p_{i-1} + p$ | $p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $[\bar{p}_{\alpha_i}]$ | | | | | | |
| $[\bar{p}_{\alpha_i}] + 1$ | | | | | | |
| $\vdots$ | | | | | | |
| $[\bar{p}_{\alpha_i}] + k$ | | | | $P_{ki}$ | | |
| $\vdots$ | | | | | | |

kam do jednotlivých řádků napíšeme řády, které nabývají jednotliví sčítanci pro celá čísla z intervalu $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$. V každém řádku bude alespoň jedno číslo největší, které označme $P_{ki}$. Předpokládejme, že koeficienty pro výpočet Graeffeovou metodou zaokrouhlíme na $q$ cifer. Pak pro každý koeficient $\alpha_i$ určíme vhodný řád čísla $u$ tak, aby v intervalu $\langle P_{ki} - q, P_{ki} \rangle$ bylo nejvíce cifer ze všech cifer toho řádku. Tím docílíme, že při zaokrouhlení vypustíme pro tento koeficient nejméně sčítanců.

Máme-li určen pro každý koeficient $\alpha_i$ vhodný řád čísla $u$, snažíme se z těchto řádů vybrat ten, který vyhovuje nejvíce koeficientům.

c) V případě, že z intervalů $\langle \bar{p}_{\alpha_i}, \bar{\bar{p}}_{\alpha_i} \rangle$ nemá vůbec žádný nebo jen nejvýše vždy dva z nich společnou část, nelze na základě předcházejících úvah žádné pravidlo vyslovit.

Číslo $U$ vypočteme přibližně tak, že rovnici (1) řešíme metodou Graeffeovou a koeficienty rovnic $R^2, R^4, \ldots$ počítáme jen užitím logaritmického pravítka. Z vypočtených absolutních hodnot kořenů určíme pak $U$ a $u$.

Za číslo $u$ můžeme také volit některé z čísel $2 \cdot 10^{p-1}, \ldots, 9 \cdot 10^{p-1}, 10^p, 2 \cdot 10^p, \ldots, 9 \cdot 10^p$, je-li to výhodnější.

**Příklad 1.** Mějme rovnici 10-tého stupně a nechť její koeficienty jsou většinou téhož řádu $q$, ale při tom všechny nechť leží na př. v intervalu $\langle 5 \cdot 10^{q-1}, 5 \cdot 10^{q+1} \rangle$. Pak binomická čísla vyskytující se v koeficientech rovnice (6') pro $n = 5$ jsou řádů 0, 1 a 2, což značí, že koeficienty sčítanců jsou přibližně řádů $q, q + 1, q + 2$. Poněvadž číslo $u = k \cdot 10^p$ $(1 \leqq k \leqq 9$, celé) se vyskytuje v koeficientech jako součinitel v mocninách 0 až 10, bude většinou nejvýhodnější volit řád $p = 0$. Někdy snad bude také výhodné volit $p = 1$ nebo $p = -1$.

Poznámka 1. Předcházejících výsledků užijeme buď na rovnici (1), nebo na rovnici k ní reciprokou podle toho, pro kterou je volba čísla $u$ příhodnější. Tímto způsobem určený řád $p$ čísla $u$ porovnáme s řádem čísla $U$, které je určeno v (5). Je-li nyní $0 < u < U$, pak volíme řád čísla $u$ podle pravidla 1 a věta 1 dává uvedené výsledky.

Může však nastat případ, že řád čísla $U$ je takový, že pro zvolené $u$ podle pravidla 1 je $U < u = 10^p$ a pro $u < U$ rovnice (6) se málo liší od rovnice (1). Ale řád čísla $U$ závisí na řádech čísel $\frac{r_{i+1} - r_i}{2}$. Zabývejme se proto v dalším otázkou, jak se mění přiřazení hodnot $r_i$ a $\varrho_i$ v případě, že vynecháme při určení čísla $U$ některý rozdíl $r_{j+1} - r_j$ proto, že je příliš malý. Je-li ale rozdíl $r_{j+1} - r_j$ příliš malý, znamená to, že buď kořeny $\xi_j$ a $\xi_{j+1}$ a podobně komplexně sdružené kořeny leží co do absolutní hodnoty blízko sebe, anebo dokonce leží v blízkém okolí, čili, že i jejich amplitudy se od sebe málo liší.

**Lemma.** *Nechť jsou $\xi_j$ a $\xi_k$ dva libovolné kořeny rovnice (1) s kladnou imaginární částí. Jestliže se jejich reálné části nerovnají, lze určit právě jedno $u = u_1$ tak, že transformací (4) přejdou v kořeny $\eta_j$ a $\eta_k$ takové, že jejich absolutní hodnoty $\varrho_j$ a $\varrho_k$ se rovnají; jestliže se jejich imaginární části nerovnají, lze určit právě jedno $u = u_2$ tak, že transformací (4) přejdou v kořeny $\eta_j$ a $\eta_k$ takové, že jejich absolutní hodnoty $\varrho_j$ a $\varrho_k$ se od sebe co nejvíce liší.*

V Gaussově rovině body $(u_1, 0)$ a $(u_2, 0)$ jsou průsečíky symetrály a spojnice bodů odpovídajících těmto kořenům s reálnou osou.

Podle tohoto lemmatu je zřejmé, že pro dva páry kořenů, jejichž absolutní hodnoty se od sebe málo liší a které leží v blízkém okolí, nedocílíme žádnou transformací (4), aby absolutní hodnoty kořenů transformovaných se od sebe mnoho lišily. Kořeny, které neleží v blízkém okolí se mohou transformovat v kořeny, jejichž absolutní hodnoty se mohou od sebe značně lišit.

**Věta 4.** *Nechť pro absolutní hodnoty kořenů rovnice (1) platí nerovnosti $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n$[1]) a dále nechť pro absolutní hodnoty dvojic kořenů*

$$\xi_j, \xi_{j+1}\,;\quad \xi_k, \xi_{k+1}\,;\ \ldots;\ \xi_m, \xi_{m+1} \tag{19}$$

*platí*

$$\frac{r_{j+1} - r_j}{2} = \varepsilon_j, \quad \frac{r_{k+1} - r_k}{2} = \varepsilon_k, \ldots, \frac{r_{m+1} - r_m}{2} = \varepsilon_m\,,$$

*kde čísla $\varepsilon_j, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_m$ jsou značně menší než číslo $u$ určené podle pravidla 1 a ostatní rozdíly $\dfrac{r_{i+1} - r_i}{2}$ $(i \neq j, k, \ldots, m)$ jsou větší než toto $u$.*

*Rozvineme-li (1) podle mocnin proměnné $y = x - u$, kde*

$$0 < u < U_1 = \tfrac{1}{2} \operatorname{Min}\,(r_{i+1} - r_i)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n - 1\,,\ i \neq j, k, \ldots, m \tag{20}$$

*(číslo $u$ je určeno podle pravidla 1) a vypočteme-li absolutní hodnoty $\varrho_i$ kořenů transformované rovnice (6), pak pro ně platí*

$$\begin{aligned} 0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_j, \varrho_{j+1} < \varrho_{j+2} < \ldots < \varrho_k, \varrho_{k+1} < \ldots \\ \ldots < \varrho_m, \varrho_{m+1} < \ldots < \varrho_n \end{aligned} \tag{21}$$

*a kořeny*

$$\xi_i,\ i \neq j, j + 1, k, k + 1, \ldots, m, m + 1 \tag{22}$$

*a k nim komplexně sdružené kořeny vypočteme z kvadratických rovnic*

$$x^2 + \frac{\varrho_i^2 - r_i^2 - u^2}{u} x + r_i^2 = 0\,,\ i \neq j, j + 1, \ldots, m, m + 1\,. \tag{23}$$

*Zbývající kořeny se nacházejí mezi kořeny kvadratických rovnic*

$$x^2 + \frac{\varrho_p^2 - r_q^2 - u^2}{u} x + r_q^2 = 0\,, \tag{24}$$

---

[1]) Jestliže by se některá $r_i$ rovnala, nemá to žádný význam pro další úvahy.

*kde $p$ a $q$ proběhnou všechny možné variace 2. třídy s opakováním ve dvojicích $j, j+1; k, k+1; \ldots; m, m+1$.*

Důkaz. Pro dvojice kořenů $\xi_p$ a $\xi_q$, pro něž platí $\frac{r_q - r_p}{2} \geqq U_1$, plyne jako ve větě 1, že $\varrho_p < \varrho_q$. Ale nerovnost (25) neplatí pouze pro $p = j, k, \ldots, m$, $q = p + 1$, takže si opět jednoznačně odpovídají $r_i$ a $\varrho_i$, pro něž $i \neq j, j+1, k, k+1, \ldots, m, m+1$. Pro kořeny $\xi_j$ různé od uvedených v (22) je tvrzení zřejmé.

Poznámka 2. Nerovnosti (21) jsou psány s ohledem na jednoznačné přiřazení absolutních hodnot $r_i$ a $\varrho_i$, takže o $\varrho_j$ a $\varrho_{j+1}$ nelze říci nic, než že obě leží mezi $\varrho_{j-1}$ a $\varrho_{j+2}$ atd.

Důsledek 1. Jestliže mezi absolutními hodnotami $r_i$ je jedna nebo více skupin o dvou nebo více hodnotách $r_i$, pro něž platí

$$\begin{aligned}
&\frac{r_{j+1} - r_j}{2} = \varepsilon_j' ; \quad \frac{r_{j+2} - r_{j+1}}{2} = \varepsilon_j'' ; \ldots ; \frac{r_{j+j'} - r_{j+j'-1}}{2} = \varepsilon_j^{(j')} ; \\
&\frac{r_{k+1} - r_k}{2} = \varepsilon_k' ; \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{r_{m+1} - r_m}{2} = \varepsilon_m' ; \ldots ; \frac{r_{m+m'} - r_{m+m'-1}}{2} = \varepsilon_m^{(m')} ,
\end{aligned} \tag{26}$$

a při tom čísla $\varepsilon_\mu^{(\nu)}$ jsou menší než číslo $u$ určené podle pravidla 1, pak pro určení $U_1$ ve (20) vezmeme pouze rozdíly po sobě jdoucích $r_i$ mimo uvedené v (26). Kořeny, jejichž absolutní hodnoty $r_i$ se nevyskytují ve vztazích (26), jsou mezi kořeny kvadratických rovnic (24), kde $p$ a $q$ probíhá všechny možné variace 2. třídy s opakováním ve skupinách

$$j, j+1, \ldots, j+j'; \; k, k+1, \ldots, k+k'; \; \ldots; \; m, m+1, \ldots, m+m' .$$

Předcházející úvahy nezávisí na tom, zda zvolíme transformaci (4) nebo transformaci $y = x + u$, kde $u$ bylo určeno podle věty 1 nebo 4.

Důsledek 2. Jestliže absolutní hodnoty $\varrho_i$ ve větě 4 splňují kromě nerovností (21) ještě nerovnosti

$$\varrho_j \leqq \varrho_{j+1} ; \quad \varrho_k \leqq \varrho_{k+1} ; \ldots ; \varrho_m \leqq \varrho_{m+1} , \tag{27}$$

pak pro hodnoty $\varrho_i$ v (27), pro něž nastane rovnost, máme opět jednoznačné přiřazení. Hodnoty $\varrho_i$, pro něž platí ostrá nerovnost, můžeme jednoznačně přiřadit, jestliže pro určité $i$ platí $u < \frac{\varrho_{i+1} - \varrho_i}{2}$. Jedná se vlastně o použití věty 1 pro přechod od $\varrho_i$ k $r_i$.

Předcházející výsledky závisí na počtu cifer aproximací absolutních hodnot kořenů. V dalším odhadneme počet cifer, na něž musíme tyto aproximace počítat, abychom kořeny určili s jistou přesností. Zaveďme si tuto definici:

**Definice 2.** *Říkejme, že dvě aproximace a a b čísel A a B stejných řádů q mají nejméně m cifer stejných, jestliže platí* $|a - b| < 10^{q-m+1}$; *je-li ještě* $|a - b| \geqq 10^{q-m}$, *říkejme, že aproximace a a b mají právě m cifer stejných.*

*Jestliže platí* $|A - a| < 10^{q-m+1}$, *říkejme, že aproximace a čísla A má m cifer správných.*

**Věta 5.** *Nechť* $r_i$ *je absolutní hodnota kořene* $\xi_i$ *rovnice* (1) *a* $\varrho_i$ *absolutní hodnota kořene* $\eta_i = \xi_i - u$ *rovnice* (6). *Nechť řád čísla* $r_i$ *je* $p_i$ *a číslo* $u = 10^p$, *p celé.*

*Je-li splněna nerovnost* $p \leqq p_i - K$, *K* celé, *pak číslo* $\varrho_i$ *má nejméně K prvních cifer stejných s číslem* $r_i$.

*Je-li splněna nerovnost* $p \geqq p_i + K$, *K celé, pak hodnota* $\varrho_i$ *se liší od u maximálně o* $10^{p-K-1}$.

Důkaz. Čísla $r_i - u$ a $r_i + u$ mají právě $K$ cifer stejných, takže podle (12) čísla $r_i$ a $\varrho_i$ mají nejméně $K$ cifer stejných a dále $|u - \varrho_i| < r_i < 10^{p_i+1} \leqq \leqq 10^{p-K+1}$. Odtud vidíme, že je-li $p$ pevně zvoleno, pak nejvíce stejných cifer mohou mít právě absolutní hodnoty $r_n$ a $\varrho_n$ a nejméně se bude lišit od $u$ hodnota $\varrho_1$.

Důsledek. Je-li řád čísla $U$ roven $p$ a řády čísel $r_1$ a $r_n$ rovny $p_1$ a $p_n$, potom při volbě $u = 10^p < U$ je třeba absolutní hodnoty $r_i$ a $\varrho_i$ počítat metodou Graeffeovou na $k + \lambda$ cifer, kde

$$k > K = \text{Max}\,(p_n - p,\ p - p_1)\,; \tag{28}$$

potom aproximace $r_i$, a $\varrho_i$ mají přibližně $K$ cifer shodných a čísla $\varrho_i$ se budou dostatečně lišit od hodnoty $u$; při tom $\lambda$ je počet nepřesných cifer, které obdržíme při výpočtu absolutních hodnot kořenů metodou Graeffeovou.[2]) Celkový počet přesných cifer absolutních hodnot $r_i$ bude $k$. Čísla $r_i$ a $\varrho_i$ mají všechny cifry stejné, když $2r_i \cos \varphi_i - u = 0$.

**Věta 6.** *Vypočteme-li absolutní hodnoty* $r_i$ *kořenů rovnice* (1) *na k správných cifer, kde k je určeno ve vzorci* (28), *pak koeficient lineárního členu rovnic* (9) *má* $\mu$ *a absolutní člen* $\nu$ *správných cifer; při tom platí*

$$k - K - 3 \leqq \mu \leqq k - K + 3\,,\quad k - 2 \leqq \nu \leqq k + 1\,. \tag{29}$$

Důkaz. Podle předpokladu jsou absolutní chyby absolutních hodnot $r_i$ kořenů rovnice (1) menší než $\Theta \,.\, 10^{p_i-k+1}$, $0{,}1 < \Theta \leqq 1$. Odtud plyne, že $r_i^2$ má přibližně chybu $2 \,.\, r_i \,.\, \Theta \,.\, 10^{p_i-k+1}$, takže platí

$$2 \,.\, 10^{2p_i-k} < 2 \,.\, r_i \,.\, \Theta \,.\, 10^{p_i-k+1} < 10^{2p_i-k+3}\,.$$

Pro počet $\nu$ správných cifer čísla $r_i^2$, které je absolutním členem $i$-té rovnice v (9), obdržíme $k - 2 \leqq \nu \leqq k + 1$.

---

[2]) [1], str. 301.

Podobně se dokáže, že má-li $r_i$ a $\varrho_i$ právě $K$ stejných cifer, potom $r_i^2$ a $\varrho_i^2$ může mít $K - 2$, $K - 1$, $K$, $K + 1$ stejných cifer a tedy pro počet $\mu$ správných cifer koeficientu lineárního členu platí nerovnosti (29).

Aby bylo možné předcházejících výsledků využít, je třeba znát řády čísel $r_1$, $r_n$ a $U$, resp. $u$ v nerovnosti (28).

**Pravidlo 2.** Máme-li určen řád čísla $u$ podle pravidla 1, při čemž počet cifer $q$ nebyl zatím pevně zvolen, a určíme-li horní a dolní ohraničení absolutních hodnot kořenů, můžeme z těchto údajů určit $K$.[3]) Poněvadž však pravidla pro určení ohraničení absolutních hodnot kořenů mohou dát dosti hrubé odhady, může být číslo $K$ vypočtené na základě těchto ohraničení příliš velké a výpočet absolutních hodnot kořenů na $k = \mu + K + 3$ cifer, pro předem zvolené $\mu$, zbytečně dlouhý.

Jestliže $K$ takto určené je příliš velké, můžeme je určit přesněji a tím zmenšit takto:

Danou rovnici řešíme Graeffeovou metodou a koeficienty rovnic $R^2$, $R^4$, $R^8$, ... počítáme jen užitím logaritmického pravítka. Tímto zběžným výpočtem určíme absolutní hodnoty kořenů alespoň na tři cifry a tedy alespoň na dvě přesné cifry.[4]) Z těchto absolutních hodnot můžeme určit řády čísel $r_1$, $r_n$ a $U$ a podle (28) číslo $K$.

Počet cifer, na něž budeme počítat koeficienty rovnice (6′) a rovnic $R^2$, $R^4$, ..., zvolíme větší nebo roven $\mathrm{Max}\,(q, k + \lambda)$.

Poznámka 3. Jsou-li splněny předpoklady věty 4, resp. jejího důsledku 1, zůstávají úvahy o počtu cifer stejné. Číslo $U$ je nahrazeno číslem $U_1$; podle (28) číslo $p_n - p + \lambda$ se případně zmenší a číslo $p - p_1$ případně zvětší, neboť řád $U_1$ je větší nebo roven řádu čísla $U$.

Předcházející výsledky můžeme shrnout do následujícího pravidla:

**Pravidlo.** Podle pravidla 1 a 2 určíme počet cifer na něž budeme počítat koeficienty rovnic $R^2$, $R^4$, $R^8$, ... pro rovnici (1) a (6′), aby koeficient v rovnicích (9) u lineárního členu byl určen na $\mu$ a absolutní člen na $\nu$ přesných cifer.

Danou rovnici (1) řešíme metodou Graeffeovou a určíme $U$ podle relace (5), resp. (5′). Podle pravidla 1 určíme nyní vhodný řád čísla $u$ pro rozvoj rovnice (1) podle mocnin proměnné $y = x \pm u$. Jestliže $u$ určené podle pravidla 1 splňuje nerovnost $0 < u < U$, potom věta 1 dává uvedené výsledky, při čemž počty správných cifer koeficientů v rovnicích (9) odhadneme podle věty 6.

Jestliže $u$ určené podle pravidla 1 nesplňuje nerovnost $0 < u < U$, aplikujeme větu 4 resp. její důsledky a počet správných cifer koeficientů kvadratických rovnic určíme podle věty 6.

---

[3]) [4], díl II. § 6; [5], str. 338 n.
[4]) [1], str. 301.

Tab. 1.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R^{2}$ | 1 | $-153^{1}$ | $135^{2}$ | $-653^{2}$ | $206^{3}$ | $-326^{3}$ | $365^{3}$ | $-223^{3}$ | $915^{2}$ |
| $R^{4}$ | 1 | $-360^{1}$ | $234^{3}$ | $-361^{4}$ | $905^{5}$ | $-176^{6}$ | $256^{6}$ | $-171^{6}$ | $837^{5}$ |
| $R^{8}$ | 1 | $-338^{3}$ | $469^{6}$ | $-289^{9}$ | $704^{11}$ | $-141^{12}$ | $206^{12}$ | $-136^{12}$ | $701^{11}$ |
| $R^{16}$ | 1 | $204^{6}$ | $381^{12}$ | $136^{18}$ | $488^{23}$ | $-904^{23}$ | $139^{24}$ | $-103^{24}$ | $491^{23}$ |
| $R^{32}$ | 1 | $-346^{12}$ | $995^{24}$ | $-187^{36}$ | $237^{47}$ | $-540^{47}$ | $548^{47}$ | $-302^{47}$ | $241^{47}$ |
| $R^{64}$ | 1 | $-793^{24}$ | $983^{49}$ | $-122^{72}$ | $562^{94}$ | $-234^{94}$ | $885^{94}$ | $-173^{95}$ | $581^{94}$ |
| $R^{128}$ | 1 | $[-134^{50}]$ | $964^{99}$ | $[382^{134}]$ | $316^{189}$ | $[-940^{189}]$ | $626^{189}$ | $[197^{190}]$ | $338^{189}$ |

Tab. 2.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R^{2}$ | 1 | $152\,600^{1}$ | $134\,6825^{2}$ | $-653\,220^{2}$ | $206\,030^{3}$ | $-325\,7055^{3}$ | $365\,258^{3}$ | $-223\,124^{3}$ | $915\,0625^{2}$ |
| $R^{4}$ | 1 | $-364\,974^{1}$ | $232\,371^{3}$ | $-361\,762^{4}$ | $907\,299^{5}$ | $-177\,392^{6}$ | $257\,7405^{6}$ | $-170\,6246^{6}$ | $837\,339^{5}$ |
| $R^{8}$ | 1 | $-331\,536^{3}$ | $457\,355^{6}$ | $-278\,355^{9}$ | $706\,700^{11}$ | $-141\,060^{12}$ | $210\,896^{12}$ | $140\,505^{12}$ | $701\,137^{11}$ |
| $R^{16}$ | 1 | $184\,451^{6}$ | $387\,382^{12}$ | $129\,324^{18}$ | $491\,591^{23}$ | $-983\,196^{23}$ | $147\,477^{24}$ | $-983\,174^{23}$ | $491\,593^{23}$ |
| $R^{32}$ | 1 | $-434\,542^{12}$ | $112\,189^{25}$ | $-213\,620^{36}$ | $241\,664^{47}$ | $-483\,290^{47}$ | $724\,967^{47}$ | $-483\,342^{47}$ | $241\,664^{47}$ |
| $R^{64}$ | 1 | $-355\,513^{24}$ | $107\,782^{50}$ | $-859\,058^{71}$ | $584\,015^{94}$ | $-116\,828^{95}$ | $175\,192^{95}$ | $-116\,735^{95}$ | $584\,015^{94}$ |
| $R^{128}$ | 1 | $-202\,925^{50}$ | $116\,110^{100}$ | $-118\,513^{145}$ | $341\,074^{189}$ | $681\,417^{189}$ | $102\,379^{190}$ | $683\,589^{189}$ | $341\,074^{189}$ |
| $R^{256}$ | 1 | $[179\,566^{100}]$ | $134\,8105^{200}$ | $[612\,491^{289}]$ | $116\,331^{379}$ | $[-234\,047^{379}]$ | $349\,872^{379}$ | $[-231\,082^{379}]$ | $116\,331^{379}$ |

Tab. 3.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R^{2}$ | 1 | $-151\,400^{1}$ | $134\,772^{2}$ | $-658\,005^{2}$ | $205\,849^{3}$ | $-324\,324^{3}$ | $368\,646^{3}$ | $-233\,3205^{3}$ | $930\,975^{2}$ |
| $R^{4}$ | 1 | $-403\,244^{1}$ | $235\,608^{3}$ | $-310\,506^{4}$ | $894\,121^{5}$ | $-183\,889^{6}$ | $228\,851^{6}$ | $-142\,016^{6}$ | $866\,714^{5}$ |
| $R^{8}$ | 1 | $-308\,610^{3}$ | $483\,516^{6}$ | $-310\,537^{6}$ | $695\,926^{11}$ | $-626\,784^{11}$ | $156\,414^{12}$ | $-195\,011^{12}$ | $751\,193^{11}$ |
| $R^{16}$ | 1 | $-146\,307^{5}$ | $560\,366^{12}$ | $291\,736^{13}$ | $480\,435^{23}$ | $-177\,209^{24}$ | $104\,749^{24}$ | $145\,299^{24}$ | $564\,291^{23}$ |
| $R^{32}$ | 1 | $-111\,859^{13}$ | $332\,155^{25}$ | $312\,660^{36}$ | $230\,828^{47}$ | $213\,381^{48}$ | $678\,910^{48}$ | $929\,002^{47}$ | $318\,424^{47}$ |
| $R^{64}$ | 1 | $586\,934^{25}$ | $117\,368^{51}$ | $-555\,851^{72}$ | $532\,816^{94}$ | $141\,892^{96}$ | $422\,743^{97}$ | $-346\,058^{96}$ | $101\,394^{95}$ |
| $R^{128}$ | 1 | $[116\,010^{51}]$ | $137\,818^{102}$ | $[-941\,741^{145}]$ | $283\,893^{189}$ | $-246\,307^{192}$ | $179\,695^{195}$ | $340\,965^{192}$ | $102\,807^{190}$ |
| $R^{256}$ | — | — | — | — | $805\,952^{378}$ | $[-413\,612^{384}]$ | $322\,905^{390}$ | $[-357\,852^{385}]$ | $105\,693^{380}$ |

Uvedený postup můžeme, je-li to výhodnější, aplikovat případně na rovnici reciprokou k rovnici (1).

**Příklad 2.** Dána rovnice

$$x^8 + 0{,}2x^7 + 7{,}65x^6 - 0{,}9x^5 + 37{,}9x^4 - 0{,}9x^3 + 36{,}9x^2 - 1{,}1x + 30{,}25 = 0\,,$$

která má vesměs komplexní kořeny. Určeme její kořeny tak, aby koeficient u lineárního členu kvadratických rovnic, jimž tyto kořeny hoví, měl alespoň dvě cifry přesné.

Výpočty prováděnými pouze logaritmickým pravítkem a použitím tabulky čtverců čísel 1—1000 obdržíme pro koeficienty rovnice $R^2$, $R^4$, ..., tabulku 1.

Během výpočtu se rovnice $R^{16}$ rozštěpila. Při tom koeficienty druhé části ($488^{23}$, $-904^{23}$, $139^{24}$, $-103^{24}$, $491^{23}$) mají od středního na obě strany přibližně stejné absolutní hodnoty a kromě toho koeficient druhý a čtvrtý je přibližně roven dvojnásobku prvního a koeficient třetí trojnásobku prvního. Avšak rovnice $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ se při výpočtu Graeffeovou metodou nemění a její oba páry kořenů mají absolutní hodnoty rovné 1. Volíme-li $r_1 = r_2$, obdržíme z tabulky 1:

$$r_1 = r_2 = \sqrt[512]{\frac{338\,.\,10^{189}}{316\,.\,10^{189}}} = 1{,}000\ldots,\quad r_3 = \sqrt[256]{\frac{316\,.\,10^{189}}{964\,.\,10^{99}}} = 2{,}458\ldots,$$

$$r_4 = \sqrt[256]{964\,.\,10^{99}} = 2{,}236\ldots,$$

takže $U \approx 0{,}111$.

Podle pravidla 1 bylo by nejlépe volit $u = 1$; ale abychom určili jednoznačně kvadratické rovnice pro všechny kořeny, budeme volit $u < 0{,}111$ a tedy řádu $p = -1$. Z relace (28) plyne $K = 1$ ($p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$). Podle pravidla 2 za předpokladu $\mu \geqq 2$ obdržíme $k \geqq 6$, t. zn., volíme-li $\lambda = 1$, je třeba koeficienty rovnic $R^2$, $R^4$, ... počítat na 7 cifer. Výpočet však stačí provést na 6 cifer, neboť v tomto případě, při volbě $\lambda = 1$, čísla $r_i$ budou mít vesměs chyby $\Theta\,.\,10^{-4}$ $(0{,}1 < \Theta < 1)$ a počet správných cifer bude 5. Chyby čísel $r_i^2$ jsou po řadě menší než $2\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, $2\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, $4{,}5\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, $4{,}92\,.\,\Theta\,.\,10^{-4}$, čili vesměs menší než $0{,}5\,.\,10^{-3}$. Zaokrouhlíme-li čísla $r_i^2$ na tři desetinná místa, budou mít jistě 4 cifry správné. Dá se tedy v případě, že počítáme na 6 cifer, odhadnout počet $\mu$ správných cifer tak, že je $\mu \approx 3$. V tabulce 2 jsou koeficienty rovnic $R^2$, $R^4$, ... uvedeny.

Rovnice $R^{32}$ se rozpadla ve dvě rovnice 4. stupně; koeficienty druhé z těchto rovnic mají tytéž vlastnosti jako koeficienty druhé rozštěpené rovnice $R^{16}$ v tabulce 1, jak plyne z toho, že dvojnásobek resp. trojnásobek prvního koeficientu $241\,664^{47}$ je $483\,328^{47}$, resp. $724\,992^{47}$, takže, položíme-li $r_1 = r_2$, obdržíme

$$r_1^2 = r_2^2 = 1{,}00000\,,\quad r_3^2 = 4{,}99999\,,\quad r_4^2 = 6{,}05002\,.$$

Transformací $x = y + 0{,}1$ obdržíme rovnici

$$y^8 + y^7 + 8{,}07y^6 + 3{,}788y^5 + 38{,}611\,5y^4 + 14{,}324\,26y^3 + 38{,}906\,545y^2 + \\ + 6{,}404\,611\,2y + 30{,}511\,888\,68 = 0\,.$$

Při jejím řešení metodou Graeffeovou obdržíme tabulku 3. Rovnice $R^{32}$ se rozštěpila ve dvě rovnice 4. stupně, z nichž u první postup skončil u rovnice $R^{128}$ a u druhé u $R^{256}$. Z tabulky 3 obdržíme

$$\varrho_1^2 = 0{,}910\,003\,, \quad \varrho_2^2 = 1{,}110\,00\,, \quad \varrho_3^2 = 4{,}810\,02\,, \quad \varrho_4^2 = 6{,}279\,94\,.$$

Pro kořeny dostáváme kvadratické rovnice

$$x^2 - 0{,}999\,97x + 1{,}000\,00 = 0\,, \quad x^2 + 1{,}000\,00x + 1{,}000\,00 = 0\,,$$
$$x^2 - 1{,}999\,7x + 4{,}999\,99 = 0\,, \quad x^2 + 2{,}199\,2x + 6{,}050\,02 = 0\,,$$

které dobře odpovídají rovnicím s přesnými koeficienty

$$x^2 - x + 1 = 0\,, \quad x^2 + x + 1 = 0\,,$$
$$x^2 - 2x + 5 = 0\,, \quad x^2 + 2{,}2x + 6{,}05 = 0\,,$$

a je dokonce $\mu = 4$ a $\nu = 5$.

## LITERATURA


[1] *V. Láska - V. Hruška*: Teorie a praxe numerického počítání, Praha 1934.

[2] *А. Н. Крылов*: Лекции о приближенных вычислениях, Москва 1950.

[3] *C. Runge - H. König*: Numerisches Rechnen, Berlin-Leipzig 1933.

[4] *O. Perron*: Algebra, Berlin-Leipzig 1933.

[5] *V. Kořínek*: Základy algebry, Praha 1953.


## Резюме

## К ОДНОМУ МЕТОДУ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МНОГИМИ ПАРАМИ МНИМЫХ КОРНЕЙ ПО МЕТОДУ ГРЕФФЕ


ВЛАДИМИР ГОРАК (Vladimír Horák), Брно.



(Поступило в редакцию 6/X 1956 г.)


Пусть (1)–алгебраическое уравнение (с вещественными коэффициентами) $2n$-ой степени с одними мнимыми корнями (вещественные корни не имеют влияния на результаты), абсолютные величины которых $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Если разложить (1) по степеням переменной $y = x - u$ или $y = x + u$ ($u$-вещественное) и если абсолютные величины корней нового уравнения

(6) будут $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$, то корни уравнения (1) можно выбрать из корней $n^2$ квадратных уравнений

$$x^2 + \frac{\varrho_p^2 - r_q^2 - u^2}{u} x + r_q^2 = 0; \, p, q = 1, 2, \ldots, n \tag{I}$$

В теоремах 1, 4 и в следствиях последней определены достаточные условия для числа $u$, чтобы из системы (I) можно было однозначно выбрать уравнения, корни которых удовлетворяют уравнению (1), и уравнения, корни которых не удовлетворяют уравнению (1).

Если вычислить абсолютные величины корней уравнений (1) и (6) по методу Греффе на $q$ знаков, можно $u$ выбрать по правилу 1 так, чтобы уравнение, которое мы получим из уравнения (6), закругляя его коэффициенты на $q$ цифр, отличалось от уравнения (1) и тоже от уравнения $(y + u)^n = 0$.

В выражениях (29) определены числа $\mu$ и $\nu$ верных цифр (определение 2) коэффициентов линейного и абсолютного членов квадратных уравнений, если абсолютные величины $r_i$ имеют $k$ верных цифр. Число цифр, до которого мы вычисляем коэффициенты уравнений $R^2, R^4, R^8, \ldots$, если дано $\mu$, можно определить по правилу 2. Ход вычисления описан в последнем правиле.

## Zusammenfassung

## ZU EINER LÖSUNGSMETHODE DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN MIT VIELEN KOMPLEXEN WURZELPAAREN NACH DEM GRAEFFESCHEN VERFAHREN

VLADIMÍR HORÁK, Brno.

(Eingegangen am 6. Oktober 1956.)

Es sei (1) eine algebraische Gleichung (mit reellen Koeffizienten) $2n$-ten Grades mit durchwegs komplexen Wurzeln (die reellen Wurzeln haben keinen Einfluss auf die Allgemeinheit), welche die absoluten Beträge $r_1, r_2, \ldots, r_n$ haben. Wenn man (1) nach den Potenzen von $y = x - u$ oder $y = x + u$ ($u$ reelle Zahl) entwickelt und wenn $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die absoluten Beträge der Wurzeln der neuen Gleichung (6) sind, dann kann man die Wurzeln der Gleichung (1) aus den $n^2$ quadratischen Gleichungen

$$x^2 + \frac{\varrho_p^2 - r_q^2 - u^2}{u} x + r_q^2 = 0; \; p, q = 1, 2, \ldots, n \tag{I}$$

auswählen.

In den Sätzen 1, 4 und den Folgerungen des Satzes 4 sind hinreichende Bedingungen für die Zahl $u$ enthalten, damit man aus dem System (I) die Gleichungen, deren Wurzeln die Gleichung (1) erfüllen, und die Gleichungen, deren Wurzeln die Gleichung (1) nicht erfüllen, auswählen kann.

Wenn man die absoluten Beträge $r_i$ und $\varrho_i$ der Wurzeln nach dem Graeffeschen Verfahren auf $q$ Ziffern ermittelt, kann man die Zahl $u$ nach der Regel 1 so wählen, dass sich die Gleichung, welche aus der Gleichung (6) durch Abrunden ihrer Koeffizienten auf $q$ Ziffern entsteht, von der Gleichung (1) und auch von der Gleichung $(y + u)^n = 0$ unterscheidet.

In den Formeln (29) ist die Anzahl $\mu$ und $\nu$ der richtigen Ziffern (Definition 2) der Koeffizienten des linearen und absoluten Gliedes der quadratischen Gleichungen bestimmt, wenn die absoluten Beträge $r_i$ $k$ richtige Ziffern haben. Die Anzahl der Ziffern, auf welche man die Koeffizienten der Gleichungen $R^2, R^4, \ldots$ ausrechnet, wenn $\mu$ gegeben ist, bestimmt man nach der Regel 2. Das ganze Verfahren ist in der letzten Regel zusammengefasst.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

# ÚLOHY A PROBLÉMY

**Řešení úlohy 7.** (autor *Ilja Černý*) z Časopisu pro pěst. mat., *81* (1956), 470.

Ke každému přirozenému $n$ sestrojme v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ řídkou uzavřenou množinu $D_n$ o míře větší než $1 - \frac{1}{n}$ a funkci $f_n$ tak, aby platilo $f_n(0) = 0$ a $|f_n'(x)| \leqq 2 \cdot 3^{-n}$ pro každé $x \in \langle 0, 1\rangle$, aby v každém bodě $x \in D_n$ byla oscilace funkce $f_n'$ větší než $3^{-n}$ a aby funkce $f_n'$ byla spojitá na množině $\langle 0, 1\rangle - D_n$. Položme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Zvolme $x \in D$; buď $n$ nejmenší index takový, že $x \in D_n$. Funkce $f_1', \ldots, f_{n-1}'$ jsou v bodě $x$ spojité, funkce $f_n'$ má v bodě $x$ oscilaci větší než $3^{-n}$ a platí $\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k'| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-k} = 3^{-n}$. Funkce $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_k'$ je tedy v bodě $x$ nespojitá. Vidíme, že funkce $f$ má omezenou derivaci a množina bodů nespojitosti funkce $f'$ má míru 1.

*Jan Mařík*, Praha.

**7.** Nechť $M$, $N$ jsou úplně uspořádané množiny. Pišme $M \underset{1}{>} N$, jestliže existuje isotonní*) zobrazení množiny $M$ na množinu $N$, a pišme $M \underset{2}{>} N$, jestliže existuje podmnožina $M' \subset M$ podobná množině $N$.

Pomocí axiomu výběru lze dokázat, že platí

$$M \underset{1}{>} N \Rightarrow M \underset{2}{>} N \tag{1}$$

pro každé $M$, $N$.

Má-li množina $M$ příp. $N$ ordinální typ $\lambda$ příp. $\eta$, potom, jak ukázal M. Sekanina, obrácení implikace (1) neplatí. Má-li však množina $M$ příp. $N$ na př. ordinální typ: a/ $\omega 2$ příp. $\omega$, b/ $(\omega^*)2$ příp. $\omega^*$, c/ $(\omega^*)2 + \omega 2$ příp. $\omega^* + \omega$, snadno se dokáže, že obrácení implikace (1) platí.

a) *Jaké jsou nutné a postačující podmínky pro ordinální typy množin $M$, $N$, aby platilo obrácení implikace* (1)?

Pro dobře uspořádané množiny $M$, $N$ platí

$$M \underset{2}{>} N,\ N \underset{2}{>} M \Rightarrow M \cong N\,, \tag{2}$$

ale existují $M$, $N$ takové, že (2) neplatí.

*) Viz G. Birkhoff, Теория структур, str. 19.

b) *Pro jaké ordinální typy množin $M$, $N$ platí implikace* (2)?

Z (1) a (2) plyne, že pro dobře uspořádané množiny $M$, $N$ platí

$$M \underset{1}{>} N,\ N \underset{1}{>} M \Rightarrow M \cong N\,, \tag{3}$$

ale existují $M$, $N$ takové, že (3) neplatí.

c) *Pro jaké ordinální typy množin $M$, $N$ platí implikace* (3)?

*Karek Čulík*, Brno.

**8.** V článku „K theorii vícerozměrného integrálu", Čas. pro pěst. mat. *80* (1955), 400—414 dokázal jsem tuto větu: *Buď $Q$ dvourozměrný interval, $a \in Q$. Nechť existuje vlastní limita* $\lim \int_{Q-I} f(x, y)\, dx\, dy = A$, *kde* $I \to a$, $a \in \operatorname{int} I$. *Potom existuje též* $\int_Q f(x, y)\, dx\, dy$ *a rovná se* $A$ (je míněn Perronův integrál).

Rozumíme-li nyní objemem konečnou nezápornou aditivní funkci intervalu, můžeme v podstatě stejným způsobem dokázat podobnou větu i pro integrály podle objemu, který je součinem jednorozměrných spojitých objemů. Rozhodněte, zda platí taková věta i pro případ objemu $V$, slabě spojitého v bodě $a$ (t. j. $\lim V(I) = 0$ pro $I \to a$).

*Karel Karták*, Praha.

**9.** Najděte nějakou (dosti obecnou) postačující podmínku k tomu, aby k dané funkci $f$ existovala primitivní funkce. (Nutnou podmínkou je na př., aby funkce $f$ byla funkcí 1. Baireovy třídy a aby v každém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ nabývala každé hodnoty mezi $f(\alpha)$ a $f(\beta)$.)

*Karel Karták*, Praha.

**10.** Buď $\mathfrak{M}$ nespočetný systém částí intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, z nichž každá má kladnou vnější míru. Rozhodněte, zda existuje bod $x \in \langle 0, 1 \rangle$, který leží v nekonečně mnoha množinách ze systému $\mathfrak{M}$.

Poznámky. 1. Řešení úlohy je kladné, jestliže všechny množiny ze systému $\mathfrak{M}$ jsou měřitelné.

2. Je-li každá množina $M \in \mathfrak{M}$ otevřená, existuje bod, který leží v nespočetně mnoha prvcích systému $\mathfrak{M}$.

3. Z hypothesy kontinua snadno plyne existence takového (nespočetného) systému $\mathfrak{M}$, že každý bod intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ leží jen ve spočetně mnoha množinách z $\mathfrak{M}$ a že pro každé $M \in \mathfrak{M}$ je množina $\langle 0, 1 \rangle - M$ spočetná.

*Jan Mařík*, Praha.

**11.** Jest charakterisovat (a na příkladech ilustrovat) všechna uspořádaná komutativní algebraická t. zv. *logaritmická tělesa*, t. j. taková tělesa, která stejně jako těleso reálných čísel mají aditivní grupu všech prvků isomorfní a podobnou s multiplikativní grupou všech kladných prvků.

*L. Rieger*, Praha.

**12.** Budiž $G$ Abelova lokálně kompaktní topologická grupa s invariantn í (Haarovou) mírou. Grupovým okruhem $\mathfrak{R}_G$ se pak rozumí okruh všech komplexních, měřitelných a absolutně integrovatelných funkcí $f$ definovaných na $G$ při následujících definicích sčítání a násobení:

$$f + g = h \text{ značí } f(x) + g(x) = h(x) \qquad \text{pro každé } x \in G\,,$$
$$f \,.\, g = h \text{ značí } h(x) = \int_G f(x-y)\, g(y)\, dy \text{ pro každé } x \in G\,.$$

Tento okruh $\mathfrak{R}_G$ je dokonce normovaným okruhem při normě $\|f\| = \int_G |f(x)|\, dx$ (viz *Гельфанд И. И.*, *Райков Д. А.* и *Шилов Г. Е.*, Коммутативные нормированние кольца, Успехи мат. наук 1: 2 (12), (1946), 48—148).

Uvažme podokruh $\mathfrak{R}_G^*$ okruhu $\mathfrak{R}_G$ těch funkcí $f^* \in \mathfrak{R}_G$, které jsou mimo jistou kompaktní množinu $\mathfrak{M}_{f^*} \subseteq G$ (t. zv. kompaktní nosič funkce $f^*$) identicky rovny 0. Otázka zní:

*Kdy $\mathfrak{R}_G^*$ má a kdy nemá dělitele nuly?*

Poznámka. 1. Autor problému využívá této příležitosti, aby doznal, že jeho tvrzení (ohlášené v referátě „Poznámky k operátorovému počtu Mikusińského" dne 5. 12. 1955), že okruh $\mathfrak{R}_G$ nemá dělitelů nuly v případě, když $G$ je aditivní grupa reálných čísel, je nesprávné. (Možno totiž nepřímým jednoduchým způsobem udat v tomto okruhu $\mathfrak{R}_G$ dělitele nuly pomocí Fourierovy transformace.)

2. Na druhé straně příslušný podokruh $\mathfrak{R}_G^*$ (je-li stále $G$ aditivní grupa reálných čísel) dělitele nuly nemá, jak plyne snadno z věty Titchmarshovy (viz na př. *J. Mikusiński*: Rachunek operatorów). Ovšem v případě, že $G$ je konečná, $\mathfrak{R}_G^*$ dělitele nuly má. Je tedy na místě domněnka:

*Okruh $\mathfrak{R}_G^*$ nemá dělitele nuly tehdy a jen tehdy, jestliže $G$ je aperiodická* (t. j. každý její nenulový prvek je nekonečného řádu).

*L. Rieger*, Praha.

**13.** Nechť $k \geqq d$ jsou daná přirozená čísla a nechť posloupnost celých čísel $d_i$, $i = 1, 2, \ldots$ je definována podmínkami $d_1 = d$, $0 < d_{i+1} < d_i$ a $k = n_i d_i + d_{i+1}$, kde $n_i$ je vhodné přirozené číslo. Pak poslední definované číslo je $d_p$, kde $p \geqq 1$, pro něž platí $d_p \mid k$.

a) Udejte nutné a postačující podmínky pro to, aby $d_p = 1$!

Nutnou podmínkou na příklad je, aby $(k, d) = 1$. Kdyby totiž bylo $(k, d) > 1$, pak
$(k, d_i) > 1 \Rightarrow (k, d_{i+1}) > 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, p-1$, takže $d_p = (k, d_p) > 1$. Tato podmínka však není postačující, neboť pro $k = 27$ a $d = 4$ je $p = 2$ a $d_p = 3$, ačkoliv $(27,4) = 1$.

Postačující podmínkou je, aby $k$ bylo prvočíslem a $d \neq k$, ale to zase není podmínkou nutnou, neboť pro $k = 9$ a $d = 4$ je $p = 2$ a $d_p = 1$.

b) Udejte hodnotu čísla $d_p$ v závislosti na $k$, $d$!

c) Udejte nutné a postačující podmínky pro $k$ a $d$, aby $p = r$, kde $r$ je předem dané přirozené číslo!

*Karel Čulík*, Brno.

**14.** *Incidenční maticí* se rozumí matice vytvořená z nul a jedniček. O dvou incidenčních maticích téhož typu řekneme, že jsou *silně ekvivalentní*, jestliže jednu lze vytvořit z druhé vhodnou výměnou jejích řádků mezi sebou a sloupců mezi sebou.

Nechť $m/n$ je předepsaný typ incidenční matice (t. j. $m$ příp. $n$ udává počet jejích řádků příp. sloupců).

a) Určete počet $\varphi_1(m/n)$ incidenčních matic typu $m/n$, které (I) nejsou silně ekvivalentní, (II) nejsou přímým součtem dvou incidenčních matic a (III) nemají žádné dva řádky ani žádné dva sloupce stejné!

b) Určete počet $\varphi_2(m/n)$ příp. $\varphi_3(m/n)$ příp. $\varphi_4(m/n)$ incidenčních matic typu $m/n$, které splňují (I) příp. (I) a (II) příp. (I) a (III)!

c) Najděte vztahy mezi funkcemi $\varphi_i(m/n)$ pro $i = 1, 2, 3, 4$.

Číslo $\varphi_1(m/n)$ na příklad udává počet neisomorfních částečně uspořádaných množin délky 2, které mají $m$ maximálních a $n$ minimálních prvků a které jsou souvislé (viz J. Hashimoti: On direct product decomposition of partially ordered sets, Ann. of. Math. *54* (1951)) a jednoduché (totiž jednoduché jsou jejich Hasseovy diagramy jako 2-rozměrné konečné sestavy, viz K. Čulík: Theorie zobecněných konfigurací, Práce brněnské základny ČSAV, spis 355, XXIX (1957)).

*Karel Čulík*, Brno.

# REFERÁTY

## EINIGE FRAGEN DER APPROXIMATIONSTHEORIE

(Referát o přednášce dr GÉZY FREUDA proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 6. dubna 1957.)

Přednášející předvedl důkaz následující věty:

*Nechť $f$ jest funkce spojitá na celé přímce, periodická s periodou $2\pi$. Nechť $f$ má spojitou derivaci v každém bodě. Existuje absolutní konstanta $k$ s touto vlastností: Nechť $P_n$ je posloupnost trigonometrických polynomů stupně $\leqq n$, nechť $\gamma_n$ jsou čísla $\geqq 1$ a nechť platí*

$$|f - P_n| \leqq \gamma_n E_n(f)\,.$$

Potom platí

$$|f' - P_n'| \leqq k\gamma_n\, E_n(f')\,.$$

Důkaz. Jestliže $s_n$ znamená $n$-tý parciální součet Fourierovy řady pro $f$, označíme $V_n(f)$ průměr $\dfrac{s_n + \ldots + s_{2n-1}}{n}$. Platí potom podle věty de la Vallée-Poussinovy odhad $|f - V_n(f)| \leqq 4E_n(f)$. Dále se dá za uvedených předpokladů dokázati, že $V_n(f') = V_n'(f)$. Je potom

$$f' - P_n' = f' - V_n(f') + [V_n(f) - P_n]'\,.$$

Rozdíl $f' - V_n(f')$ je odhadnut číslem $4E_n(f')$. Podle Bernsteinovy věty bude druhý rozdíl odhadnut $2n$-násobkem normy polynomu $V_n(f) - P_n$. Je však

$$|V_n(f) - P_n| \leqq |V_n(f) - f| + |f - P_n| \leqq (4 + \gamma_n)\, E_n(f)\,.$$

Je tedy

$$|f' - P_n'| \leqq 4E_n(f') + 2n(4 + \gamma_n)\, E_n(f)\,.$$

Podle nerovnosti, dokázané nedávno STEČKINEM, platí $E_n(f) \leqq \dfrac{A}{n}\, E_n(f')$, odkud ihned plyne uvedený odhad.

Přednášející se zmínil ještě o některých podobných větách týkajících se lokalisace aproximace a v diskusi podal důkaz věty Stečkinovy a zodpověděl řadu dotazů.

*Vlastimil Pták*, Praha.

## O ZOBECNĚNÍ JISTÝCH VĚT O VNOŘENÍ

(Referát o přednášce S. L. SOBOLEVA, proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 15. dubna 1957, o dosud neuveřejněných výsledcích z funkcionální analysy.)

Přednášející nejdříve připomněl, že problematika, kterou se zabýval, přirozeně vznikla při studiu existence zobecněných řešení kvasilineární hyperbolické rovnice

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

$\left(A_{ij}\right.$ a $F$ jsou funkce proměnných $x_1, \ldots, x_n, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right)$. Vyslovil definici zobecněných derivací a prostorů $W_p^l$.

Vlastním obsahem přednášky bylo pak zobecnění těchto dvou vět.

I. *Buď $\varphi$ reálná funkce $n$ proměnných definovaná v oblasti $\Omega$, $\varphi \in W_p^l$, $lp > n$. Potom je $\varphi \in C$ a existuje konstanta (nezávislá na $\varphi$) tak, že $\|\varphi\|_C \leqq M\|\varphi\|_{W_p{}^l}$.*

II. *Má-li $\varphi$ týž význam jako ve větě* I *a je-li $lp \leqq n$, potom $\varphi \in L_q$ na každé $s$-rozměrné nadrovině, kde $s > n - lp$ a $q = \frac{sp}{n - lp}$.*

Tyto dvě věty hrají důležitou roli nejenom v theorii hyperbolických rovnic, nýbrž v celé matematické fysice, při řešení eliptických rovnic variační metodou, při formulaci okrajových úloh pro polyharmonickou rovnici atd.

Přednášející ukázal několik jednoduchých objasňujících příkladů na věty I a II a zabýval se potom případem, kdy hodnoty funkce $\varphi$ leží v Banachově prostoru $X$. Zavedl definici integrálu pro „abstraktní" funkce (na příkladě ukázal, že definice Bochnerova je pro jeho účely příliš úzká). Pro schodovitou funkci $\varphi$ je přirozené definovat integrál

$$\int_\Omega \varphi(P)\, \mathrm{d}\Omega = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, m(E_i)\,; \quad \varphi(P) = \alpha_i \text{ na } E_i\,, \quad \bigcup_1^k E_i = \Omega\,.$$

Je-li $\|\varphi\|_\Phi$ norma zobrazení $\varphi$ taková, že pro $\varepsilon > 0$ existuje $\delta$ tak, že pro $\|\varphi\|_\Phi < \delta$ je $\|\int \varphi(P)\, \mathrm{d}\Omega\|_X < \varepsilon$ pro každou schodovitou funkci $\varphi$, lze rozšířit operátor integrace na funkce, které v normě prostoru $\Phi$ jsou limitou funkcí schodovitých. Pro tyto funkce lze definovat normu $\|\varphi\|_{\Phi_p} = \sup\limits_\omega \frac{\|\int \omega(P)\, \varphi(P)\, \mathrm{d}\Omega\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}}$, při čemž $\omega$ je schodovitá funkce, jejíž hodnoty jsou reálná čísla a $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ pro $p > 1$; pro případ $p = 1$ je analogicky $\|\varphi\|_{\Phi_p} = \sup \frac{\|\int \omega(P)\, \varphi(P)\, \mathrm{d}\Omega\|_X}{\operatorname{Max} |\omega(P)|}$. Je-li $X$ reálná osa, je $\|\varphi\|_{\Phi_p} = [\int_\Omega |\varphi|^p\, \mathrm{d}\Omega]^{\frac{1}{p}}$. Snadno se lze přesvědčit, že $\|\varphi\|_{\Phi_p}$ je skutečně norma. Funkce, pro něž $\|\varphi\|_{\Phi_p} < +\infty$, tvoří lineární prostor $\Phi_p$, který je analogií prostoru $L_p$.

Přednášející na příkladě ukázal, že prostor $\Phi_p$ nemusí být úplný. $\Phi_p$ lze doplnit, je však lépe zavedení ideálních elementů obejít tímto způsobem:

Je-li $\varphi(P)$ bodová funkce, jejíž hodnoty leží v prostoru $X$, potom jí lze předpisem $\varphi(E) = \int_\Omega \xi_E\, \varphi(P)\, \mathrm{d}\Omega$ ($\xi_E$ je charakteristická funkce množiny $E$) přiřadit množinovou funkci $\varphi(E)$. Je-li $\omega(P)$ schodovitá funkce nabývající reálných hodnot, lze definovat integrál $\int \omega(P)\, \mathrm{d}\varphi(E)$ a s jeho pomocí pak v prostoru $\Phi_p$ všech funkcí $\varphi(E)$ normu

$$\|\varphi(E)\|_{\Phi_p} = \sup_\omega \frac{\|\int \omega(P)\, \mathrm{d}\varphi(E)\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}}\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,.$$

Znakem $\Psi_p$ označme množinu těch $\psi(E)$, pro něž je $\psi(E) = \lim \psi_k(E)$, kde $\psi_k(E)$ je množinová funkce přiřazená funkci schodovité. Přednášející dokázal, že $\Psi_p \subset \Phi_p$ a $\Psi_p \neq \Phi_p$.

Akademiku Sobolevovi se podařilo objevit nutnou a postačující podmínku pro to, aby $\psi \in \Psi_p$; to nastane tehdy a jen tehdy, když

a) $\psi(E)$ je absolutně spojitá,

b) $\psi(E)$ je spojitá při posunutí, t. zn. že k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že když $\|Q\|_{E_n} < \delta$, potom $\|\psi(E + Q) - \psi(E)\|_X < \varepsilon$, při čemž $E + Q$ značí množinu, která vznikne posunutím množiny $E$ o vektor $Q$.

Akademik Sobolev ukázal na příkladě, že existují funkce, které jsou absolutně spojité, ale nejsou spojité při posunutí, t. j. ukázal, že neplatí a)$\Rightarrow$ b) a vyslovil domněnku, že z b) plyne a).

Funkci $\psi(E)$ nazveme zobecněnou derivací $\dfrac{\partial\varphi(E)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, jestliže pro každou funkci $v$, $\alpha$-kráte spojitě diferencovatelnou a rovnou nule v blízkosti hranice oblasti $\Omega$, platí

$$\int_\Omega \frac{\partial^\alpha v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \, d\varphi(E) = (-1)^\alpha \int_\Omega v \, d\psi(E).$$

H l a v n í  v ý s l e d e k, ke kterému přednášející dospěl, je ten, že věty o vnoření I a II platí i pro množinové funkce, které náleží do prostoru $\Psi_p$. Přitom je ovšem nutné zachovat jistou opatrnost při formulaci vět. Přesné znění věty analogické I je toto:

I'. *Je-li* $\psi \in \Psi_p$ *množinová funkce definovaná na měřitelných podmnožinách oblasti* $\Omega$ *taková, že* $\left\| \dfrac{\partial^l \psi(E)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \right\|_{\Phi_p} < K$ *a je-li* $lp > n$, *potom* $\psi(E)$ *je integrál ze spojité funkce.*

Podobně lze formulovat i větu analogickou II; přednášející se při tom omezil jen na případ $s = n$.

*

S. L. Sobolev přednášel ještě v matematické obci pražské dne 18. dubna 1957 na théma „Nová formulace okrajových úloh u eliptických diferenciálních rovnic".

V této přednášce podrobně rozvedl výsledky, kterých dosáhl společně s M. I. Višikem a které uveřejnil v článku „Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных", ДАН СССР, Т. 111, № 3, 1956, 521—523.

*Rudolf Výborný*, Praha.

## O HOMOMORFISMECH ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN A SVAZŮ

(Vlastní referát o přednášce proslovené v rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků" dne 8. dubna 1957 v Brně.)

Částečně uspořádanou množinou $M$ rozumíme neprázdnou množinu $M$, na níž je definována asymetrická a transitivní binární relace $<$ (srv. B. Dushnik — E. W. Miller: Partially ordered sets, Amer. Jour. of Math. *63* (1941), 600—610). Je-li $x < y$ nebo $x = y$, píšeme $x \leqq y$ a neplatí-li ani $x \leqq y$ ani $y \leqq x$, píšeme $x \parallel y$.

O částečně uspořádané podmnožině $P \subset M$ říkáme, že je *vložená* (v částečně uspořádané množině $M$), jestliže platí

$$z \in M - P \Rightarrow \{x < z \Leftrightarrow y < z\} \quad \text{a} \quad \{z < x \Leftrightarrow z < y\} \quad \text{pro každé } x, y \in P\,. \tag{1}$$

Vzhledem k (1) lze na každém rozkladu $\overline{M}$ na částečně uspořádané množině $M$, který je rozkladem ve vložené částečně uspořádané podmnožiny v $M$, definovat t. zv. *faktorovou částečně uspořádanou množinu* $\overline{M}$ takto

$$P < Q\,; \quad P, Q \in \overline{M} \Leftrightarrow x < y\,; \quad x \in P\,,\; y \in Q\,. \tag{2}$$

Zobrazení $\varphi$ částečně uspořádané množiny $M$ na částečně uspořádanou množinu $N$, které splňuje podmínky

$$x < y\,; \quad x, y \in M \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)\,, \tag{3}$$

$$x \parallel y\,; \quad x, y \in M \Rightarrow \varphi(x) \parallel \varphi(y)\,, \tag{4}$$

je isomorfismem. Splňuje-li podmínku

$$x < y\,; \quad x, y \in M \Rightarrow \varphi(x) \leqq \varphi(y)\,, \tag{3'}$$

je isotonním zobrazením. Splňuje-li podmínku (3) a podmínku

$$x \parallel y\,; \quad x, y \in M \Rightarrow \quad \text{buď} \quad \varphi(x) \parallel \varphi(y) \quad \text{nebo} \quad \varphi(x) = \varphi(y)\,, \tag{4'}$$

je *homomorfismem* definovaným pro obecné grafy (srv. K. Čulík: Zur Theorie der Graphen, Čechoslov. mat. žur., v tisku).

Zobrazení $\varphi$, které splňuje podmínky (3′) a (4) příp. (3) a (4′), příp. (3′) a (4′), označujeme jako **A**- příp. **B**- příp. **C**-homomorfismus. Rozklad na částečně uspořádané množině $M$, vytvořený **A**- příp. **B**- příp. **C**-homomorfismem $\varphi$, se nazývá **A**- příp. **B**- příp. **C**- vytvořující rozklad a podobně se označuje na takovémto rozkladu definovaná faktorová částečně uspořádaná množina.

Především platí:

**Věta 1.** *Rozklad $\overline{M}$ na částečně uspořádané množině $M$ je* a) **A**-, *příp.* b) **B**-, *příp.* c) **C**-*vytvořujícím rozkladem právě tehdy, když* a) *je rozkladem ve vložené řetězce, příp.* b) *je rozkladem ve vložené částečně uspořádané podmnožiny, jejichž každé dva různé prvky jsou navzájem nesrovnatelné, příp.* c) *je rozkladem ve vložené částečně uspořádané podmnožiny.*

Theorie **A**-homomorfismu je úplně vybudována a ukazuje se, že platí skoro všechny věty obdobné pro theorii obecného grafového homomorfismu (t. j. zde **B**-homomorfismu). Částečně uspořádanou množinu, která není řetězcem, nazvěme **A**-*jednoduchou*, jestliže na ní existuje právě jedna **A**-faktorová částečně uspořádaná množina. Řetězec nazýváme **A**-*jednoduchým*, jestliže je jednoprvkový. Pak na příklad platí:

**Věta 2.** *Každá částečně uspořádaná množina je* **A**-*homomorfním vzorem právě jedné (až na isomorfismus) t. zv. její* **A**-*jednoduché částečně uspořádané množiny.*

Z věty 1. a 2. plyne, že každá částečně uspořádaná množina je jednoznačně (až na isomorfismus) charakterisována svojí **A**-jednoduchou částečně uspořádanou množinou, jejímuž každému prvku je přiřazen právě jeden ordinální typ (soustava těchto ordinálních typů je t. zv. **A**-homomorfní charakteristikou dané částečně uspořádané množiny).

Dále na příklad platí:

**Věta 3.** *Částečně uspořádaná množina $M$ je* **A**-*jednoduchá právě tehdy, když pro každý její* **A**-*homomorfní obraz $N$ platí $M \doteq N$.*

Na rozdíl od **A**- a **B**-homomorfismu je theorie **C**-homomorfismu mnohem chudší, a to proto, že **C**-homomorfismus je více podobný homomorfismu theorie grup. Pak i pojem **C**-jednoduchosti zcela odpovídá pojmu jednoduchosti grupy. Přes tyto závady se zdá, že právě **C**-homomorfismus je nejvhodnějším zobrazením pro studium částečně uspořádaných množin i svazů, neboť je nejobecnějším zobrazením (podle věty 1.), které připouští zavést (netriviálně) pojem faktorové částečně uspořádané množiny a také faktorového svazu.

Platí na příklad:

**Věta 4.** **C**-*homomorfismus $\varphi$, t. j. isotonní zobrazení, které splňuje (4′), je homomorfismem vzhledem ke spojení příp. k průseku právě tehdy, když splňuje podmínku* (5) *příp.* (6), *která je tvaru*

$$x \parallel y\,, \quad \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x \vee y) = \varphi(y)\,, \tag{5}$$

$$x \parallel y\,, \quad \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x \wedge y) = \varphi(x)\,. \tag{6}$$

Pojem vložené částečně uspořádané množiny ukazuje cestu ke studiu svazů nikoli jako množin s ternárními relacemi, t. j. s operacemi (tedy analogicky k theorii grup), nýbrž jako množin s binární relací (tedy analogicky k theorii grafů).

*Karel Čulík*, Brno.

# O CYKLICKÝCH GRAFECH

(Vlastní referát o přednášce proslovené v rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků" dne 13. května 1957 v Brně.)

Binární relací $\varrho$ definovanou na množině $F \neq 0$ se rozumí podmnožina kartézského součinu $F \times F$ (t. j. platí $\varrho \subset F \times F$). Dvojici $F(\varrho)$ nazýváme *grafem*. Posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^k$ prvků $u_i \in F$ se nazývá *vázaná* příp. *monotonně vázaná* v $F(\varrho)$, jestliže platí buď $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ nebo $(u_{i+1}, u_i) \in \varrho$ pro $1 \leqq i < k$ příp. $(u_i, u_{i+1}) \in \varrho$ pro $1 \leqq i < k$ a říkáme o ní navíc, že je *uzavřená*, platí-li také buď $(u_k, u_1) \in \varrho$ nebo $(u_1, u_k) \in \varrho$ příp. $(u_k, u_1) \in \varrho$. Číslo $k$ se nazývá její *délkou*. Uzavřená monotonně vázaná posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^k$ se nazývá *cyklem*, jestliže $u_i \neq u_j$ pro $i \neq j$.

Binární relaci $\varrho$ nazýváme *cyklickou relací stupně* $k$ (stručně $\mathbf{Z}_k$-relací), splňuje-li podmínku

$$\{u_i\}_{i=1}^k \text{ je monotonně vázaná posloupnost v } \varrho \Rightarrow (u_k, u_1) \in \varrho\,. \tag{1}$$

Pak $\mathbf{Z}_1$-relace je reflexivní a $\mathbf{Z}_2$-relace je symetrickou relací. Přepíšeme-li podmínku $\mathbf{Z}_3$ do obvyklého tvaru $x\varrho y$, $y\varrho z \Rightarrow z\varrho x$, je zřejmá analogie podmínky cykličnosti s podmínkou transitivnosti. Dále relace $\varrho$ je cyklickou relací stupně $k = 1, 2, 3$ právě tehdy, když je ekvivalencí.

Graf $F(\varrho)$ nazýváme *cyklickým grafem stupně* $k$, jestliže $\varrho$ je $\mathbf{Z}_k$ relací. Cyklus $\{u_i\}_{i=1}^d$ v $F(\varrho)$ nazýváme *ryzím* cyklem, jestliže platí

$$(u_i, u_j) \in \varrho \Rightarrow i + 1 \equiv j \pmod d\,, \tag{2}$$

při čemž všude klademe $u_p = u_q$ pro $p \equiv q \pmod d$.

Pak platí:

**Věta 1.** *Délka ryzího cyklu souvislého cyklického grafu je dělitelem jeho stupně.*

Stupeň $k$ cyklického grafu $F(\varrho)$ nazýváme jeho *periodou*, jestliže existuje cyklus délky $k$ v $F(\varrho)$ a jestliže pro délku $d$ každého cyklu v $F(\varrho)$ platí $d \geqq k$.

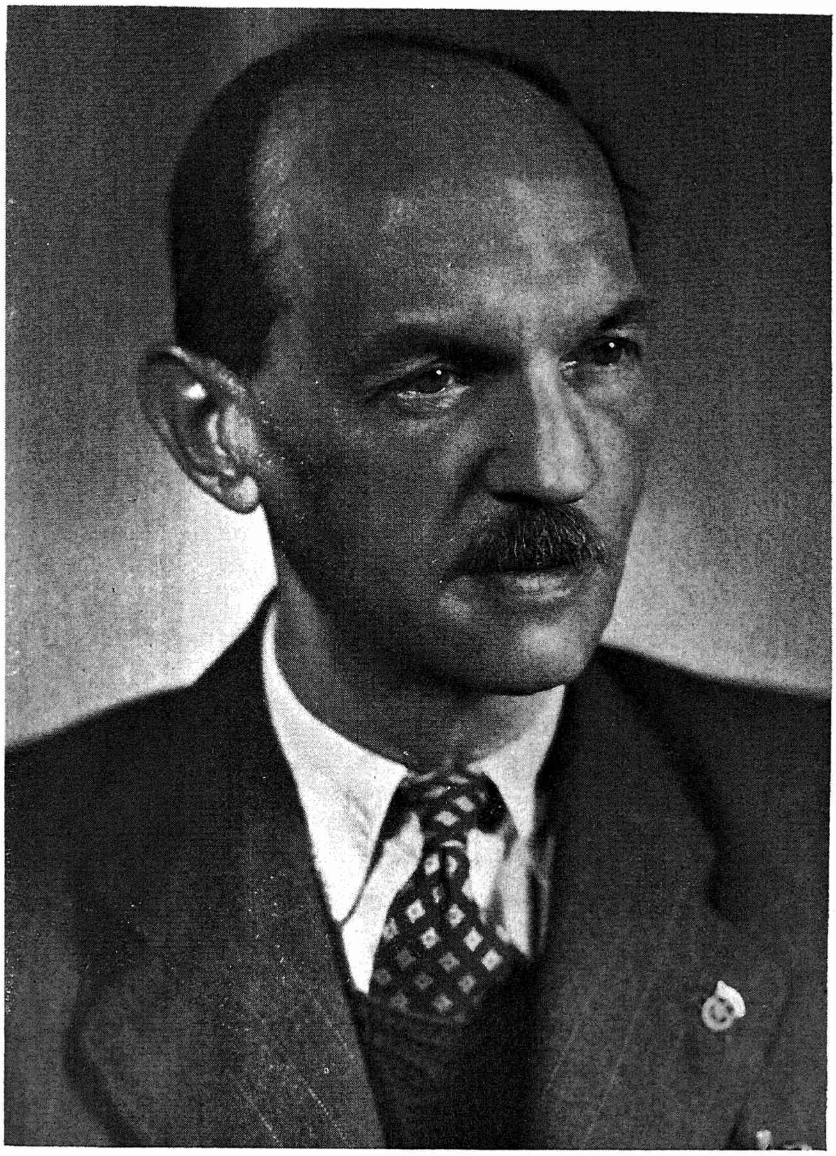
**Věta 2.** *Souvislý cyklický graf o periodě $k \geqq 3$ je jednoduchým grafem právě tehdy, když je cyklem délky $k$.*

**Věta 3.** *Souvislý graf je cyklickým grafem o periodě $k \geqq 3$ právě tehdy, když je homomorfním vzorem cyklu délky $k$.*

Je tedy každý souvislý cyklický graf o periodě $k \geqq 3$ úplně charakterisován uspořádanou $k$-ticí mohutností (t. j. vlastně svojí *homomorfní charakteristikou*, která byla definována podobně jako pojem *homomorfismu* a *jednoduchosti* v autorově práci *Zur Theorie der Graphen*, Čas. pro pěst. mat., v tisku), takže se snadno odvodí na příklad)

**Věta 4.** *Je-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ homomorfní charakteristika souvislého cyklického grafu $F(\varrho$: o periodě $k \geqq 3$, pak $F(\varrho)$ obsahuje cyklus délky $d$ právě tehdy, když $d = nk$, kde $n$ je přirozené číslo, a když $\alpha_i \geqq n$ pro $1 \leqq i \leqq k$.*

*Karel Čulík*, Brno.



Akademik Vojtěch Jarník

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 82 (1957), Praha

# AKADEMIK VOJTĚCH JARNÍK ŠEDESÁTNÍKEM

VLADIMÍR KNICHAL, Praha a ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Došlo dne 1. července 1957.)

Dne 22. prosince t. r. se dožívá šedesáti let vynikající československý matematik, badatel světového jména, akademik VOJTĚCH JARNÍK, profesor matematicko-fysikální fakulty Karlovy university.

Tato příležitost nám dává podnět k tomu, abychom se zamyslili podrobněji nad vědeckou, učitelskou a vědecko-organisační činností našeho vzácného učitele a staršího přítele, jehož dílo vtisklo trvalé stopy vývoji československé matematiky v posledních 30 letech a přispělo podstatně k dobré známosti československé matematiky v matematickém světě.

Šedesátka u člověka tak výkonného a všestranně činného není příležitostí k bilanci životního díla. Jestliže se však chceme podrobněji zabývat jeho dosavadní činností, činíme tak především také proto, abychom přiblížili jeho osobnost i jeho dílo naší mladší matematické generaci jako živý vzor ušlechtilého úsilí a cílevědomé práce.

Prof. Jarník se narodil dne 22. prosince 1897 v Praze jako syn univ. profesora JANA URBANA JARNÍKA, známého českého romanisty. V roce 1915 vstoupil jako posluchač matematiky a fysiky na tehdejší filosofickou fakultu Karlovy university. Zde vyrůstal Jarník především pod vlivem zesnulého profesora KARLA PETRA. Trvalý hluboký Jarníkův zájem o theorii čísel je do značné míry ovlivněn i tím, že prof. Petr pracoval rovněž velmi úspěšně v tomto oboru. Po vzdělání, kterého se mu dostalo na Karlově universitě, prošel Jarník „nejvyšší školou matematických věd" dvojím pobytem v Göttingen (od podzimu r. 1923 do února 1925 a ve školním roce 1927-28), kde bylo tehdy jedno z nejvýznačnějších matematických vědeckých středisek světa. Jarník zde byl v prvé řadě žákem EDMUNDA LANDAUA (zesnulého roku 1938), jedné z největších postav moderní matematiky, spoluzakladatele moderní analytické theorie čísel. Landau sám pak považoval Jarníka za jednoho z nejlepších svých žáků a spolupracovníků. Jarník přes velké úspěchy v analytické theorii čísel nikdy nebyl pěstovatelem výhradně této nauky. Poznal záhy nebezpečí upřílišněné specialisace a po celou dobu své vědecké kariéry (podobně jako jeho učitelé Petr a také Landau) velmi intensivně se věnoval — jak ještě uvidíme — i jiným oborům vlastní matematické analysy.

Svá universitní studia ukončil Jarník jednak státními zkouškami z matematiky a fysiky, jednak doktorátem, při němž vykonal hlavní rigorosum z matematiky a vedlejší z theoretické fysiky a filosofie. Jako disertační práci předložil pojednání „O kořenech funkcí Besselových" (v seznamu[1]) práce 1). Od roku 1919 do 1921 působil jako asistent matematiky na Vysoké škole technické v Brně u prof. J. Vojtěcha, kde měl ještě možnost seznámit se s tehdejším vynikajícím odborníkem v matematické analyse, s prof. M. Lerchem. V roce 1921 přešel jako asistent matematického semináře na Karlovu universitu do Prahy. Tuto funkci zastával až do 14. března 1929, kdy byl jmenován mimořádným profesorem matematiky této university. Během této doby se habilitoval (19. prosince 1925) na základě habilitační práce „O mřížových bodech v rovině" (práce 7). Od 1. července 1935 byl jmenován řádným profesorem matematiky na téže fakultě.

Od počátku své učitelské činnosti měl Jarník značný vliv na své posluchače. Byli to především studenti s hlubokým zájmem o matematiku, které dovedl soustředit kolem sebe. Velkou část našich dnešních vysokoškolských učitelů (čtyřicátníků a padesátníků) lze nazvat Jarníkovými žáky, i když mnozí z nich ve svém pozdějším vývoji přesunuli těžiště své vlastní vědecké činnosti do různých vzdálenějších oblastí matematiky. Učitelské činnosti se Jarník věnoval a věnuje s velkou láskou. Jeho vliv na posluchače se projevuje především tím, že dovede své opravdové nadšení pro vědu přenést i na ně. Ti, kteří jej slyšeli přednášet před pětadvaceti lety a slyší jej dnes, mohou dosvědčit, že se svého nadšení ani trochu nepolevil. Naopak, získané učitelské a metodické zkušenosti dělají z něho dnes učitele, který ještě pronikavějším způsobem ovlivňuje své žáky. I když, jak již řečeno, část jeho žáků, našich aktivních vědeckých pracovníků, pracuje v jiných oborech, než jsou vlastní obory Jarníkovy vědecké činnosti, odnesli si všichni něco společného z jeho pečlivě připravených přednášek. Toto společné se nazývá v zasvěcených kruzích „Jarníkův styl".

Již v předválečných letech, kdy výkon učitelského povolání na vysokých školách se neprováděl vždy příliš důsledně, byl Jarník učitelem neobyčejně disciplinovaným, který nevynechal jediné přednášky. Tento zdánlivě podružný moment — u vědeckého pracovníka jeho formátu — nelze podceňovat. Vzpomínáme si velmi dobře na to, jak s taktem staršího přítele vyhledával všelijaké náhradní termíny a jak nás — posluchače — nenásilnou formou vedl k důkladnosti a poctivosti v práci a v povinnostech. Krátce: Jarník dělal již tenkráte to, čemu dnes říkáváme „nejen učiti, ale také vychovávati".

---

[1]) Práce uvedené v seznamu v odstavci A budou v textu pro stručnost označeny pouze číslem, bez značky A.

Jarník je mimořádně dobrým znalcem různých moderních matematických disciplin. Svých pronikavých úspěchů ve vědecké tvorbě dosáhl právě spojením metod moderní matematiky s hlubokou znalostí klasické analysy. V tomto směru se snaží stále vést i své posluchače a žáky, kterým je vždy obětavým rádcem. Již tři desítiletí koná na fakultě řadu speciálních přednášek a seminářů, v nichž seznamuje své posluchače s nejnovějšími směry současné matematiky. Tyto přednášky a semináře jsou pečlivě voleny tak, aby v nich byly zladěny jeho osobní záliby s potřebami posluchačů. Tak na př. byl prvým, kdo v třicátých letech začal systematicky na universitě v Praze šířit mezi posluchači znalost theorie množin. Kniha akademika E. ČECHA „Bodové množiny", která měla později tak ohromný vliv na celou naši matematiku, byla ještě v rukopise, když Jarník seznamoval své posluchače ve speciálních seminářích s obsahem této knihy.

Jarníkův výklad a postup je vždy důkladně promyšlen. Dovede přístupně vyložit i ty nejobtížnější partie. Vede přednášky tak, aby posluchač viděl, k čemu směřuje. Vychovává ke kritickému a přesnému myšlení.

V těžkých letech okupace vedl Jarník s několika mladšími spolupracovníky více méně pravidelné semináře, psal informativní články, aby ani za nejhorších dob zcela nepřestal vědecký růst mladší matematické generace.

Po osvobození stoupl ještě více Jarníkův vliv na naši nejmladší vědeckou generaci, především také zásluhou jeho skvělých učebnic. Jde vlastně o vědecky zaměřené monografie, jichž lze použít jako učebnic. Je až s podivem, jak si Jarník, který je v posledních letech značně zaměstnán vědecko-organisačními povinnostmi, dovedl nalézti tolik času k napsání čtyř obšírných knih, které považujeme za chloubu naší matematické knižní produkce.

Jarník vydal také řadu interních skript a poznámek pro své posluchače a navštěvníky seminářů.

Jako všeobecně uznávaný pedagog byl od roku 1948 předsedou reformní komise přírodovědecké fakulty Karlovy university. V roce 1947—48 byl děkanem a v roce 1948—49 proděkanem přírodovědecké fakulty Karlovy university, v letech 1950—53 pak prorektorem Karlovy university. Všechny tyto funkce vykonával s nevšední a přímo vědeckou poctivostí a důkladností.

Jako vynikající vědecký pracovník stal se velmi brzo členem někdejší České akademie věd a umění (od roku 1934), členem Královské české společnosti nauk (od r. 1926) a členem předsednictva Národní rady badatelské. Dále je členem Polskiego Towarzystwa Matematycznego, čímž přispívá k prohloubení vědeckých styků československo-polských.

V roce 1950 byl Jarník jmenován členem přípravného výboru pro zřízení Československo-sovětského institutu a po jeho založení byl předsedou jeho přírodovědecké sekce.

Koncem roku 1951 se začalo připravovat ustavení Československé akademie věd a Jarník byl jmenován členem vládní komise pro její vybudování. Po jejím ustavení dne 17. listopadu 1952 byl jmenován mezi prvními řádnými členy — akademiky této akademie a stal se předsedou její matematicko-fysikální sekce. Tuto těžkou a zodpovědnou funkci vykonával v letech 1952—55. Jarník nedbal osobního pohodlí a často na úkor času potřebného k vlastní vědecké činnosti staral se nezištně o organisační zajištění a vybudování pracovišť, z nichž některá byla dosti vzdálena jeho vlastním vědeckým zájmům. I nyní zastává některé funkce v rámci Akademie. Je na př. předsedou komise pro matematiku, vytvořené presidiem ČSAV, která má za úkol koordinovat práci v matematice v celém státě.

Již od roku 1916 je Jarník jedním z vysoce aktivních členů Jednoty československých matematiků a fysiků a od roku 1928 až do nedávné doby členem jejího výboru. V této souvislosti je třeba zdůraznit především, že v letech 1935—50 byl vedoucím redaktorem matematické části *Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky*. Náš Časopis, i když měl dlouholetou tradici, byl až do roku 1934 přece jenom časopisem spíše národním než mezinárodním. Jarník se stal vedoucím redaktorem v čase, kdy bylo rozhodnuto, že Časopis se má přetvořit na mezinárodní časopis. Ani tady nedostal Jarník zrovna nejlehčí úkol. Ve funkci hlavního redaktora matematické části četl a „spravoval" s opravdovým pochopením pro začínající autory desítky příspěvků a pomáhal tak zvedati nejenom úroveň Časopisu, ale i celé naší matematické vědy. Jarník má nesporně nemalý podíl na tom, že se Časopis a později (od r. 1950) *Чехословацкий математический журнал* stal ve světovém měřítku uznávaným matematickým forem.

V letech 1937—39 byl členem redakční rady mezinárodního časopisu *Acta Arithmetica*, vycházejícího v Polsku, který se měl státi tribunou pro theorii čísel. Po obsazení Polska nacistickými okupanty však časopis zanikl.

Jarník se zúčastnil aktivně celé řady zahraničních a mezinárodních sjezdů a konferencí. Přednášel mnohokráte v cizině na různých universitách jako host. Napsal na 100 recensí do časopisů: *Zentralblatt für Mathematik*, *Mathematical Reviews* a *Реферативный журнал-математика*. Kromě toho napsal řadu referátů (často velmi obsáhlých) o nových knihách do Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky a jinde.

Za svoje vynikající vědecké zásluhy a tvůrčí vědeckou činnost byl v roce 1952 poctěn státní cenou.

Přejdeme nyní k podrobnějšímu hodnocení Jarníkovy vědecké činnosti.

Přesto, že vědecká činnost Jarníkova je — jak uvidíme — všestranná, lze přece vyznačit dosti přesně ty směry matematického bádání, které v Jarníkových vědeckých pracích zřetelně převládají.

Pobyt na universitě v Göttingen a vliv tamního výborného učitele a vědce světového jména Edmunda Landaua způsobil, že Jarník podstatnou část své vědecké produkce věnuje těm otázkám theorie čísel, které souvisí velmi úzce s jinými obory matematiky, jako na př. s matematickou analysou a s geometrií, tomu okruhu otázek a problémů, které se často shrnují pod názvem theorie mřížových bodů a geometrie čísel. Zde je třeba trochu bližšího vysvětlení, neboť každý z těchto dvou názvů vyvolává někdy tutéž představu. Kdežto Landau v druhém dílu své základní monografie „Vorlesungen über Zahlentheorie" (Leipzig, 1927) na str. 183 jasně (a myslíme, že právem) řadí theorii mřížových bodů do geometrické theorie čísel, řadí mnozí matematici tuto theorii spíše do analytické theorie čísel. Od této partie theorie čísel je nutno odlišiti geometrii čísel, za jejíhož zakladatele se považuje Minkowski, který ve svém fundamentálním díle „Geometrie der Zahlen" (Leipzig und Berlin, 1910) zabývá se jinou problematikou, než je uvedena v kapitole o mřížových bodech v monografii Landauově (Landau také v této kapitole nikde Minkowského necituje).

Pod pojmem mřížového bodu (v užším smyslu) představujeme si v $n$-dimensionálním kartézském prostoru bod $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jehož všechny souřadnice jsou čísla celá. Zatím co do theorie mřížových bodů řadíme dnes spíše práce týkající se asymptotických odhadů počtu mřížových bodů, které padnou do jistého geometrického tělesa, zvětšujícího se v daném prostoru s rostoucím parametrem $t \to \infty$, řadíme do geometrie čísel spíše problémy existenčního rázu, kde jde o to, zda do daného geometrického tělesa padnou mřížové body, které jsou eventuálně v jistých vzájemných vztazích. V tomto druhém případě lze pak provést eventuálně i další dělení podle toho, zda při vytčení daného problému spíše vyzdvihujeme geometrický tvar vyšetřovaného tělesa (pak jde o vlastní geometrii čísel) nebo spíše aritmetické nerovnosti, kterými je daný útvar charakterisován, a kdy pak vlastně jde o existenci řešení nebo o existenci jistého (třeba nekonečného) počtu řešení daných nerovností systémem celých čísel. Tuto problematiku pak často shrnujeme do theorie diofantických nerovností, jejíž částí je theorie diofantických aproximací, zabývající se aproximativním řešením „rovnic" celými čísly. Zde pak vystupují do popředí otázky týkající se „míry přesnosti", s kterou lze danému systému rovnic vyhovět. Můžeme hned prozradit, že Jarníkovy práce zapadají do všech těchto oborů a že si jimi právem dobyl velmi čestného místa na světovém foru.

Do theorie mřížových bodů, která podstatnou měrou používá jemných pomůcek matematické analysy, a proto se řadí do analytické theorie čísel, lze zařadit těchto 28 Jarníkových prací (číslováno podle připojeného seznamu): 7, 8, 9, 12, 16 až 22, 24, 27, 31 až 34, 38, 40, 45, 67 až 71, B 1, B 2, B 4. Poněvadž pak práce, spadající do vlastní geometrie čísel a do theorie diofantických aproximací, nelze již tak dobře od sebe rozlišit, shrnujeme je zde do jedné kategorie. Je to 28 prací: 26, 30, 35, 36, 37, 53, 54, 56, 58, 59, 60, 62 až 66, 72 až 78, 81, 83, 84, B 3, B 5.

Dalším velmi důležitým polem Jarníkovy vědecké činnosti je theorie reálných funkcí, zvláště ta část, která se zabývá studiem derivovaných čísel. Sem lze snad zařadit těchto 20 Jarníkových prací: 2, 4, 5, 6, 10, 39, 41, 42, 44, 46, 47, 48, 52, 55, 57, 80, 82, C 2, D 8, D 33.

Ostatní Jarníkovy práce nelze již dělit na kompaktnější celky, neboť zapadají porůznu do nejrozmanitějších oborů matematiky.

Jedním z oborů, k jehož rozvoji Jarník přispěl svými pracemi nejvíce, je beze sporu theorie mřížových bodů. Vysvětlíme nejprve stručně, o jakou problematiku jde v tomto úseku analytické theorie čísel. Budiž $R_n$ $n$-dimensionální reálný kartézský prostor, t. j. prostor, jehož body $x$ jsou uspořádané $n$-tice reálných čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s obvyklou metrikou. Pro jednoduché operace (sčítání bodů a násobení bodů číslem) budeme používat obvyklého označení, známého z vektorového počtu. Představme si „geometrické těleso" $K(t)$ v $R_n$, závislé na reálném kladném parametru $t$, jehož rozměry s rostoucím parametrem $t \to \infty$ rostou do nekonečna. Jedním z úkolů theorie mřížových bodů je určit, aspoň asymptoticky, odhad pro počet $G(t)$ mřížových bodů ležících v tělese $K(t)$ pro velká $t$. Je jasné, že řešení tohoto úkolu a použité metody budou podstatně závislé na konkretním tvaru tělesa $K(t)$. Nemělo by proto smysl zabývat se tímto problémem v uvedené obecnosti. Uvedeme tudíž nejprve jistou speciální třídu těles, která v theorii mřížových bodů se vyskytuje velmi často.

Budiž $K$ konvexní a omezené geometrické těleso v $R_n$, v němž počátek je bodem vnitřním. Definujme bodovou funkci $F(x)$ takto: $F(0) = 0$; je-li $x \neq 0$, určeme nejprve kladné číslo $\lambda(x)$ tak, aby pro $0 \leqq \mu < \lambda(x)$ bylo $\mu x \in K$ a pro $\mu > \lambda(x)$ bylo $\mu x$ non $\in K$ ($K$ je konvexní!). Klaďme pak $F(x) = 1/\lambda(x)$. Názorně, avšak trochu nepřesně řečeno, je $F(x)$ homogenní bodová funkce ($F(\lambda \,.\, x) = \lambda F(x)$ pro $\lambda \geqq 0$) taková, že $F(x) = 1$ představuje „rovnici" plochy omezující dané těleso $K$. Přitom vnitřní body $x$ tělesa $K$ jsou charakterisovány podmínkou $F(x) < 1$ a vnější body podmínkou $F(x) > 1$. Je-li $K$ těleso uzavřené, jak budeme dále předpokládat, lze charakterisovat jeho body $x$ právě nerovností $F(x) \leqq 1$. Je-li $K(t)$ těleso vzniklé z $K$ homothetickou transformací o středu v počátku a o poloměru homothetie $t$ $(t > 0)$, jsou jeho body $x$ zřejmě charakterisovány nerovností $F(x) \leqq t$.

Z geometrického názoru je celkem jasné, že v prvém přiblížení je počet $G(t)$ mřížových bodů (tedy počet celočíselných systémů $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vyhovujících nerovnosti $F(x) \leqq t$) roven objemu $V(t)$ tělesa $K(t)$. Tato věc je ryze geometrická a má s vlastní theorií čísel velmi málo společného, i když uvedená formulace (jde o řešení nerovnosti $F(x) \leqq t$ celými čísly) je číselně theoretická. Naproti tomu úvahy vedoucí k vyšetření odchylky $\mathsf{P}(t) = G(t) - V(t)$ jsou již někdy velmi subtilní a těžké, závisí velmi podstatně na „aritmetických" vlastnostech funkce $F(x)$, definující základní těleso $K$, a budily proto zájem mnoha nejpřednějších číselných theoretiků. Ke studiu těchto otázek pro různé speciální funkce $F(x)$ je třeba bohatých znalostí jednak vlastní klasické theorie čísel, jednak rozmanitých metod matematické analysy, které v tomto úseku matematiky najdou široké uplatnění. Byla to právě tato synthesa úvah aritmetických (kde — jak známo — vlastnosti vyšetřovaných objektů, na př. čísel celých, se mění skokem) s úvahami analytickými (kde vlastnosti vyšetřovaných objektů spojitě závisí na parametrech je určujících), která lákala Jarníka a přivedla ho též vlivem jeho učitele E. Landaua k tomuto velmi těžkému oboru. Jarník zde navázal na práce vynikajících světových matematiků, jako jsou van der CORPUT, HARDY, LANDAU, LITTLEWOOD, VINOGRADOV, WALFISZ a j., a dospěl k výsledkům, které ho řadí jasně mezi ně. Možno dokonce říci, že se Jarník pouštěl s úspěchem do řešení mnoha těch nejsubtilnějších otázek tohoto oboru, k jejichž rozboru se ostatní vůbec neodhodlali, a dospěl zde k četným výsledkům, které do dnešního dne nebyly překonány. Je proto právem pokládán za jednoho z nejvýznačnějších světových representantů tohoto oboru.

Rozebrat důkladně Jarníkovu činnost na tomto poli, upozornit na všechny potíže, které musel odstranit, chtěl-li dospět ke kýženým výsledkům, nelze provést v rámci jednoho článku. Musíme se proto omezit na jistý výběr, který aspoň trochu dovolí nahlédnout do složité kuchyně, ve které tyto práce vznikaly. Co se týče podrobnějších rozborů, nutno odkázat na referáty obsažené v recensních časopisech, hlavně v časopise *Zentralblatt für Mathematik*, kde skoro v každém ročníku nalezneme referáty o pracích Jarníkových z tohoto oboru, vyšlé z pera odpovědnějších znalců.

Pokud pak se týče zevrubnějšího rozboru problematiky, o kterou zde běží, a potíží, které zde vznikají, odkazujeme čtenáře na článek Arnolda Walfisze, nad jiné povolaného autora a úzkého spolupracovníka našeho jubilanta, článek, který vyšel v našem Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky, roč. LIX, v r. 1929, kde v rozšířeném znění je podán referát, který autor přednesl ve Varšavě na 1. sjezdu slovanských matematiků dne 26. září 1929.

Jedním z nejstarších případů vyšetřovaných v theorii mřížových bodů je případ, kdy základním tělesem $K$ je koule o středu v počátku. V tomto případě jde tedy v podstatě o asymptotické vyjádření počtu $A(y)$ mřížových bodů čili celočíselných řešení vyhovujících nerovnosti $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq y$ pro velká $y$. Přirozeným zobecněním dospíváme k nerovnosti $Q(x) \leqq y$, kde $Q(x) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ je kvadratická forma positivně definitní. Objem elipsoidu $Q(x) \leqq y$ při daném $y$ je dán vzorcem

$$V(y) = V_Q(y) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}y^{\frac{1}{2}n}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

kde $D$ je diskriminant dané kvadratické formy. Jak jsme již dříve řekli, je velmi názorné a bylo dokázáno po prvé EISENSTEINEM, že $\lim_{y\to\infty} A(y)/V(y) = 1$. Kdežto funkce $V(y)$ se mění spojitě, je $A(y)$ aritmetická funkce po částech konstantní, která má na př. v případě celočíselných $a_{ik}$ diskontinuity nejvýše v bodech celočíselných. Je však také celkem patrno, že vyšetřování odhadu rozdílu $\mathsf{P}(y) = \mathsf{P}_Q(y) = A(y) - V(y)$ bude již úkol značně delikátnější. To se také skutečně ukazuje při podrobnějším studiu, a proto mnoho vynikajících číselných theoretiků zaměřilo svá bádání právě k této otázce. Je pochopitelné, že mnoho matematiků zkoumalo nejprve některé speciální případy, kdy koeficienty $a_{ik}$ dané kvadratické formy měly speciální hodnoty (na př. již zmíněný problém koule). Bylo to způsobeno jednak tím, že problém ve své obecnosti je značně těžký a že se zdálo účelnějším získat nejprve výsledky orientační, jednak tím, že odhad zbytku — jak ještě uvidíme — značně závisí právě na aritmetických vlastnostech vzájemných poměrů koeficientů $a_{ik}$. Že i v pozdější fázi vývoje této otázky bylo mnoho prací zaměřeno ke studiu speciálních případů, zejména malých dimensí (na př. kruhu), bylo způsobeno zajímavým faktem, že právě tyto případy, které se nejvíce vnucují, jsou značně těžší. Dále se ukázalo účelné zabývat se otázkou „řádu" rozdílu $\mathsf{P}(y)$ pro velká $y$ nejen v tom smyslu, že se hledaly asymptotické vzorce platné pro všechna $y$, nýbrž též ve smyslu zkoumání průměrných odchylek $\frac{1}{y}\int_0^y |\mathsf{P}(u)|\,du$ nebo $\sqrt{\frac{1}{y}\int_0^y \mathsf{P}^2(u)\,du}$, kdy odstraňujeme vliv „ojedinělých" hodnot $y$, pro které aritmetická funkce $A(y)$ se značně odchyluje od středního průběhu platného pro „většinu" hodnot $y$.

Jak jsme se již před chvílí zmínili, jedním z prvních případů, pro které byl vyšetřován počet mřížových bodů, byl případ koule nebo pro $n = 2$ případ kruhu. Abychom mohli snadno formulovat výsledky v tomto oboru matematiky, je výhodné používat tohoto běžného označení (funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou definované pro všechna dosti velká $x$, tedy pro $x \to \infty$, při čemž $g(x)$ je funkce kladná): $f(x) = O(g(x))$ značí $|f(x)| < Kg(x)$ pro jistou kladnou konstantu $K$; $f(x) = o(g(x))$ značí $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ a $f(x) = \Omega(g(x))$ je logický zápor ke vztahu $f(x) = o(g(x))$. První hlubší výsledek pro kruh odvodil r. 1906 polský matematik SIERPIŃSKI, který dokázal, že $\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{1}{3}})$. Trvalo celých 16 let, než se holandskému matematikovi van der Corputovi podařilo snížit (celkem však nepatrně, přes použití velmi komplikovaného matematického aparátu) exponent $\frac{1}{3}$ v odhadu zbytkového členu $\mathsf{P}(x)$. Další snižování exponentu čili zlepšování odhadu pro $\mathsf{P}(x)$ naráželo čím dále tím na větší potíže a není uspokojivě rozřešeno dodnes. Aby bylo vidět, kam až snad lze se zlepšováním „řádu" zbytku $\mathsf{P}(x)$ dospět, bylo účelné pokusit se též o odhady zdola pro $\mathsf{P}(x)$. Tak

Hardy a Landau 1915 dokázali, že $\mathsf{P}(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}})$. Z tohoto výsledku je vidět[2]), že exponent $\frac{1}{3}$ v horním odhadu pro $\mathsf{P}(x)$ nelze snížit pod $\frac{1}{4}$. Vysvítá z toho důležitost dolních odhadů v této problematice. Jarník v práci 7 ukázal, že dolní odhad uvedený Landauem platí pro daleko širší kategorii oborů, než je velmi speciální kruh. Pro průběh funkce $\mathsf{P}(x)$ dokázal mimo jiné, že diference $\mathsf{P}(x) = A(x) - V(x)$ mění při $x$ rostoucím do nekonečna neustále svoje znamení, při čemž na „obě" strany dosahuje výše řádu alespoň $x^{\frac{1}{4}}$. Vzniká proto právem otázka, zda tato diference nejeví snad známky jisté periodicity. Touto otázkou aspoň pro kruh se zabývá Jarník v práci 8. Používá přitom bohatě a velmi účinně asymptotických vlastností Besselových funkcí. Velmi pozoruhodná je práce 9. Van der Corput všiml si totiž a dokázal, že odhad $\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{1}{3}})$, který pro kruh dokázal Sierpiński, platí pro daleko obecnější kategorii konvexních oborů v rovině, omezených uzavřenými křivkami, jejichž poloměr křivosti se zvětšujícím se oborem roste nejvýše tak rychle jako v případě kruhu. Zdálo by se proto na prvý pohled, že okolnost, že v případě kruhu lze exponent $\frac{1}{3}$ v horním odhadu snížit (van der Corput), dá se přenést i na případ právě zmíněných obecnějších oborů. Zde však Jarník v práci 9 jasně ukázal, že tomu tak není, že totiž existují konvexní obory uvedených typů, pro které $\mathsf{P}(x) = \Omega(x^{\frac{1}{3}})$. Tato skutečnost vyvolala tak značnou pozornost mezi číselnými theoretiky, že slavný Landau se na ni soustřeďuje v úvodním přehledu k rozsáhlé kapitole pojednávající o mřížových bodech ve svém dnes již klasickém trojsvazkovém díle „Vorlesungen über Zahlentheorie" a charakterisuje tuto okolnost jako okolnost, která vnesla úplný chaos do bádání v tomto oboru, chaos v tom smyslu, že domněnky, které se zdály být na základě podrobných rozborů příslušných důkazů velmi plausibilní, ukázaly se nakonec falešnými. Na tuto okolnost upozorňuje i sovětský matematik J. V. Linnik v komentáři k práci G. F. Voroného: Об одной задачи из теории асимптотических функций v II. díle sebraných spisů Voroného.

Všimněme si nyní blíže případu, že dané základní těleso je elipsoid o osách rovnoběžných s osami souřadnicovými, že tedy běží o vyšetření počtu $A(y)$ celočíselných řešení nerovnosti $Q(x) \leqq y$, kde $Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$ pro $\alpha_i > 0$. Roku 1905 dokázal Minkowski, že $\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{n-1}{2}})$, r. 1915 Landau pak

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{n}{2} - \frac{n}{n+1}}), \tag{1}$$

což odpovídá zmíněnému již odhadu Sierpińského z r. 1906. Pokud se týče odhadu zdola, dokázal Landau v r. 1924, že

$$\mathsf{P}(x) = \Omega(x^{\frac{n-1}{4}}); \tag{2}$$

[2]) Prosíme čtenáře za prominutí, že nebudeme citované výsledky formulovat úplně exaktně. Nedá se to provést, neměl-li by se tento článek rozrůst do přílišných rozměrů. Výsledky jsou uváděny jen v hrubých obrysech pro prvou orientaci.

v roce 1926 SZEGÖ zlepšil tento dolní odhad o logaritmický faktor. Pro speciální případ $n = 4$-dimensionální koule ($\alpha_i = 1$) obdržel r. 1924 Landau výsledek

$$\mathsf{P}(x) = O(x \log x) \tag{3}$$

a r. 1927 Walfisz dokonce

$$\mathsf{P}(x) = O\left(x \frac{\log x}{\log \log x}\right). \tag{4}$$

Dostal se tak „řád", který je „prakticky" o $\frac{1}{2}$ nižší než obecný odhad (1). Přitom bylo použito daleko účinnější metody hodící se však v podstatě jen na tento speciální případ. Prosíme čtenáře, aby si laskavě všiml, jaký boj zde byl sváděn o každý nepatrný zlomek v exponentu nebo dokonce jen o logaritmický faktor v příslušném odhadu. Tento problém byl dále sledován pro celočíselné koeficienty $\alpha_i$ velmi účinnou metodou — opírající se o t. zv. singulární řadu — kterou vypracovali známí matematici HARDY a LITTLEWOOD. Tak se podařilo Landauovi pro $n = 4$ dostat odhad

$$\mathsf{P}(x) = O(x \log^2 x), \tag{5}$$

který byl „po velkém boji" KLOOSTERMANEM zostřen na (3) a WALFISZEM na (4).

Pro celočíselné formy vyšší dimense dávala tato metoda horní odhad

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{n}{2}-1}), \tag{6}$$

který je asymptoticky (pro $n \to \infty$) stejný jako odhad (1), platný pro *všechny* uvažované formy $Q$. Vznikala proto právem otázka, zdali lze vůbec ještě v případě celočíselných $Q$ snížit řád zbytku $\mathsf{P}(x)$. Víme totiž, že jediný známý dolní odhad pro $\mathsf{P}(x)$ platný pro *všechna* $Q$, který právem — vzhledem k jednoduchosti a průhlednosti metody důkazu — vyvolával domněnku, že je definitivní, byl odhad (2), který stále sváděl — jak dnes víme — k beznadějným pokusům snížit aspoň o něco exponent $n/2 - 1$ v horních odhadech v případě celočíselných forem. Tuto nejistotu rázem odstranil Jarník, když v diskusi s Landauem v r. 1925 upozornil na okolnost, která — přesto, že se dala celkem elementárně ukázat — unikla pozornosti předních matematiků zabývajících se touto problematikou, že totiž tento horní odhad je definitivní, neboť platí

$$\mathsf{P}(x) = \Omega(x^{\frac{n}{2}-1}) \tag{7}$$

pro celočíselné formy $Q$.

Když byl takto problém racionálních elipsoidů aspoň pro vyšší dimense (přesněji pro $n \geqq 5$ úplně a pro $n = 4$ až na logaritmický faktor) rozřešen, tím více vstoupil do popředí zájem o „iracionální" elipsoidy, t. j. o případ, kdy poměry koeficientů $\alpha_i$ nejsou racionální. V těchto případech vypověděla velmi účinná Hardyho metoda takřka úplně službu, neboť jejím základem je vyšetřování potenční řady

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_n = -\infty}^{+\infty} z^{Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{8}$$

konvergentní v jednotkovém kruhu. Některé speciální případy iracionální (označme je (9)) daly se sice po velkých útrapách zvládnout i touto metodou (tak Walfisz v r. 1927 obdržel pro jeden takový speciální případ a pro $n \geqq 10$ odhad

$$\mathsf{P}(x) = o(x^{\frac{n}{2}-1}), \tag{10}$$

který jasně ukázal naprosto rozdílné chování elipsoidů racionálních a iracionálních), avšak podstatného kroku kupředu se tím nedocílilo. Walfisz — vědec nad jiné v tomto oboru povolaný — sám v nahoře citovaném článku k tomu podotýká toto (citováno doslovně): „Ačkoliv tedy odhady (33) a (34) (rozuměj odhady pro případy (9)) přinesly jistý průhled do theorie mřížových bodů v iracionálních elipsoidech, bylo přece jen hned od začátku zřejmo, že myšlenkový pochod k nim vedoucí tvořil jen jakýsi orientační prostředek z nedostatku lepšího. Bylo tedy nutno hodit singulární řadu přes palubu a nalézti něco docela jiného. Myslil jsem, že to ještě nějakou dobu potrvá. Tím více mě překvapily — a jistě ne mě samotného — objevy Jarníkovy. V řadě pojednání, jejichž publikace se datuje od středu minulého roku (rozuměj rok 1928) a které originalitou, hloubkou myšlenek a technickým provedením se čítají k nejpozoruhodnějším pracím moderního bádání, ujal se Jarník s velmi vydatnými pomocnými prostředky problému a obdržel tak celou řadu výsledků překvapující přesnosti". Potud citace.

Naznačíme aspoň několika slovy základní myšlenku prací Jarníkových z této doby. Místo potenční řady (8) (kde nutně musí být $Q$ číslo celé) vyšetřuje Jarník řadu

$$\Theta(s) = \Theta_Q(s) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_n = -\infty}^{+\infty} e^{-sQ(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{11}$$

komplexní proměnné $s$, konvergující, a to absolutně, když reálná část $\Re(s) > 0$. Tato řada má tvar $\Theta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{-\lambda_i s}$, kde $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k < \ldots \to \infty$ je posloupnost všech hodnot, kterých $Q(x)$ může nabýt pro celočíselné systémy $x$, a $a_i$ značí, kolikrát $Q(x)$ hodnoty $\lambda_i$ nabývá. Je známo a snadno se zjistí ($\alpha$ reálné, $u > 0$, integrační dráha je přímka rovnoběžná s imaginární osou), že

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \frac{e^{\alpha s}}{s} \, ds = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha > 0 \\ 0 & \text{pro } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Je tedy pro dané reálné $y$ různé od všech $\lambda_i$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty}\Theta(s)\,\frac{e^{ys}}{s}\,\mathrm{d}s=\sum_{\lambda_i<y}a_i\,,$$

což představuje počet celočíselných řešení nerovnosti $Q(x)\leqq y$, tedy vyšetřovanou funkci $A(y)$. K vyšetření uvedeného integrálu (který nezávisí na $u>0$) je účelné — jak ukazuje Jarník — volit integrační dráhu v blízkosti imaginární osy, přesněji řečeno, volit $u=\dfrac{1}{y}$. Aby určil hodnotu tohoto integrálu, dělí Jarník vhodně integrační dráhu na tři intervaly, z nichž prostřední (konečný) je rozložen symetricky vzhledem k reálné ose. Při odhadu těchto tří částí dostaneme (zhruba řečeno) pro střední část objem $V(y)$ elipsoidu $Q$, tedy hlavní člen v odhadu funkce $A(y)$, zbývající dvě části dávají pak v podstatě zbytkový člen $\mathsf{P}(y)$. Tyto zbývající integrační dráhy dělí pak Jarník dále t. zv. Fareyovými zlomky (pro dané číslo $t>0$ je soustava Fareyových zlomků tvořena všemi zlomky s čitateli a jmenovateli celočíselnými (ve tvaru zkráceném), pro které jmenovatel je kladný a nejvýše roven číslu $t$) na intervaly částečné, v nichž provádí odhad integrálu. Přitom užívá transformačních vlastností thetafunkcí.

Není možno zde podrobně rozebrat tuto metodu ani její pozdější velmi účinné modifikace, není ani možno uvést zde v plném znění hlavní výsledky, ke kterým Jarník dospěl v theorii mřížových bodů. Vybereme jen některé výsledky spíše pro ilustraci, při čemž kriteriem výběru bude spíše snadná formulace než hloubka uvedených výsledků v rámci celé theorie.

V práci 18 vyšetřuje Jarník kvadratické formy tvaru

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^2\,, \tag{12}$$

kde koeficienty $\alpha_i$ mohou býti libovolná kladná čísla. Dokazuje pro ně tyto výsledky:

$$\mathsf{P}_Q(y)=O(y^{\frac{n}{2}-1}\log y)\quad\text{pro}\quad n>4\,,$$

$$\mathsf{P}_Q(y)=O(y^{\frac{n}{2}-1}\log^2 y)\quad\text{pro}\quad n=4\,.$$

Naproti tomu ukázal, že pro skoro všechna $\alpha_i$ ($\{\alpha_i\}$ pokládáme za body $n$-dimensionálního kartézského prostoru s obvyklou definicí Lebesgueovy míry) platí $\mathsf{P}(y)=O(y^{\frac{n}{4}+\varepsilon})$ pro každé $\varepsilon>0$. Zajímavé je sledovat případy přechodné, t. j. formy tvaru

$$\begin{aligned}Q(x)=\beta_1(x_1^2+\ldots+x_{k_1}^2)+\beta_2(x_{k_1+1}^2+\ldots+x_{k_2}^2)+\ldots\\ \ldots+\beta_r(x_{k_{r-1}+1}^2+\ldots+x_{k_r}^2)\,,\end{aligned} \tag{13}$$

kde $\beta_i$ jsou libovolná kladná čísla. Těmito případy se Jarník v této práci rovněž zabývá a dospívá „řádově" k definitivním $\Omega$-výsledkům, pokud se týče všech forem, a k definitivním $O$-výsledkům, pokud se týče skoro všech forem.

V práci 19 zobecňuje Jarník výsledek Walfiszův a dokazuje, že pro formy (12), kde aspoň jeden z poměrů $\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$ je iracionální a kde $n \geqq 6$, platí $\mathsf{P}_Q(y) = o(y^{\frac{n}{2}-1})$.

V práci 22 a zejména pak v pracích 68 a 69 zabývá se Jarník opět případem (13), a to nikoliv v celé jeho obecnosti, nýbrž pouze případem $r = 2$, zato však jde do velké hloubky a studuje otázku zbytku $\mathsf{P}_Q(y)$ v závislosti na aritmetickém charakteru podílu $\frac{\beta_2}{\beta_1}$, který zachycuje pomocí rozvoje tohoto podílu v řetězový zlomek. Tyto práce patří mezi nejvýznačnější Jarníkovy práce vůbec.

Aby aspoň jakési světlo bylo vrženo do mezery, která ční mezi $O$ a $\Omega$-odhadem zbytku $\mathsf{P}(y)$ zvláště pro malá $n$, studuje Jarník v pracích 33 a 34 opět formy tvaru (12) a vyšetřuje střední hodnotu zbytkového členu, tedy $T(x) = \sqrt{\frac{1}{x}\int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy}$. Dostává tyto výsledky, které byly v pracích 70, 71 ještě dále zostřeny.

$$T(x) = O(x^{\frac{1}{4}}\log^2 x)\,, \quad T(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}}) \quad \text{pro} \quad n = 2\,,$$

$$T(x) = O(x^{\frac{1}{2}}\log x)\,, \quad T(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}}) \quad \text{pro} \quad n = 3 \quad \text{a}$$

$$T(x) = O(x^{\frac{n}{2}-1})\,, \quad T(x) = \Omega(x^{\frac{n-1}{4}}) \quad \text{pro} \quad n \geqq 4\,.$$

Pro racionální formy a pro $n \geqq 4$ dostává $T(x) = \Omega(x^{n/2-1})$. Pro skoro všechny formy (12) dostává pak tento výsledek

$$T(x) = O(x^{\frac{n-1}{4}}\log^{\frac{3+3n}{2}} x)\,.$$

Až na logaritmický faktor a pokud se střední hodnoty zbytku $\mathsf{P}(y)$ týče, dostává se tak Jarník k odhadům definitivním, které ku podivu právě pro malá $n$ nezávisí na aritmetickém charakteru koeficientů.

Ze všech těchto úvah vyplývá, že aspoň v jistých speciálních třídách kvadratických forem (daných na př. tvarem (13)) nejvyšší „pravý" řád zbytku $\mathsf{P}(y)$ dávají formy racionální, naproti tomu, že skoro všechny formy dávají „pravý" řád zbytku nejnižší. Vzniká proto otázka, zda existují vhodné „meziformy", které by odpovídaly předepsanému „pravému" řádu zbytku $\mathsf{P}(y)$. Touto otázkou se zabývá Jarník v práci 45, kde k důkazu existence takových forem používá s velkým úspěchem jemnější Hausdorffovy míry, o jejímž použití v theorii diofantických aproximací promluvíme později.

Přistupme nyní k rozboru Jarníkových prací z **theorie diofantických aproximací**. Naznačíme nejprve několika slovy, o jakou problematiku zde jde, a vysvětlíme některé pojmy, které se vyskytují v těchto pracích.

První otázka, která se v této theorii vnucuje, je otázka po aproximaci čísel iracionálních $\Theta$ čísly racionálními, tedy zlomky tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p$, $q$ jsou čísla celá, $q > 0$. Je jasné, že snahou zde bude docílit co možná nejlepší aproximace, tedy co možná nejmenšího rozdílu $\left|\Theta - \frac{p}{q}\right|$. Takto formulovaná otázka nemá ovšem velký smysl, když víme, že každé číslo reálné lze s libovolnou přesností aproximovat číslem racionálním. Je proto nutné si všimnout rozdílu $\left|\Theta - \frac{p}{q}\right|$ ve vztahu k velikosti čitatele a jmenovatele (zde stačí se omezit na velikost jmenovatele, neboť jen při trochu lepších aproximacích je velikost čitatele $p \doteq q\Theta$, tedy při daném $\Theta$ přibližně úměrná velikosti jmenovatele) v použitém zlomku $\frac{p}{q}$. Zkrátka žádat, aby diference $\left|\Theta - \frac{p}{q}\right|$ byla malá a přitom jmenovatel použitého zlomku nebyl velký. Vzniká tím přirozená otázka, zda lze při dané aproximační funkci $\psi(q)$ (která konverguje k nule pro $q \to \infty$) celými čísly $p$, $q$ ($q > 0$) vyhovět nerovnosti $\left|\Theta - \frac{p}{q}\right| < \psi(q)$ pro libovolně vysoká $q$, přesněji, zda ke každému $A$ existuje $q \geqq A$ tak, že daná nerovnost je splněna, nebo — což je totéž pro iracionální $\Theta$ — zda tato nerovnost má nekonečně mnoho celočíselných řešení. Přirozeným zobecněním vzniká problém současné aproximace několika iracionálních čísel $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ racionálními čísly $\frac{p_i}{q}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) o společném jmenovateli $q > 0$. Příslušné nerovnosti lze psát též ve tvaru

$$|q\Theta_i - p_i| < q\psi_i(q) = \varphi_i(q)\,,$$

kde $\varphi_i$ můžeme nazvat aproximační funkcí. Jde zde tedy o aproximativní řešení systému lineárních rovnic $q\Theta_i - p_i = 0$ celými čísly $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ při daných $\Theta_i$. Odtud pak je jen krůček k obecné formulaci základního problému theorie lineárních diofantických aproximací.

Budiž dána soustava $n$ lineárních výrazů ($\alpha_{ik}$ a $\beta_i$ jsou daná reálná čísla)

$$L_i \equiv \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}x_k - \beta_i - y_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$ a $n$ kladných funkcí $\varphi_i(t)$ definovaných a konvergujících monotonně k nule pro $t \to \infty$. Pro jednoduchost předpokládejme, že systém rovnic $L_i = 0$ má jen konečný počet celočíselných řešení v $x, y$. V theorii lineárních diofantických aproximací jde o to, zda existují celočíselná řešení v $x, y$ systému nerovností

$$|L_i| < \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

při čemž samozřejmě musíme klást ještě vedlejší podmínku ve tvaru závislosti velikosti $|x_k|$ na $t$, na příklad tak, že žádáme, aby t. zv. výška tohoto řešení

$$X = \max_{k=1,2,\ldots,m} |x_k| \tag{16}$$

nepřekročila parametr $t$, tedy aby bylo

$$X \leqq t. \tag{17}$$

Z toho vznikají dvě základní úlohy.

Úkol (A): Nalézti kriteria pro existenci nebo neexistenci řešení nerovností (15) a (17) celočíselnými systémy $x, y$ pro všechna $t \to \infty$.

Úkol (B): Nalézti kriteria pro existenci nebo neexistenci celočíselných řešení vztahů (15) a (17) pro posloupnost hodnot $t_j \to \infty$. Jinými slovy zde žádáme, aby pro libovolně velká $A$ existovaly celočíselné systémy $x, y$ tak, že $t = X = \operatorname{Max} |x_k| \geqq A$ a přitom bylo $|L_i| < \varphi_i(X)$. V tomto případě říkáme, že systém (14) připouští aproximaci $\{\varphi_i(t)\}$.

Je samozřejmé, že lze sestavit mnoho rozmanitých variant těchto úkolů a formulovat úkoly další. Mezi úkoly (A) a (B) je ovšem velmi úzký implikační vztah, který nebudeme však zde rozebírat. Podotýkáme pouze, že základní aproximační úloha pro jedno nebo více reálných čísel $\Theta_i$ tak, jak byla před chvílí formulována, odpovídá úkolu (B).

Uveďme ještě tuto terminologii. Jestliže čísla $\beta_i$ vyskytující se ve výrazech (14) jsou vesměs rovna nule nebo — což je pro řešení uvedených úkolů stejné — jsou rovna vesměs číslům celým, nazýváme příslušné problémy homogenními, jinak problémy nehomogenními. Uveďme ještě jednu okolnost. V literatuře pojednávající o diofantických aproximacích byly dříve vyšetřovány hlavně tyto dva případy: Matice koeficientů $\{\alpha_{ik}\}$

a) má jen jeden sloupec ($m = 1$); tu jde zřejmě — v případě problému homogenního — o případ v úvodě naznačený, tedy o případ simultánní aproximace několika čísel reálných;

b) má jen jeden řádek ($n = 1$).

Dále pak velmi často se volívají všechny aproximační funkce $\varphi_i(t)$ stejné a klademe pak $\varphi_i(t) = \varphi(t)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Uveďme nejprve pro orientaci základní výsledek této theorie vyjádřený větou Dirichlet-Kroneckerovou. Je-li systém (14) homogenní, připouští vždy aproximaci

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^{\frac{m}{n}}}. \tag{18}$$

Nemělo by tedy celkem smysl studovat zde aproximační funkce $\varphi(t)$, které konvergují „pomaleji" k nule než (18).

V případě $n = m = 1$ plyne z Dirichlet-Kroneckerovy věty, že všechna iracionální čísla $\Theta$ připouštějí aproximaci $1/t$ (dokonce — Hurwitz — $1/t\sqrt{5}$). Tuto aproximační funkci nelze obecně „zlepšit". Pomocí theorie řetězových zlomků lze však snadno sestrojit iracionální číslo $\Theta$, které připouští libovolně předepsanou aproximaci $\varphi(t)$, avšak nepřipouští aproximaci v jistém smyslu „lepší", t. j. připouští „právě" aproximaci $\varphi(t)$. V případě $nm > 1$ nemáme pro vyšetřování podobných otázek prostředek analogický a tak mocný, jakým je theorie řetězových zlomků. Zde lze však při vyšetřování existenčních otázek vyjít ze skutečnosti, že množina čísel $\Theta$ (nebo množina bodů $(\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ v eukleidovském $n$-dimensionálním prostoru) připouštějících aproximační funkci $\varphi(t)$ se zvětšující se rychlostí konvergence funkce $\varphi(t)$ (k nule) se zmenšuje, zachytit dále vhodným způsobem „velikost" této množiny a použít pak těchto vysledků k řešení různých existenčních otázek. Ostatně studium otázek závislosti „velikosti" uvedených množin na funkci $\varphi(t)$ je samo o sobě zajímavé i v případě $n = m = 1$. Jarník proto věnuje tomuto studiu velkou pozornost a dociluje zde pozoruhodných výsledků. Jistý pohled na tento problém vrhá již Chinčinova věta, která říká, že skoro všechna $\Theta$ ve smyslu Lebesgueovy theorie míry připouštějí, resp. nepřipouštějí danou (dosti obecnou[3]) aproximaci $\varphi(t)$, jestliže $\int^{\infty} \varphi(t)\,dt$ je divergentní, resp. konvergentní. V případě simultánních aproximací platí obdobná věta, pouze integrál $\int^{\infty} \varphi(t)\,dt$ nahradí se integrálem $\int^{\infty} \varphi^n(t)\,dt$. Tak v případě aproximačních funkcí typu mocniny $1/t^s$ je toto rozhraní (pro $n = 1$) dáno exponentem $s = 1$, tedy skoro všechna $\Theta$ připouštějí aproximaci „právě" $1/t$.

Jak je z toho vidět, je prostředek charakterisovat „velikost" množiny pomocí Lebesgueovy míry pro tyto účely dosti hrubý, když nedocilujeme zde odstupňování velikosti těchto množin ani pro různé aproximační exponenty $s$. Je proto třeba nahradit jej prostředkem jemnějším. To se Jarníkovi skutečně podařilo. Pro jemnější klasifikaci množin Lebesgueovy míry nulové použil Jarník míry Hausdorffovy, se kterou jsme se již setkali v jedné jeho práci z theorie mřížových bodů.

Budiž dána pro $x > 0$ rostoucí a spojitá t. zv. měřicí funkce $\lambda(x)$, pro kterou $\lambda(x) \to 0$, když $x \to 0$, a nějaká množina $A$ bodů v kartézském (pro jednoduchost jednodimensionálním) prostoru. V případě Hausdorffovy míry $L(A; \lambda(x))$ dané množiny $A$ vzhledem k měřicí funkci $\lambda(x)$ jde v podstatě o to, že neměříme „délku" množiny $A$ celkovou délkou intervalů „těsně" pokrýva-

[3]) T. j. libovolnou funkci až na jisté podmínky monotonie, které pro celkový pohled do této theorie nejsou podstatné, a proto je neuvádíme. Rovněž v dalším přejdeme takové podmínky mlčky.

jících množinu $A$ tak, jak je tomu u míry Lebesgueovy, nýbrž že místo délky $d$ každého intervalu vezmeme délku transformovanou měřicí funkcí $\lambda$, tedy $\lambda(d)$. Přesněji: Pro dané $\varepsilon > 0$ definujeme $L_\varepsilon(A; \lambda(x))$ jako infimum všech součtů $\sum_i \lambda(d_i)$ vztahujících se na všechna možná pokrytí nejvýše spočetným množstvím otevřených intervalů o délkách $d_1, d_2, \ldots$. Hausdorffovu míru $L(A; \lambda(x))$ definujeme pak jako limitu $\lim_{\varepsilon \to 0} L_\varepsilon(A; \lambda(x))$. Čtenář si snadno modifikuje tuto definici pro prostor vícedimensionální. Jsou-li hodnoty měřicí funkce $\lambda(x)$ pro malá $x$ podstatně větší než $x$, můžeme tušit, že příslušná Hausdorffova míra bude podstatně větší než míra Lebesgueova a že můžeme tedy event. dostat nenulovou Hausdorffovu míru pro množiny o Lebesgueově míře nulové. V práci 28 ukazuje Jarník, že v podstatě lze pro dané množství $A$ pomocí vhodných měřicích funkcí $\lambda(x)$ docílit rozmanité velikosti Hausdorffovy míry množiny $A$. Tohoto mocného prostředku — theorie míry vůbec a zvláště Hausdorffovy — používá Jarník k vedení existenčních důkazů ve svých pracích o diofantických aproximacích velmi často a dociluje hlubokých výsledků. Podrobněji najde čtenář tyto myšlenky rozvedeny v knize J. F. Koksma, Diophantische Approximationen (Berlin, 1936), vyšlé ve známé sbírce Ergebnisse der mathematischen Wissenschaft. Zde na str. 27, 48, 49, 73, 74, 75 jsou uvedeny odbornější a přehlednější referáty o tomto úseku Jarníkovy činnosti začleněné do širšího rámce, takže lépe vynikne její souvislost s problematikou řešenou jinými odborníky.

Uvedeme nyní hlavní Jarníkovy výsledky sem spadající.

Tak v práci 30 vyšetřuje Jarník Hausdorffovu míru množiny čísel $\Theta$, která připouštějí (při daném $s > 1$) aproximaci $1/t^s$, ale nepřipouštějí aproximaci $1/t^{s+\varepsilon}$, kde $\varepsilon > 0$. Podobně v práci 26 klasifikuje množiny reálných čísel $\Theta$ s omezenými posloupnostmi částečných jmenovatelů a aplikuje tyto výsledky na množiny čísel $\Theta$ patřících k aproximačním funkcím $1/(t \log^s t)$ $(0 < s \leqq 1)$. V práci 35 je určena Hausdorffova míra množiny bodů $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ $\ldots, \Theta_n)$ v $n$-dimensionálním kartézském prostoru, připouštějících simultánní aproximační funkci $\varphi(x)$, je-li měřicí Hausdorffova funkce $f(x)$ ($\varphi$ a $f$ patří do dosti širokých tříd funkcí), a to ve formě kriteria obdobného Chinčinově větě nahoře citované. Výsledná věta má pak zhruba tento tvar: Uvedená Hausdorfova míra je 0 nebo $\infty$ podle toho, zda

$$\int^{\infty} f\left(2\,\frac{\varphi(t)}{t}\right) t^n \, dt$$

je konvergentní nebo divergentní. V téže práci Jarník dále ukazuje existenci systému čísel $\{\Theta_i\}$, který připouští danou simultánní aproximaci $\varphi(t)$, nepřipouští však aproximaci trochu silnější, totiž $\varphi(\lambda(t))$, kde $\lambda(t)$ je předem daná (dosti obecná) funkce, pro kterou $\lambda(t)/t \to \infty$ pro $t \to \infty$. Tato — jedna z nejhlubších Jarníkových prací — umožňuje zodpovědět celou řadu těch nejsubtilnějších existenčních otázek nahoře uvedeného typu. K některým speciálním z těchto otázek vrací se Jarník v práci 36, kde podává pro jejich řešení důkaz jednodušší. V práci 37 zavádí Jarník pro systém $n$ reálných čísel $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$ jakýsi „aproximační stupeň" $S(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$ tohoto systému jako horní mez exponentů $s$, pro které daný systém připouští simultánní aproximaci $1/t^s$. V práci pak vyšetřuje vztah (v podobě nerovnosti) mezi aproximačním stupněm dvou čísel $S(\Theta_1)$ a $S(\Theta_2)$ a aproximačním stupněm simultánním $S(\Theta_1, \Theta_2)$ a ukazuje — a v tom spočívá hlavní cena práce — jeho ostrost.

Tyto všechny práce se vztahovaly k homogennímu úkolu (B), a to k případu a). V některých pracích vyšetřuje Jarník souvislost mezi případem a) a b) u úkolu (B). Podle Dirichlet-Kroneckerovy věty víme, že každá $n$-řádková a $m$-sloupcová matice $A = \{\Theta_{ik}\}$ připouští aproximační funkci $\varphi(t) = 1/t^{\frac{m}{n}}$. Některé matice připouštějí aproximaci daleko lepší. Označme stupněm aproximace $\beta(A)$ horní mez exponentů $\alpha$, pro které $A$ připouští aproximaci $1/t^{\frac{m+\alpha}{n}}$. Je zajímavé studovat na příklad souvislost mezi stupněm aproximace $\beta(A)$ dané matice $A$ a stupněm aproximace $\beta(A')$ matice transponované $A'$. V případě jednořádkové matice $A$ $(n = 1)$ [pozor! označení je trochu odchylné od označení v Jarníkových pracích] dokázal Chinčin vztah

$$\beta(A) \geqq \beta(A') \geqq \frac{\beta(A)}{(m-1)\,\beta(A) + m^2}\,. \tag{19}$$

V pracích 53, 54, 56 zabývá se Jarník velmi subtilní otázkou ostrosti těchto vztahů a řeší ji.

V práci 59 podal Jarník společně s Erdösem na základě Šnirelmanovy ideje „hustoty součtu posloupností" nový, velmi pěkný důkaz jedné zajímavé Chinčinovy věty, která v podstatě zní takto: Budiž $m \geqq 1$ pevné, celé číslo a $n = 1$. Ke každému $\gamma > 0$ existuje $\Gamma > 0$ tak, že z neřešitelnosti homogenního úkolu (B) při aproximační funkci $\gamma/t^m$ plyne řešitelnost nehomogenního úkolu (A) při aproximační funkci $\Gamma/t^m$ při téže matici $\{\Theta_k\}$ a libovolném reálném $\beta_1$. Použitím právě uvedené metody podává Jarník v práci 60 důkaz obdobné Chinčinovy věty, jenže pro případ $n \geqq 1$, $m = 1$.

Velmi pozoruhodná je práce 62, která řeší podobný problém jako Chinčin („Übertragungssatz"; viz vzorec (19)), jenže pro úkol (A), kdežto v Chinčinově vzorci (19) vyskytují se stupně aproximace $\beta$ definované pomocí aproximačních funkcí typu $1/t^s$, ale vzhledem k úkolu (B). Kromě toho jde zde Jarník i po jiných stránkách daleko více do hloubky, zejména neomezuje se na aproximační funkce tvaru mocniny. Pozoruhodná je také okolnost, že výsledky v tomto případě (totiž (A)) se podstatně liší od výsledků v případě (B).

V práci 83 nalezl pak Jarník zajímavé vztahy mezi stupněm aproximace příslušným k homogennímu úkolu (A) a stupněm aproximace příslušným k odpovídajícímu homogennímu úkolu (B) (při téže základní matici), a to v případě obecném (t. j., kdy vyšetřovaná matice nemusí být jednořádková nebo jednosloupcová).

Nežli přejdeme k hodnocení Jarníkových prací, které přímo spadají nebo velmi úzce souvisí s vlastní geometrií čísel, musíme zavést opět několik pojmů, které ostatně se vyskytují již v základní Minkowského větě z geometrie čísel. Je to pojem postupných minim.

Budiž $K$ geometrické, uzavřené, omezené, konvexní, podle počátku symetrické těleso v kartézském $n$-dimensionálním prostoru $R_n$, pro které počátek je bodem vnitřním.

Představme si, že se reálný parametr $\sigma$ zvětšuje od nuly do nekonečna, a budiž $\sigma_s$ $(1 \leqq s \leqq n)$ první jeho hodnota, pro kterou existuje $s$ lineárně nezávislých mřížových bodů $x_1, x_2, \ldots, x_s$ tak, že $\frac{x_i}{\sigma_s} \in K$ čili $x_i \in \sigma_s K$ pro $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s$. Body $x_1, x_2, \ldots, x_s$ nemusí být (a také nejsou) tímto požadavkem určeny jednoznačně. Z konvexity tělesa a z okolnosti, že $0 \in K$, plyne, že pro větší hodnoty dilatačního parametru $\sigma$ (tedy pro $\sigma > \sigma_s$) tím spíše $x_i \in \sigma K$ pro $i = 1, 2, \ldots, s$. Čísla $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ nazýváme (Minkowského) postupnými minimy tělesa $K$. Pro větší zřetelnost často tato minima značíme obšírněji $\sigma_s(K)$. Zřejmě je $\sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \ldots \leqq \sigma_n$.

Základní Minkowského věta z geometrie čísel pak praví, že

$$\frac{2^n}{n!} \leqq \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \, \mu(K) \leqq 2^n , \tag{20}$$

kde $\mu$ značí Lebesgueovu míru, tedy $\mu(K)$ v tomto případě objem tělesa $K$. Konstanty $2^n$ a $\frac{2^n}{n!}$ na obou stranách nerovnosti (20) jsou ostré. V práci 78 zabývá se Jarník charakterisací případů, kdy v (20) platí znamení rovnosti, a to metodou Estermannovou.

Budiž $K$ geometrické těleso mající vlastnosti nahoře vytčené. Definujme k němu těleso polární $K'$ jako maximální těleso mající tuto vlastnost: Je-li $x \in K$, $x \neq 0$, pak $K'$ se celé nachází v jednom z uzavřených poloprostorů, ve které polární rovina $\varrho(x)$ bodu $x$ vzhledem k jednotkové ploše kulové (t. j. k ploše kulové o středu v počátku a o jednotkovém poloměru) dělí prostor $R_n$ (totiž v tom poloprostoru, ve kterém leží počátek). Těleso $K'$ uvedené vlastnosti vždy existuje a je určeno jednoznačně. Má rovněž vlastnosti vytčené v předpokladech o $K$. Buďtež $\tau_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ postupná minima tělesa $K'$, tedy $\tau_i = \sigma_i(K')$ a klaďme $\sigma_i = \sigma_i(K)$. Mahler dokázal, že pro $i = 1, 2, \ldots, n$ je

$$1 \leqq \sigma_i \tau_{n+1-i} \leqq (n!)^2 \tag{21}$$

a

$$\frac{4^n}{(n!)^2} \leqq \mu(K)\,\mu(K') \leqq 4^n\,. \tag{22}$$

Dále ukázal, že v některých případech (a těch Jarník právě dále používá) lze omezující konstanty zlepšit. Této práce použil Jarník k vyšetření souvislosti aproximačních vlastností příslušných k matici $A = \{\alpha_{ik}\}$ a k matici transponované $A' = \{\alpha_{ki}\}$. V pracích 64 a 73 zabývá se tímto problémem a ukazuje, jak lze z neřešitelnosti homogenního úkolu (A), resp. (B) pro matici $A$ a danou aproximační funkci $\varphi$ soudit na řešitelnost nehomogenního úkolu (B), resp. (A) pro transponovanou matici $A'$, libovolné koeficienty $\beta_i$ a jistou aproximační funkci, která jednoduše souvisí s danou funkcí $\varphi$. Kromě toho práce 73 obsahuje některé metodicky zcela původní Jarníkovy metrické výsledky.

V práci 76 zabývá se Jarník dvoudimensionálním případem středově symetrického, konvexního oboru, omezeného křivkou, jejíž poloměr křivosti je všude nejméně roven $\varrho > 0$. Vyšetřuje pak postupná minima $\sigma_1, \sigma_2$ tohoto oboru a udává horní odhad pro součin $\sigma_1\sigma_2$, který závisí na $\varrho$ a na poměru $\sigma_1/\sigma_2$.

Práce 72, 74, 77 zabývají se zobecněním Minkowského postupných minim a úvah na tělesa nikoliv nutně konvexní. V definici čísel $\sigma_s$ vystupuje pak ovšem místo $s$ lineárně nezávislých mřížových bodů $x_1, x_2, \ldots, x_s$ $s$ lineárně nezávislých rozdílů mřížových bodů $y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_s - x_s$, kde $x_i \in K$, $y_i \in K$. Poněvadž těleso sestávající z bodů $y - x$ (kde $x$ a $y$ probíhají body z tělesa $K$) nemusí být konvexní, je zde situace trochu komplikovanější, neboť lze zavésti několik navzájem neekvivalentních definic postupných minim. Jarník odvodil v tomto obecném případě nerovnost analogickou k druhé z Minkowského nerovností (20), i když s větší hodnotou konstanty vpravo. Přesnou hodnotu této konstanty určil později a větu ještě zobecnil vynikající anglický matematik Rogers.

Práce 65, 66, 75 přenášejí některé základní věty z theorie diofantických aproximací do oboru $p$-adických čísel.

Doposud jsme se zabývali Jarníkovými pracemi z jeho nejvlastnějšího oboru, totiž z theorie čísel. Přejdeme nyní k hodnocení jeho ostatních vědeckých publikací.

V práci 1 zabývá se Jarník vzájemnou polohou a rozložením nulových bodů reálných integrálů Besselových diferenciálních rovnic $y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$ pro různé řády $\nu$. Označíme-li $B_\nu(x)$, resp. $\overline{B}_\mu(x)$ dva libovolné integrály uvedené diferenciální rovnice řádu $\nu$-tého, resp. $\mu$-tého, potom pro $\frac{1}{2} < \mu < \nu$ a pro $\alpha_r < \beta_s$ jakož i pro $0 \leqq \mu < \nu < \frac{1}{2}$ a $\beta_s < \alpha_r$ je $\beta_{s+1} - \beta_s < \alpha_{r+1} - \alpha_r$.

Přitom $\alpha_r$, resp. $\beta_s$ je $r$-tý, resp. $s$-tý kladný nulový bod funkce $B_\nu(x)$, resp. $\overline{B}_\mu(x)$. Kromě toho jsou zde dokázány věty, které podstatně zobecňují výsledky, ke kterým dospěl SCHAFHEITLIN.

Práce 2 zabývá se podrobnějším studiem, zejména derivovanými čísly, známé spojité funkce Bolzanovy, která v žádném bodě nemá derivaci. Jarník zde zvláště ukazuje, že tato funkce v žádném vnitřním bodě nemá derivaci, ani nekonečnou, dále že derivace zleva i zprava mohou být pouze nekonečné a existují současně jen v bodech jisté spočetné množiny.

V práci 3 užívá Jarník metody postupných aproximací na dosti obecnou nelineární integrální rovnici $\Phi[u, \varphi(u)] = \int_0^x \Psi[u, s, \varphi(s)]\, ds$, což zahrnuje případ i nelineární integrální rovnice 1. druhu (LALESCO řešil podobnou metodou pouze rovnici 2. druhu).

Je téměř bezprostředně patrno, že má-li funkce $f(x)$ spojitá a konečná v intervalu $\langle a, b\rangle$ derivaci v každém jeho bodě, pak tato derivace je funkce 1. třídy (t. j. limita posloupnosti funkcí spojitých), a tedy dle Bairovy věty množina bodů, v nichž $f'(x)$ je spojitá, je hustá v daném intervalu. Jarník v práci 5 ukazuje, že předpoklad této věty o spojitosti funkce $f(x)$ lze potlačit. Zde je nutno všude připustit i limity nekonečně velké, zejména tedy připustit za bod spojitosti i bod, v němž hodnota funkce je nekonečná, jen když je splněna příslušná limitní podmínka. Do jisté míry zobecněním metody užité v této práci vznikla práce 10, ve které Jarník charakterisuje funkce $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 1. třídy Bairovy (v $n$ nezávisle proměnných a definovaných na jisté omezené dokonalé množině $P$) jako jisté limity (nikoliv nutně spojitých) funkcí $2n$ proměnných $F(y, z)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ pro případ, že $y \to x$, $z \to x$, $y \neq z$.

V práci 6 se v podstatě rozšiřuje definiční obor dané funkce $f(x)$, definované v dokonalé části $A$ jistého intervalu $I$, na celý tento interval tak, aby v bodech množiny $I - A$ funkce $f(x)$ měla konečnou derivaci, a dále, aby v těch bodech množiny $A$, ve kterých původní funkce vzhledem k množině $A$ má derivaci, měla derivaci, a to stejnou, i funkce rozšířená. Obecněji zabývá se dále tato práce úlohou, jak lze volit derivovaná čísla hledané rozšířené funkce $f(x)$, aby její existence byla zaručena.

Práce 11, 13 a 14 se zabývají přerovnáváním nekonečných řad. Prvá z těchto prací vznikla do jisté míry zobecněním úvah vedoucích k známé Riemannově větě o přerovnávání relativně konvergentních řad. Jarník zde z dané posloupnosti $c_1, c_2, \dots$ vedoucí k relativně konvergentní řadě $c_1 + c_2 + \dots$ vybírá pevnou částečnou posloupnost $a_1, a_2, \dots$ (složenou nikoliv nutně z nezáporných elementů posloupnosti dané) a zkoumá součty řad vzniklých rozmanitým zasunutím řady $a_1 + a_2 + \dots$ a řady $b_1 + b_2 + \dots$ do sebe. Přitom $\{b_i\}$ je posloupnost komplementární k posloupnosti $\{a_i\}$ vzhleden k dané posloupnosti $\{c_i\}$. Druhá z těchto prací zabývá se přerovnáváním nekonečných řad s komplexními členy. Na rozdíl od základní práce STEINITZOVY týkající se této problematiky, vyšetřuje zde Jarník netoliko případy konvergentního přerovnání, nýbrž všechny případy, a místo součtů příslušných řad vyšetřuje množiny $M(a_1 + a_2 + \ldots)$ hromadných bodů částečných součtů těchto řad. Označme $M(a_1, a_2, \ldots)$ sjednocení všech množin $M(b_1 + b_2 + \ldots)$ pro všechna přerovnání $b_1 + b_2 + \ldots$ řady $a_1 + a_2 + \ldots$. Třetí z těchto prací určuje všechny možné typy množin $M(a_1, a_2, \ldots)$. Ukazuje se, že tyto množiny mají velmi jednoduchou strukturu.

V práci 15 uvádí Jarník elementární důkaz známé ARZELOVY věty o záměně operace integrování a limitování v případě Riemannovy definice integrálu, který sestavil pro druhé vydání Petrova Integrálního počtu. Tento důkaz má tu přednost, že se v něm nepoužívá ani theorie míry, ani definice Lebesgueova integrálu. Všechny pojmy a věty z theorie množin (a jde o pojmy a věty nejjednoduššího charakteru), kterých je v důkazu použito, jsou zde zavedeny, resp. odvozeny.

V práci 23 vyšetřuje Jarník spolu s K. GRANDJOTEM, E. LANDAUEM a J. F. LITTLEWOODEM podmínky, které musí splňovat koeficienty $a_n$ trigonometrické řady $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, aby $f(x) \to \infty$ pro $x \to 0$.

Pro určení dolního Riemannova integrálu dané funkce není třeba znát její průběh. Stačí znát toliko t. zv. dolní součty. V práci 25 klade si autor otázku, do jaké míry určují tyto dolní součty funkci samu. Ukazuje se, že v případě funkcí zpolaspojitých zdola s jedné strany je v podstatě funkce svými dolními součty určena jednoznačně.

V práci 29 podává Jarník jiné řešení problému řešeného O. BORŮVKOU, který uvádíme v trochu populárním a méně přesném znění. Je dáno $n$ obcí, které se mají spojit elektrickou sítí o nejmenší spotřebě materiálu tak, aby uzly sítě se nacházely pouze v daných obcích.

Článek 43 zabývá se podobnou problematikou jako článek 29, metoda důkazu je ovšem úplně jiná. Nepožaduje se zde však, aby vrcholy minimální sítě byly v daných bodech.

V pracích 4, 39, 42, 44, 46, 48, 52, 55 navazuje Jarník na práce AUERBACHOVY, BANACHOVY, BESICOVITCHOVY, MAZURKIEWICZOVY, SAKSOVY a STEINHAUSOVY a studuje vlastnosti derivovaných čísel reálných funkcí, které platí pro skoro všechny funkce spojité nebo omezené. Přitom se díváme na funkce jako na elementy ve funkcionálním prostoru s obvyklou definicí vzdálenosti funkcí a název „skoro všechny" znamená všechny elementy tohoto prostoru až na množinu 1. kategorie (t. j. množinu, kterou lze vyjádřit jako spočetný součet množin řídkých). V článku 42 je obšírněji rozvedena metoda užívaná v těchto pracích, kde kromě toho je ukázáno, že „skoro všechny" funkce spojité v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nabývají maxima a minima jen jednou, každé jiné své hodnoty pak nekonečněkrát. V práci 55 zobecňuje se pojem derivace v tom smyslu, že místo podílu $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se vyšetřuje podíl $\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)}$, kde $\varphi$ je daná funkce definovaná v okolí bodu $h = 0$, pro kterou $h\varphi(h) > 0$ pro $h \neq 0$, $\lim_{h=0} \varphi(h) = 0$. Práce 46 navazuje na výsledky BANACHOVY, DENJOYOVY, CHINČINOVY, SAKSOVY a ZYGMUNDOVY. Vyšetřují se zde vlastnosti aproximativních derivací reálných měřitelných funkcí $x(t)$. Přitom aproximativní derivací funkce $x(t)$ nazýváme limitu

$$\lim_{t'\to t} \frac{x(t')-x(t)}{t'-t},$$

jestliže $t'$ probíhá jistou měřitelnou množinu $E$ mající bod $t$ za bod metrické hustoty, t. zn. za bod, pro který platí ($h \geqq 0$, $k \geqq 0$, $h + k > 0$)

$$\lim_{h,k\to 0} (h+k)^{-1} \mu[E \,.\, (t-h, t+k)] = 1,$$

kde $\mu$ značí Lebesgueovu míru. Tento obor Jarníkovy tvůrčí vědecké činnosti by potřeboval zvláštního rozvedení a zhodnocení jak pro svoji rozsáhlost, tak pro vynikající výsledky, ke kterým zde Jarník dospěl. Touto problematikou se zabývá i známý Jarníkův dodatek k Čechovým „Bodovým množinám".

Článek 41 navazuje na práce BANACHOVY a YOUNGOVY, ve kterých jsou studovány vlastnosti množin bodů, ve kterých derivace spojité funkce $f'(x)$ je $\infty$. Jarník zde v jistém smyslu obrací jejich výsledky, neboť (zhruba řečeno) ukazuje, že k množině mající vlastnosti uvedené v oněch pracích existují naopak rostoucí funkce spojité, pro které $f'(x) = \infty$ právě v bodech této množiny. Na tuto práci navázal ZAHORSKI, který tyto výsledky dovršil.

V práci 49 vyšetřuje Jarník spolu s Landauem souvislost mezi součtem $\sum_{a\leqq n\leqq b} e^{2\pi i f(n)}$ a příslušným integrálem $\int_a^b e^{2\pi i f(x)}\,dx$ v případě, že jde o funkci, jejíž derivace $f'(x)$ je v intervalu $\langle a,b\rangle$ neklesající a pro niž platí $0 \leqq f'(x) \leqq \frac{1}{2}$. Van der Corput dokázal, že existuje absolutní konstanta $C$ tak, že uvedený součet a integrál se vždy liší nejvýše o $C$. V práci je ukázáno, že za konstantu lze volit hodnotu $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}}$ a že tuto konstantu nelze již obecně snížit. Pro některé speciální případy je udána i nižší hodnota této konstanty.

Práce 50, 51 navazují na práce SIERPIŃSKÉHO, SCHREIERA a ULAMA. Týkají se vytvořování funkcí jistého typu (na př. spojitých, definovaných v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a nabývajících hodnot rovněž z intervalu $\langle 0, 1\rangle$) superposicí z jistého počtu (pokud možno minimálního) funkcí tohoto typu.

Práce 57 zpřesňuje výsledek docílený M. SCHMEISEROVOU (Fund. Math. 22) a zkoumá vzájemnou souvislost množin limitních čísel dané funkce $f(P) = f(x, y)$ při přibližování se k jistému bodu $P$ dané eukleidovské roviny ve dvou různých směrech. Jarník ukazuje, že až na výjimky v jistém smyslu nepatrné každé dvě takové množiny mají alespoň jedno limitní číslo společné. Nazvěme derivovaným číslem zprava (pozor! toto názvosloví nesouhlasí s obvyklým) dané reálné funkce $F(x)$ definované pro všechna reálná $x$ v bodě $x$ číslo $d$, které lze napsat ve tvaru $d = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n}$ pro vhodnou posloupnost $\{h_n\}$, kde $h_n > 0$, $h_n \to 0$. Obdobný název zavádíme pro derivovaná čísla zleva. Pak z Jarníkovy věty na příklad plyne, že v každém bodě $x$ (až na nejvýše spočetnou množinu) existuje derivované číslo zprava, které je současně derivovaným číslem zleva.

Akademik E. Čech v článku „Topologické prostory" Časopis *66* (1937) zavádí obecné topologické prostory $P$ tím, že každé množině $M$ je přiřazen uzávěr $uM$ splňující docela elementární předpoklady:

$$u\emptyset = \emptyset\,; \quad M \subset P \Rightarrow M \subset uM\,, \quad M \subset N \subset P \Rightarrow uM \subset uN\,.$$

Neustálým tvořením uzávěrů z uzávěrů předcházejících množin dospíváme obecně k množinám širším. Existuje však pro dané $M \subset P$ nejmenší ordinální číslo $\xi$, pro které $u^{\xi+1}M = u^{\xi}M$. Jarník v práci 61 studuje vlastnosti množiny čísel $\xi$, probíhá-li $M$ všechny části prostoru $P$.

V článku 79 uvádí Jarník osm různých, názoru odpovídajících definic kružnice křivosti dané křivky, zkoumá jednak podmínky existence kružnice křivosti v jednotlivých případech, jednak vzájemné implikace těchto definic. Jejich diskuse má v elementární diferenciální geometrii velký význam, neboť v literatuře najdeme u různých autorů nejrozmanitější definice kružnice křivosti a čtenář nedovede někdy ihned odhadnout ekvivalenci nebo neekvivalenci těchto definic.

V článku 82 řeší Jarník problém položený J. MIKUSIŃSKIM, zdali totiž lze nalézti dvě spojité funkce $x(\tau)$, $y(\tau)$ v intervalu $\langle 0, t\rangle$ tak, aby jejich konvoluce, t. j. funkce $z(\sigma) = \int_0^\sigma x(\sigma - \tau)\, y(\tau)\, d\tau$ v intervalu $0 < \sigma < t$ neměla nikde derivaci. Jarník skutečně takovou dvojici funkcí konstruuje a dokonce ukazuje, že skoro všechny (ve smyslu kategorií) dvojice spojitých funkcí $x(\tau)$, $y(\tau)$ mají tuto vlastnost.

Všeobecně známá je věta: Jestliže Wronského determinant $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ (element v $k$-tém řádku a $i$-tém sloupci je $(k - 1)$-ní derivace $f_i^{k-1}$, $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq i \leqq n$), který přísluší k funkcím $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ definovaným v jistém intervalu $(a, b)$ má v intervalu $(a, b)$ hodnost $l \leqq n$ tak, že jistý pevný determinant $l$-tého řádu utvořený z prvých $l$ řádků je různý od nuly v $(a, b)$, pak funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ mají v intervalu $(a, b)$ stupeň závislosti $n - l$, t. j. existuje $n - l$ lineárních kombinací (s konstantními koeficienty) těchto funkcí identicky rovných nule tak, že koeficienty těchto kombinací tvoří matici hodnosti $n - l$. Jarník v práci 85 podstatně zobecňuje tento výsledek, neboť ukazuje, že k platnosti uvedeného tvrzení stačí předpokládat, že determinant $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ má ve všech bodech intervalu $(a, b)$ touž hodnost, totiž $l$.

Pokusili jsme se aspoň zhruba na těchto stránkách nastínit hlavní směry vědecké produkce našeho jubilanta a prosíme čtenáře za prominutí, že při obsáhlosti jeho literární činnosti nemůže být tento referát ani zdaleka úplný a dokonalý. Pokud se týče rozboru a hodnocení ostatní publicistické, pedagogické a organisační činnosti Jarníkovy, zejména pokud se týče jeho obsáhlých monografií z diferenciálního a integrálního počtu a některých jeho velmi dokonalých a úplných kritických studií (B. Bolzano, D 6, D 34), odkazujeme čtenáře na článek, který k šedesátinám jubilantovým vyjde v *Pokrocích matematiky, fysiky a astronomie*, roč. *3* (1958).

Závěrem bychom chtěli vyzvednout ještě několik povahových rysů Jarníkovy osobnosti.

Akademik Jarník je člověkem skromným, někdy až příliš skromným, který vždy a za všech okolností jedná s nevšedním taktem. Nikdy a nikomu nedá najevo svou vědeckou převahu. Je trpělivý, někdy až příliš trpělivý v jednání. V situacích, kdy daleko mladší a daleko méně odborně fundovaní pracovníci ztrácejí rozvahu, Jarník zachovává klid. Je v tom kromě vysoké duševní inteligence a schopnosti posuzovati všechny věci se širokého hlediska také kus vypěstované osobní discipliny a síly vůle, která není každému dána. Pro tyto vzácné vlastnosti je Jarník nejen všemi svými přáteli ctěn a uznáván, ale také skutečně velmi oblíben. Má značný rozhled po kultuře, vřelý vztah k hudbě a je po několik desítiletí pravidelným návštěvníkem pražských koncertních síní. Hraje dobře tennis, je zdatným lyžařem, miluje přírodu a turistiku.

Mluvíme jistě jménem celé československé matematické obce a mnoha jeho zahraničních vědeckých ctitelů a přátel, jestliže přejeme akademikovi Jarníkovi pevné zdraví a mnoho úspěchů v další práci k prospěchu naší matematické vědy.

## SEZNAM VĚDECKÝCH PRACÍ AKADEMIKA VOJTĚCHA JARNÍKA

*Zkratky:*

Časopis.......... Časopis pro pěstování matematiky a fysiky do roč. *75*, 1950—51
Časopis pro pěstování matematiky od roč. *76*, 1951 —

Чех. мат. ж. ..... Чехословацкий математический журнал — Czechoslovak Mathematical Journal

| | |
|---|---|
| Rozpravy ........ | Rozpravy II. tř. České akademie věd a umění |
| Bulletin .......... | Bulletin international de l'Académie des sciences de Bohême |
| Věstník .......... | Věstník Král. čes. spol. nauk |
| Сборник ......... | Математический Сборник (Москва) |
| Труды Тбилиси... | Труды тбилисского математ. института (Тбилиси) |
| Acta Ar. ......... | Acta Arithmetica (Warszawa) |
| Fundam. ......... | Fundamenta mathematicae (Warszawa) |
| Prace ............ | Prace matematyczno-fizyczne (Warszawa) |
| M. Z. ............ | Mathematische Zeitschrift (Berlin) |
| M. A. ............ | Mathematische Annalen (Berlin) |
| Monatsh. ......... | Monatshefte für Mathem. und Physik (Leipzig und Wien) |
| Tohoku .......... | The Tôhoku Mathematical Journal (Sendai) |
| Studia ........... | Studia mathematica (Warszawa-Wrocław) |

## A. Původní vědecké práce

Práce vyšlé dvojmo (na př. originál v Rozpravách a výtah v jiném jazyku v Bulletinu) jsou uvedeny pod týmž číslem jako a), b) a pod.

1. O kořenech funkcí Besselových, Rozpravy *29* (1920), č. 28, 6 stran.
2. O funkci Bolzanově, Časopis *51* (1922), 248—264.
3. Poznámka k methodě postupných approximací, Časopis *52* (1922), 51—55.
4. O číslech derivovaných funkcí jedné reálné proměnné, Časopis *53* (1923), 98—101.
5. a) O derivaci funkcí jedné proměnné, Rozpravy *32* (1923), č. 5, 8 stran.
   b) Sur la dérivée des fonctions d'une variable, Bulletin 1923, 4 strany.
6. a) O rozšíření definičního oboru funkcí jedné proměnné, při němž zůstává zachována derivabilita funkce, Rozpravy *32* (1923), č. 15, 15 stran.
   b) Sur l'extension du domaine de définition des fonctions d'une variable qui laisse intacte la dérivabilité de la fonction, Bulletin 1923, 5 stran.
7. a) O mřížových bodech v rovině, Rozpravy *33* (1924), č. 36, 23 strany.
   b) Sur les points à coordonnées entières dans le plan, Bulletin 1924, 12 stran.
8. a) Několik poznámek o mřížových bodech v kruhu, Rozpravy *34* (1925), č. 27, 13 stran.
   b) Quelques remarques sur les points à coordonnées entières à l'intérieur d'un cercle, Bulletin 1925, 3 strany.
9. Ueber die Gitterpunkte auf konvexen Kurven, M. Z. *24* (1925), 500—518.
10. a) O funkcích první třídy Baireovy, Rozpravy *35* (1926), č. 2, 13 stran.
    b) Sur les fonctions de la première classe de Baire, Bulletin 1926, 11 stran.
11. Ueber bedingt konvergente Reihen, M. Z. *24* (1926), 715—732.
12. Ueber die Gitterpunkte auf homothetischen Kurven, M. Z. *26* (1927), 445—459.
13. Umordnungen von bedingt konvergenten Reihen, M. Z. *28* (1928), 360—371.
14. Ueber die Umordnung unendlicher Reihen, Věstník 1927, č. 8, 45 stran.
15. O integrování nekonečných řad, Časopis *57* (1928), 103—113.
16. O mřížových bodech ve vícerozměrných koulích, Časopis *57* (1928), 123—128.
17. a) O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech, Rozpravy *37* (1928), č. 27, 19 stran.
    b) Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoïdes à plusieurs dimensions, Bulletin 1928, 10 stran.
18. Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, M. A. *100* (1928), 699—721.
19. Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. 2. Abhandlung, M. A. *101* (1929), 136—146.
20. Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, M. Z. *27* (1927), 154—160.

21. Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. 2. Mitteilung, M. Z. *28* (1928), 311—316.
Poznámka. Práce 18, 19 jsou zcela odlišné od prací 20, 21 přes stejný název. Totéž platí o jiných pracích stejného názvu, pokud jsou uvedeny pod různými pořadovými čísly.
22. Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Tohoku *30* (1929), 354—371.
23. Bestimmung einer absoluten Konstanten aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Annali di matematica pura ed applicata, ser. 4, sv. 6 (1928—29), 7 stran. Společně s *K. Grandjotem*, *E. Landauem* a *J. E. Littlewoodem*.
24. Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, M. Z. *30* (1929), 768—786.
25. Ueber das Riemannsche Integral, Věstník 1929, č. 1, 14 stran.
26. Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Prace *36* (1928—29), 16 stran.
27. Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, M. Z. *32* (1930), 152—160. Společně s *A. Walfiszem*.
28. a) Několik poznámek o Hausdorffově míře, Rozpravy *40* (1930), č. 9, 8 stran.
b) Quelques remarques sur la mesure de M. Hausdorff, Bulletin 1930, 6 stran.
29. O jistém problému minimálním, Práce moravské přírodovědecké společnosti, sv. 6, spis 4, 1930, 57—63.
30. Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass, Сборник *36* (1929), 371—382.
31. Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoïdes à plusieurs dimensions, Věstník 1930, č. 6, 11 stran.
32. Sur une fonction arithmétique, Věstník 1930, č. 7, 13 stran.
33. Ueber die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, M. Z. *33* (1931), 62—84.
34. Ueber die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. 2. Abhandlung, M. Z. *33* (1931), 85—97.
35. Ueber die simultanen diophantischen Approximationen, M. Z. *33* (1931), 505—543.
36. Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen, Prace *39* (1932), 135—144.
37. Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Monatsh. *39* (1932). 403—438.
38. Ueber die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Věstník 1931, č. 20, 17 stran.
39. Ueber die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen, Fundam. *21* (1933), 48—58.
40. Ueber die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. 3. Abhandlung, M. Z. *36* (1933), 581 — 617.
41. Ueber die Menge der Punkte, in welchen die Ableitung unendlich ist, Tohoku *37* (1933), 248—253.
42. O jedné třídě funkcí spojitých, Časopis *63* (1934), 135—146.
43. O minimálních grafech, obsahujících $n$ daných bodů, Časopis *63* (1934), 223—235. Spolu s *M. Kösslerem*.
44. Sur la dérivabilité des fonctions continues, Spisy přírodov. fakulty univ. Karlovy, č. 129 (1934), 7 stran.
45. Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorffschen Massbegriffes, M. Z. *38* (1934), 217—256.
46. Sur les nombres dérivés approximatifs, Fundam. *22* (1934), 4—16.
47. Ueber die stetigen Abbildungen der Strecke, Monatsh. *41* (1934), 408—423.
48. Sur la dérivée approximative unilatérale, Věstník 1934, č. 9, 10 stran.
49. Untersuchungen über einen van der Corputschen Satz, M. Z. *39* (1935), 745—767. Společně s *E. Landauem*.

50. Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositions de deux fonctions, Fundam. *24* (1935), 206—208. Společně s *V. Knichalem*.
51. Sur les superpositions des fonctions continues non décroissantes, Fundam. *25* (1935), 190—197. Společně s *V. Knichalem*.
52. Remarque sur les nombres dérivés, Fundam. *23* (1934), 1—8.
53. a) O simultánních diofantických aproximacích, Rozpravy *45* (1935), č. 19, 16 stran.
b) Sur les approximations diophantiques simultannées, Bulletin 1935, 8 stran.
54. Ueber einen Satz von A. Khintchine, Prace *43* (1935), 1—16.
55. Sur une propriété des fonctions continues, Časopis *65* (1936), 53—63.
56. Ueber einen Satz von A. Khintchine. 2. Mitteilung, Acta Ar. *2* (1936), 1—22.
57. Sur les fonctions de deux variables réelles, Fundam. *27* (1936), 147—150.
58. Ueber die angenährte Lösung der Gleichung $x_1\Theta_1 + \ldots + x_n\Theta_n + x_0 = 0$ in ganzen Zahlen, Časopis *66* (1937), 192—205.
59. Eine Bemerkung über lineare Kongruenzen, Acta Ar. *2* (1937), 214—220. Společně s *P. Erdösem*.
60. Neuer Beweis eines Khintchineschen Satzes, Časopis *67* (1938), 109—113.
61. Sur un problème de M. Čech, Věstník 1938, č. 6, 7 stran.
62. Zum Khintchineschen „Uebertragungssatz", Труды Тбилиси, *3* (1938), 193—216.
63. Sur les solutions approchées de l'équation $x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 = 0$ en nombres entiers $x_1$, $x_2$, $x_0$, Věstník 1938, č. 7, 26 stran.
64. Sur un théorème de M. Mahler, Časopis *68* (1939), 59—60.
65. Remarques à l'article précédent de M. Mahler, Časopis *68* (1939), 103—111.
66. Ueber einen $p$-adischen Uebertragungssatz, Monatsh. *48* (1939), 277—287.
67. Eine Bemerkung zur Gitterpunktlehre, Časopis *69* (1940), 57—60.
68. Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $\alpha_1(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqq x$, Věstník 1940, č. 3, 63 stran.
69. Ueber die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. 5. Abhandlung, Časopis *69* (1940), 148—174.
70. Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $\alpha_1(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqq x$. Zweite Abhandlung, Časopis *70* (1940), 1—33.
71. Věty o střední hodnotě z teorie mřížových bodů. 6. pojednání, Časopis *70* (1941), 89—103.
72. Dvě poznámky ke geometrii čísel, Věstník 1941, č. 24, 12 stran.
73. a) O lineárních nehomogenních diofantických aproximacích, Rozpravy *51* (1941), č. 29, 21 stran.
b) Sur les approximations diophantiques linéaires non homogènes, Bulletin 1946, 16 stran.
74. a) K hlavní větě geometrie čísel. Rozpravy *53* (1943), č. 43, 15 stran. Společně s *V. Knichalem*.
b) Sur le théorème de Minkowski dans la géométrie des nombres, Bulletin 1946, 15 stran. Společně s *V. Knichalem*.
75. Sur les approximations diophantiques des nombres $p$-adiques, Revista de Ciencias, Lima, *47* (1945), 489—505.
76. On the main theorem of the Minkowski geometry of numbers, Časopis *73* (1948), 1—8.
77. On the successive minima of arbitrary sets, Časopis *73* (1948), 9—15.
78. On Estermann's proof of a theorem of Minkowski, Časopis *73* (1949), 131—140.
79. O kružnici křivosti, Časopis *73* (1949), D 37—D 51.
80. Sur la symétrie des nombres dérivés approximatifs, Annales de la société polonaise de mathématique, Kraków, *21* (1948), 214—218.

81. Une remarque sur les approximations diophantiennes linéaires, Acta scientiarum mathematicarum, Szeged, *12* (1950), 82—86.
82. Sur le produit de composition de deux fonctions continues, Studia *12* (1951), 58—64.
83. К теории однородных линейных диофантовых приближений, Чех. мат. ж. *79* (1954), 330—353.
84. К метрической теории цепных дробей, Чех. мат. ж. *79* (1954), 318—329.
85. Lineární závislost funkcí jedné proměnné, Časopis *80* (1955), 32—43.

## B. Kongresové referáty

1. Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Sprawozdanie z I. kongresu matematyków krajów słowiańskich, Warszawa 1929, 244—245.
2. Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Verhandlungen des Internat. Mathematikerkongresses, Zürich 1932, sv. II, 24—25.
3. Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens, Oslo 1936, sv. II, 11.
4. Sur quelques points de la théorie géométrique des nombres, Zprávy o 2. sjezdu matematiků zemí slovanských, Praha 1934 (též Časopis *64* (1934—35)), 26—48.
5. Ueber lineare diophantische Approximationen, Bericht über die Mathematikertagung in Berlin 14.—18. I. 1953, 189—192.

## C. Knižní publikace

1. Úvod do theorie množství, Dodatek do *K. Petra* Integrálního počtu, 2. vyd., JČMF, Praha 1931, 655—725.
2. O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné, Dodatek do knihy *E. Čecha*, Bodové množiny, JČMF, Praha 1936, 245—265.
3. Úvod do integrálního počtu vydala JČMF ve sbírce Kruh, sv. 12, 1938, stran 168.
4. Úvod do počtu diferenciálního, 1. vyd., JČMF, Knihovna spisů matematických a fysikálních, sv. 22, 1946, stran 448.
5. Úvod do počtu integrálního, 1. vyd., JČMF, Knihovna spisů matematických a fysikálních, sv. 22, 1948, stran 324.
6. Úvod do počtu diferenciálního, 2. vyd., Přírodovědecké vydavatelství, 1951.
7. Úvod do počtu diferenciálního, 3. vyd., NČSAV, 1953, stran 449.
8. Diferenciální počet, Pokračování Úvodu do počtu diferenciálního, 1. vyd., NČSAV, 1953, stran 595.
9. Úvod do počtu integrálního, 2. vyd., NČSAV, 1954, stran 295.
10. Integrální počet II, 1. vyd., NČSAV, 1955, stran 760.
11. Diferenciální počet I, 4. vyd., NČSAV, 1955, stran 451.
12. Integrální počet I, 3. vyd., NČSAV, 1956, stran 299.
13. Diferenciální počet II, 2. vyd., NČSAV, 1956, stran 609.

## D. Studie referativní a kritické

1. Recense: *G. H. Hardy* and *M. Riesz*, The General Theory of Dirichlet's Series, Časopis *51* (1922), 339—340.
2. Felix Klein †, Časopis *55* (1925), 105—108.
3. Recense: *G. Valiron*, Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable- *P. Lévy*, Analyse fonctionnelle, Časopis *55* (1926), 191.
4. Recense: *E. Landau*, Vorlesungen über Zahlentheorie I—III, Časopis *57* (1927), 62—63.

5. Mengerova teorie dimensí, Časopis *58* (1929), 367—374.
6. Bolzanova „Functionenlehre", Časopis *60* (1931), 240—262.
7. Recense: Poznámky k článku prof. Fr. Rádla: Odpověď k recensi prof. Petra, Časopis *61* (1932), 211—223.
8. Recense: Ještě k „Učebnici" prof. Fr. Rádla, Časopis *62* (1932), 68—74.
9. Recense: *W. Sierpiński*, Wstęp do teorji funkcji zmiennej rzeczywistej, Časopis *63* (1933), 53.
10. Nový matematický časopis (Compositio mathematica), Časopis *63* (1934), 312—313.
11. Recense: Tři knihy o funkcích skoroperiodických. *A. S. Besicovitch,* Almost periodic functions - *H. Bohr,* Fastperiodische Funktionen - *J. Favard,* Leçons sur les fonctions presquepériodiques, Časopis *64* (1935), D 89—91.
12. Recense: *E. Landau*, Grundlagen der Analysis — *E. Landau*, Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, Časopis *64* (1935), D 91—92.
13. Nový matematický časopis (Acta arithmetica), Časopis *64* (1935), D 122—123.
14. Recense: *A. Zygmund,* Trigonometrical series — *S. Kaczmarz a H. Steinhaus,* Theorie der Orthogonalreihen, Časopis *65* (1936), D 117—122.
15. Recense: *E. C. Titchmarsch,* The Zeta-Funktion of Riemann — *A. E. Ingham,* The Distribution of Prime Numbers, Časopis *67* (1937), D 54—56.
16. Edmund Landau†, Časopis *67* (1938), D 215—216.
17. Recense: *E. Landau,* Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie — *J. M. Vinogradov,* Novyj metod v analitičeskoj teorii čisel, Časopis *67* (1938), D 303—306.
18. Recense: *S. Saks,* Theory of the Integral, Časopis *68* (1939), D 111—113.
19. Návod ke studiu analysy pro začátečníky, Časopis *70* (1941), D 109—116.
20. Recense: *O. Haupt, G. Aumann,* Differential- und Integralrechnung, Časopis *70* (1941), D 224—227.
21. Recense: *A. J. Chinčin,* Tři perly theorie čísel, Časopis *74* (1949), D 87—88.
22. Recense: *I. M. Vinogradov,* Úvod do theorie čísel, Časopis *74* (1949), D 88—89.
23. Nový důkaz věty o rozdělení prvočísel, Časopis *74* (1949), D 51—54.
24. Recense: *C. L. Siegel,* Transcendental Numbers, Časopis *75* (1950), D 436—440.
25. Recense: Tři sovětské knihy o analytické theorii čísel, Časopis *76* (1951), 35—65.
26. Před ustavením Československé akademie věd, Časopis *77* (1952), 205—207.
27. Před ustavením Československé akademie věd, Časopis Ústředního ústavu astronomického *2* (1952), 1.
28. Recense: *A. Apfelbeck,* Příspěvek k Chinčinovu principu přenosu, Časopis *77* (1952), 93.
29. Recense: *J. Kurzweil,* Příspěvek k metrické theorii diofantických aproximací, Časopis *77* (1952), 94.
30. Recense: *Z. Zahorski,* O křivkách, jejichž tečna nabývá na každém oblouku všech směrů, Časopis *77* (1952), 94—95.
31. Recense: *A. J. Chinčin,* Řetězové zlomky, Časopis *78* (1953), 113—116.
32. Vědecké práce M. Kösslera, Časopis *80* (1955), 106—115.
33. a) Deset let matematiky v osvobozeném Československu, Časopis *80* (1955), 261—273.
    b) Десять лет математики в освобожденной Чехословакии, Чех. мат. ж. *80* (1955), 291—307.
34. Bernard Bolzano a základy matematické analysy, Sborník „Zdeňku Nejedlému Československá akademie věd", 450—458.
35. Něco o problémech a methodách moderní matematiky, vyšlo v publikaci „XX. století a co dalo lidstvu", III. svazek, 12—46.

V tomto seznamu nejsou uvedeny recense pro různé referativní časopisy a hesla, která Jarník zpracoval pro naučné slovníky a pod.

# ŠEDESÁTINY PROFESORA KARLA KOUTSKÉHO

Dne 21. října 1957 dožívá se šedesátých narozenin prof. KAREL KOUTSKÝ, doktor fysikálně-matematických věd, profesor matematiky a vedoucí katedry matematiky na přírodovědecké fakultě Masarykovy university v Brně. Používáme této příležitosti, abychom širší odbornou veřejnost seznámili s životem a dílem tohoto vynikajícího pracovníka, který se svým dílem vědeckým, pedagogickým a organisačním zasloužil o rozvoj naší matematiky a osobními vlastnostmi si získal lásku a oblibu svých přátel a spolupracovníků.

Prof. K. Koutský se narodil dne 21. října 1897 v Lounech v Čechách. Středoškolská studia konal na státní reálce v Kutné Hoře. Potom studoval na České vysoké škole technické v Praze a na filosofické a přírodovědecké fakultě Karlovy university. Vysokoškolská studia ukončil státní zkouškou z matematiky a deskriptivní geometrie (1922) a doktorátem přírodních věd na Karlově universitě (1926).

Od r. 1921 působil jako profesor na středních školách. Vyučoval na státních reálných gymnasiích v Trnavě a Zlatých Moravcích, potom na státní reálce v Hodoníně a na dívčím reálném gymnasium v Brně. Začátkem studijního roku 1946-47 byl pověřen konáním přednášek z matematiky a deskriptivní geometrie na pedagogické fakultě Masarykovy university v Brně.

V r. 1948 se habilitoval na přírodovědecké fakultě Masarykovy university z matematiky. V r. 1949 byl jmenován mimořádným profesorem matematiky a deskriptivní geometrie na pedagogické fakultě Masarykovy university. Odtud přešel v r. 1952 jako profesor matematiky na přírodovědeckou fakultu, na níž má funkci vedoucího katedry matematiky. V r. 1956 byla prof. Koutskému udělena hodnost doktora věd fysikálně-matematických.

Již jako vysokoškolský student a později jako středoškolský profesor věnoval se prof. Koutský hlubšímu studiu matematiky. Zabýval se geometrií, theorií čísel, dějinami matematiky na Slovensku, později studoval topologii, theorii svazů, ideologii a historii matematiky. V souvislosti s povoláním středoškolského profesora věnoval pozornost pedagogice, zejména didaktice a metodice matematiky na středních školách. V těchto směrech vyvinul bohatou publikační činnost. Zúčastnil se několika matematických sjezdů, na nichž přednesl původní sdělení. Zúčastňoval se odborných prací a zastával významné funkce v úředních a odborných komisích a ve vědeckých spolcích.

Prof. Koutský uveřejnil řadu vědeckých prací z oboru theorie čísel, topologie, theorie svazů, historie a ideologie matematiky. Mimo to uveřejnil velký počet odborných článků, referátů, recensí a jiných drobnějších prací, takže jeho celková publikační činnost obsahuje přes půl druhého sta prací. Zde se podrobněji zmíníme pouze o pracích ryze vědeckých, přenechávajíce obsáhlou pedagogickou složku činnosti prof. Koutského ocenění na jiném místě.

Práce prof. Koutského z oboru theorie čísel představují řadu příspěvků k elementární a analytické theorii čísel. V oboru elementární theorie se prof. Koutský zabýval obdobou Wilsonovy poučky (1), symetrickými funkcemi primitivních kořenů (2), studiemi kvadratického charakteru čísel (3, 4, 5, 6) a potenčními charaktery čísel (7, 8). Pozoruhodné jsou zejména jeho úvahy o potenčních charakterech, které prof. Koutský definoval a popsal jejich vlastnosti. V tomto směru jdou jeho výsledky daleko za klasickou látku. K pracím z oboru elementární theorie čísel patří též práce 23, týkající se vlastností Fermatova kvocientu $q(a) = (a^{p-1} - 1) : p$, v níž prof. Koutský zjednodušil a zobecnil Lerchovy výsledky o součtech $Q_k(p) = \sum_{a=1}^{p-1} a^k\, q(a)$.

Práce patřící do analytické theorie čísel (11, 12, 13) se týkají zjištění konvergence nekonečných řad $\sum 1 : p$, $\sum_p 1 : (p + 2k)$ utvořených z prvočísel $p$, $p + 2k$ ($k$ přirozené). V řadě všech prvočísel uspořádaných podle velikosti se vyskytují libovolně dlouhé úseky, v nichž neleží ani jedno prvočíslo $p$, pro něž $p + 2k$ je rovněž prvočíslo. Tyto výsledky jsou zobecněním klasické Brunovy věty o dvojicích prvočísel.

Práce o topologii (19, 20, 21, 38) se týkají oddělování množin v topologických prostorech, modifikací dané topologie a určenosti topologických prostorů pomocí okolí. V první z nich jde o studium topologických prostorů, v nichž každé dvě oddělené neprázdné množiny nebo jedna z nich jsou otevřené nebo uzavřené nebo současně otevřené i uzavřené. V druhých dvou pracích jde o studium horní a dolní modifikace dané topologie vzhledem k daným vlastnostem bodů a částem topologického prostoru. V poslední uvedené práci jde o zobecnění známých výsledků o určenosti topologických prostorů pomocí okolí v případě obecné topologie bez obvyklých axiomů. Do okruhu prací o topologii patří práce 24, v níž jest určen počet částečných uspořádání dané množiny $P$ počtem $AKU$-topologií, při nichž má každý bod v $P$ minimální okolí v této množině.

Zvláště významnou prací prof. Koutského jest jeho „Théorie des lattices topologiques“ (31), jejíž výsledky byly uveřejněny též v C. R. pařížské akademie věd (22). V této práci autor zobecňuje klasický pojem topologie tím, že místo všech částí množiny považuje za jejího nositele libovolný svaz, na němž je dáno zobrazení do téhož svazu, které může býti a priori zcela libovolné. Tato základní myšlenka, která se ve speciálním tvaru nezávisle objevila též u jiných autorů (Monteiro-Ribeiro, 1942), jest u prof. Koutského originálně a bohatě rozvinuta. V práci 39 jsou studovány additivně irreducibilní prvky a additivní base v obecných svazech.

Historického rázu je práce 16, která obsahuje seznam matematiků, kteří v 18. a 19. stol. měli vztahy (životní nebo vědecké) ke Slovensku. Ideologií matematiky se prof. Koutský zabývá ve své knize (30) a v pojednáních 27, 29, 33, 37.

Publikační činnost prof. Koutského nevyčerpává jeho zásluhy o rozvoj čs. matematiky. Prof. Koutský má velkou zásluhu o výchovu mladších vědeckých pracovníků, na níž se aktivně podílí vedením, výchovou aspirantů a v kolektivní práci. V rámci činnosti Matematické komise ČSAV (a v dřívějších institucích) vede od r. 1950 seminář pro elementární matematiku. Mimo to vede od r. 1954 na přírodovědecké fakultě Masarykovy university vědecký seminář pro topologii. Seminář pro elementární matematiku je zaměřen hlavně ke studiu klasické a moderní geometrie a dále na otázky týkající se didaktiky a školské matematiky, historie a ideologie matematiky. Členové tohoto semináře rozvinuli v uvedených směrech bohatou publikační činnost. Seminář pro topologii je věnován studiu obecné topologie a přes krátkou dobu trvání se může vykázat řadou pozoruhodných úspěchů, které se projevily vznikem několika vědeckých prací prof. Koutského a dalších členů semináře.

Soubor vědecké a odborné činnosti prof. Koutského lze právem označit za vysoce záslužné dílo, které význačnou měrou přispělo k rozvoji matematiky v Československu. Blahopřejeme jubilantovi k jeho životním úspěchům a připojujeme přání nejlepšího zdaru do mnoha dalších let.

*Otakar Borůvka*, Brno.

SEZNAM PRACÍ PROFESORA KARLA KOUTSKÉHO


1. Obdoba Wilsonovy poučky. Časopis pro pěst. mat. a fys., *56*, 1927, 145—147.
2. Symetrické funkce primitivních kořenů mod. $p$, je-li $p$ liché prvočíslo. Věstník VI. sjezdu čsl. přírodozpytců, II, Praha 1928, 12—13.
3. Poznámka ke kvadratickému charakteru čísel. Věstník VI. sjezdu čsl. přírodozptyců, II, Praha 1928, 13—14.
4. Poznámka ke kvadratickému charakteru čísel. Časopis pro pěst. mat. a fys., *58*, 1929, 42—52.
5. O kvadratickém charakteru čísel a zobecnění jisté Lagrangeovy věty o rozdělení kvadratických zbytků. Rozpravy II. tř. Čes. Akademie, *39*, 1930, 21 stran.
6. Du caractère quadratique des nombres et généralisation d'un théorème de Lagrange sur la repartition des restes quadratiques. Bulletin internat. de l'Académie des Sciences de Bohême, 1929, 9 stran.
7. Rozdělení $n$-tých potenčních zbytků pro prvočíselný modul. Časopis pro pěst. mat. a fys., *59*, 1930, 65—82.
8. Rozdělení $n$-tých potenčních zbytků pro prvočíselný modul, II. část. Sprawozdanie z I. Kongresu matematyków krajów słowiańskich, Warszawa 1930, 214—220.
9. Dvě konstrukce dvojstředového čtyřúhelníka. 37. výroční zpráva české reálky v Hodoníně, 1931, 3—8.
10. Prof. dr Quido Vetter padesátníkem. Národní listy, dne 5. 6. 1931.
11. Zobecnění Brunovy věty o dvojicích prvočísel. Rozpravy II. tř. Čes. Akademie, *42*, 1933, 13 stran.

12. Généralisation du théorème de M. Brun sur les couples des nombres premiers. Bulletin internat. de l'Académie des Sciences de Bohême, 1933, 9 stran.
13. Poznámka k dvojicím prvočísel s konstantním rozdílem. Časopis pro pěst. mat. a fys., *62*, 1933, 5—7.
14. Přehled matematiky pro nižší třídy škol středních. I. díl. Aritmetika a začátky algebry. Brno 1933, 104 stran.
15. Přehled matematiky pro nižší třídy škol středních. II. díl. Geometrie. Brno 1934, 94 stran.
16. Z dějin matematiky na Slovensku 18. a 19. století. Časopis pro pěst. mat. a fys., *64*, 1935, 250—251.
17. Přehled matematiky pro nižší třídy škol středních. I. díl. Aritmetika a začátky algebry. 2. upravené vydání. Brno 1937, 104 stran.
18. Přehled matematiky pro vyšší třídy středních škol. I. díl. Aritmetika a algebra. Brno 1938, 134 stran.
19. O oddělenosti množin v topologických prostorech. Časopis pro pěst. mat. a fys., *68*, 1939, 81—84.
20. O některých modifikacích dané topologie. Rozpravy II. tř. Čes. Akademie, *48*, 1939, 13 stran.
21. Sur quelques modifications d'une topologie donnée. Bulletin internat. de l'Académie des Sciences de Bohême, 1939, 5 stran.
22. Sur les lattices topologiques. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 225, 1947, 659—661.
23. K Lerchovým pracím o Fermatově kvocientu. Práce Moravské přírodovědecké společnosti, XVIII, 1947, 7 stran.
24. Poznámka k částečnému uspořádání množin. Ročenka 1947 pedagogické fakulty MU, 241—244.
25. Památce prof. dr. Karla Petra. Časopis pro pěst. mat. a fys., *75*, 1950, D341—D345.
26. Sedmdesátiny prof. dr. Bohumila Bydžovského. Časopis pro pěst. mat. a fys., *75*, 1950, D349—D357.
27. Politické úkoly matematiky na školách 1. až 3. stupně. Matematika ve škole, I, 1951, 97—106.
28. K problému slovních úloh v matematice. Časopis pro pěst. mat. a fys., *77*, 1952, 399—408.
29. Stalinovy stati o jazykovědě a matematika. Matematika ve škole, II, 1952, 193—202.
30. Matematika a dialektický materialismus I. Praha 1952, 160 stran.
31. Théorie des lattices topologiques. Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou MU, č. *337*, 1952, 133—171.
32. Kalendář českých matematiků. (Společně s *F. Baladou* a *J. Rádlem*.) Matematika ve škole, III, 1953. Celkem 16 stran.
33. Úkoly a cíle historie matematiky v socialistické výchově mládeže a ve vyučování. (Společně s *F. Baladou*.) Matematika ve škole, III, 1953, 51—58, 97—110.
34. Šedesát let akademika Eduarda Čecha. Matematika ve škole, III, 1953, 283—286.
35. Stručný přehled dějin matematiky pro VIII. třídu. (Společně s *F. Baladou*.) Matematika ve škole, IV, 1954, 162—171.
36. Přehled vývoje matematiky pro XI. třídu. (Společně s *F. Baladou*.) Matematika ve škole, IV, 1954, 264—293.
37. Některé ideologické a methodologické otázky v matematice. Sborník I. ideologicko-methodologické konference přírodovědecké fakulty MU, 1955, 20—28.
38. Určenost topologických prostorů pomocí úplných systémů okolí bodů. Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou MU, č. *374*, 1956, 153—163.

39. Über additiv irreduzible Elemente und additive Basen im Verbande. (Společně s *L. Kosmákem a M. Novotným.*) Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou MU, č. *374*, 1956, 165—175.

Kromě uvedených spisů uveřejnil prof. Koutský 28 odborných článků z matematiky a přes sto odborných recensí, referátů, matematických úloh a pod., ponejvíce v Rozhledech matematicko-přírodovědeckých, Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, Matematice ve škole a v jiných časopisech i v denním tisku. Za jeho účasti a vedení byl pořízen též kolektivní překlad *Bradisovy* Methodiky vyučování matematice na střední škole (1953). Dále je prof. Koutský spoluautorem nových učebnic matematiky pro jedenáctiletky z roku 1954 a k nim náležejících methodických průvodců.

Sestavil *Otakar Borůvka*, Brno.

## ŠEDESÁT PĚT LET PROFESORA MILANA MIKANA

Mnozí z těch, kteří profesora M. MIKANA znají, budou asi překvapeni jeho letošním jubileem; příčinou je tu jeho svěžest a trvalé duševní mládí.

Profesor M. Mikan se narodil 16. července 1892 v Čáslavi; jeho otec byl profesorem přírodopisu na středních školách a posléze zemským školním inspektorem. Náš jubilant zůstal věrný učitelskému povolání svého otce. Studoval na reálkách v Praze a v Kutné Hoře, kde maturoval r. 1910. Matematiku a deskriptivní geometrii vystudoval na filosofické fakultě Karlovy university v letech 1910—1914, když zároveň na ČVUT byl zapsán jako posluchač vysoké školy inženýrského stavitelství, kde složil i první státní zkoušku. Pak vyučoval prof. Mikan na různých středních školách v Praze a v létech 1919—1922 v Uherském Hradišti. Dne 1. září 1922 stal se asistentem profesora B. PROCHÁZKY a později profesora J. KOUNOVSKÉHO v ústavu deskriptivní geometrie vysoké školy strojní při ČVUT v Praze, kde předložil disertační práci *Kvadratická reprodukce šesti bodů v prostoru a prostorová kvintika rodu 2.* Na základě toho byl 28. června 1928 promován na doktora technických věd. Jeho disertační práce byla velmi obsáhlá, takže ji pak autor publikoval po částech v několika pracích (viz přiložený seznam).

Na jaře r. 1933 habilitoval se prof. Mikan pro obor geometrie na ČVUT; habilitačním spisem byla práce 7 našeho seznamu. V roce 1934 byla jeho habilitace přenesena i na Karlovu universitu.

Za okupace, kdy české vysoké školy byly zavřeny, učil prof. Mikan na Vyšší průmyslové škole v Praze XVI a po válce byl dnem 1. října 1945 jmenován řádným profesorem matematiky a deskriptivní geometrie na Vysoké škole báňské v Ostravě.

V poválečném ruchu bylo ovšem velmi mnoho práce a tak i prof. Mikan byl povinnostmi přímo zavalen. Vedle své hlavní činnosti v Ostravě suploval přednášky po zemřelém prof. Kounovském na ČVUT v Praze, přednášel při tom pravidelně i na Karlově universitě v Praze a na Palackého universitě v Olomouci. Nedostatek literatury pro studenty vysoké školy báňské snažil se zmírnit rychlým vydáním nejnutnější učebnice, což se mu podařilo za spolupráce jeho asistenta V. ŠTĚPÁNSKÉHO. Teprve když 28. listopadu 1951 byl prof. Mikan přidělen Vysoké škole zemědělské v Praze, skončilo pro něho toto období překotné a kvapné práce a mohl se zase soustředit na práci vědeckou. Na fakultě mechanisace Vysoké školy zemědělské byl ustanoven vedoucím katedry matematiky a od 1. ledna 1956 je také děkanem této fakulty. V těchto funkcích setrvává prof. Mikan dodnes.

Vědeckou činnost prof. Mikana můžeme rozdělit zhruba do dvou období. V prvním období zabýval se převážně klasickou algebraickou geometrií, a to hlavně transformacemi Cremonovými a otázkami s nimi souvisícími. Zatím co v rovině jsou Cremonovy transformace systematicky propracovány, jsou v prostoru prozkoumány jen některé jejich typy. Prof. Mikan přispěl k rozšíření našich znalostí prostorových Cremonových transformací a zároveň prozkoumal i některé jejich typy v prostoru čtyrrozměrném a pětirozměrném. S tím souviselo i jeho pozoruhodné studium hypereliptické prostorové kvintiky. V druhém období své činnosti překročil prof. Mikan rámec algebraické geometrie; všímá si diferenciální geometrie a užívá tu moderních method (viz práci 13 a 15 našeho seznamu). Zvláštní jeho zálibou je pak přímková geometrie čtyrrozměrného prostoru a její souvislost s geometrií kruhovou. Významné je jeho studium neeuklidovské přímkové geometrie (viz práci 16 a 17). Neeuklidovskou přímkovou geometrii v trojrozměrném prostoru interpretuje ve smyslu Kleinově takovou grupou transformací v prostoru pětirozměrném, jež v něm reprodukuje basi svazku nadkvadrik. Sestrojuje zde hlavně invarianty neeuklidovské geometrie kongruencí a páru kongruencí přímek. Také si už všímá souvislosti s Möbiusovou kulovou geometrií, kterou se důkladně zabývá v posledních letech. Ke studiu diferenciálních invariantů v Möbiusově geometrii užívá prof. Mikan souřadnic pentasférických. Jeho dosud nepublikované práce z tohoto oboru, jež jsem měl příležitost vidět, přinesou jistě dobrý užitek a znamenají vyvrcholení jeho dosavadní činnosti.

Pozoruhodné na Mikanově práci je, že neustrnul nikdy na určitém stupni vývoje. Dnes je na příklad aktivním členem semináře pro moderní algebraickou geometrii, jejíž methody jsou tak odlišné od method klasické algebraické geometrie, které Mikan věnoval řadu svých prací.

Vědecká práce prof. Mikana byla několikráte oceněna. Dvakrát dostal cenu Svatobora a jednou cenu z Vaňausova fondu. V roce 1934 byl jmenován mimořádným členem Královské české společnosti nauk.

Za zmínku ještě stojí, že před válkou popularisoval prof. Mikan technické zajímavosti řadou přednášek v rozhlase a po válce vydal populární výklad dějin matematiky a geometrie.

Těšil se důvěře lidu a proto byl v roce 1948 zvolen předsedou akčního výboru na svém pracovišti v Ostravě.

Charakteristika našeho jubilanta by nebyla úplná, kdybychom nezdůraznili jeho živý zájem o umění. Jen málo z jeho spolupracovníků je informováno o tom, že prof. Mikan má velmi vyhraněné zájmy hudební a literární a že tuto část kultury pěstuje náruživě a intensivně. Svědčí to o jeho silném vnitřním životě.

Jest si jen přáti, aby i příští léta zastihla prof. Mikana ve zdraví a spokojenosti, aby mohl nerušeně pokračovat ve své činorodé práci.

*Karel Havlíček*, Praha.

## SEZNAM PRACÍ PROFESORA MILANA MIKANA

(*Publikované práce vědecké a odborné*)

1. Polární vlastnosti systému kuželoseček určeného třemi body a tečnou. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, *LV*, 1926.
2. Kubická involuce na prostorové kvintice rodu 2. Tamtéž, *LVII*, 1928.
3. Kvadratická příbuznost dvanácti družin v prostoru a reprodukce šesti bodů. Rozpravy II. třídy České akademie, XXXVII, *42*, 1928.
4. Isologický komplex prostorové kvadratické transformace Cremonovy. Tamtéž, XXVII, *41*, 1928.
5. Konstrukce prostorových kvadratických transformací z daných podmínek. Časopis pro pěst. matem. a fys., *LVIII*, 1929.
6. Kvadratická konstrukce prostorové kvintiky rodu 2 z jedenácti bodů. Tamtéž, *LIX*, 1930.
7. O jisté Cremonově příbuznosti ve čtyrrozměrném prostoru. Rozpravy II. tř. České akademie, XXXIX, *21*, 1930.
8. Cremonova transformace ve čtyrrozměrném prostoru daná čtyřmi korelacemi. Tamtéž, XL, *1*, 1930.
9. Rovinné zobrazení pětirozměrných útvarů. Tamtéž, XLII, *11*, 1932.
10. Příklady Cremonovy příbuznosti v pětirozměrném prostoru. Tamtéž, XLII, *12*, 1932.
11. Přímková geometrie ve čtyrrozměrném prostoru. Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Karlovy university, *131*, 1934.
12. Kruhová geometrie v $P_3$ a přímková v $P_4$. Zprávy o druhém sjezdu matematiků zemí slovanských, Praha 1935.
13. Cartanova geometrie na ploše kulové. Časopis pro pěst. matem. a fys., *LXVI*, 1937.
14. Matematika v technické praxi. Průvodce světem techniky, 1938.
15. Königovy prostory přidružené vnořeným varietám. Rozpravy II. tř. České akademie, XLIX, *33*, 1939.
16. Neeuklidovská přímková geometrie. Tamtéž, *LV*, *6*, 1945.
17. Neeuklidovská geometrie. Tamtéž, *LIX*, 3, 1949.
18. Repetitorium matematiky a deskriptivní geometrie. Atheneum, Ostrava 1949, spoluautor doc. dr *V. Štěpánský*.
19. Jak se vyvinula matematika a geometrie. Orbis, Praha 1954.

Sestavil *Karel Havlíček*, Praha.

## SJEZD SPOLEČNOSTI PRO APLIKOVANOU MATEMATIKU A MECHANIKU

(GAMM — Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik)

Ve dnech 23. až 26. dubna se konal v Hamburku sjezd celoněmecké společnosti GAMM (Jahrestagung GAMM).

Sjezd měl velký rozsah. Účastníků bylo přes 400, z toho přes 60 zahraničních účastníků celkem ze 16 států (Anglie, Bulharsko, Československo, Dánsko, Francie, Holandsko, Italie, Jugoslavie, Maďarsko, Norsko, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Švédsko, Švýcarsko, USA). Z ČSR se sjezdu účastnili: člen kor. ČSAV, prof. dr J. Kožešník, Ing. dr Ivo Babuška, doc. dr M. Hampl, doc. dr M. Brdička.

V dopoledním plenárním zasedání byly prosloveny širší (hodinové) referáty a odpoledne probíhala zasedání sekcí, kde byla přednesena vědecká sdělení (patnáctiminutová). Poslední den sjezdu byla řádná valná hromada společnosti a jako každoročně široká diskuse o problémech výchovy matematiků na vysokých školách. Materiál z této skoro tříhodinové diskuse bude uveřejněn ve zvláštní brožuře.

V hlavních přednáškách promluvil: *E. Stiefel* (Curych) „O vlivu samočinných počitačů na matematické methody", *R. Sauer* (Mnichov) „O nových výsledcích a methodách theoretické dynamiky plynů", *G. Hellwig* (Berlín) „O parciálních diferenciálních rovnicích smíšeného typu", *G. Liebried* „O theorii disklokací", *C. Truesdell* (t. č. Bologna) „O novějších pohledech na historii mechaniky" a *W. Hahn* (Braunschweig) „O problémech a moderních methodách theorie stability".

Odpolední zasedání probíhala vždy v sekcích:

a) užité matematiky (28 referátů), b) mechaniky (25 referátů), c) theorie proudění

a v podsekcích. Celkem bylo kolem 80 referátů. V prvé sekci se referáty týkaly zejména otázek souvisících více či méně s numerickými methodami, v druhé sekci otázek dynamiky, problémů matematické theorie pružnosti (statické) a některých aplikací stavebně-mechanického charakteru a pod.; sdělení třetí sekce se zabývala různými otázkami hydromechaniky a aeromechaniky.

Veškeré výtahy z přednášek budou uveřejněny v ZAMM a stručné výtahy také v Physikalische Verhandlungen.

Z československých účastníků proslovil vědecké sdělení v prvé sekci *I. Babuška* „Schwarzovy algoritmy v parciálních rovnicích matematické fysiky" a v druhé sekci *M. Hampl* referoval o své společné práci s *J. Valentou* „Napjatost silnostěnných otevřených skořepin".

Podrobný referát o přednáškách, referátech a diskusích sjezdu najde čtenář v časopise *Aplikace matematiky,* roč. *2* (1957), č. 4.

*Ivo Babuška,* Praha.

## NÁVŠTĚVY ZAHRANIČNÍCH MATEMATIKŮ V ČSR

Na své studijní cestě do švédského universitního města Lundu zastavil se v Praze dr. Géza Freud, vedoucí oddělení diferenciálních rovnic matematického ústavu Maďarské akademie věd. Zastavil se ještě v Berlíně a na zpáteční cestě v Kodani a ve Vídni. Milý host pobyl u nás od 27. března do 6. dubna a sešel se s našimi odborníky. Vědecké práce G. Freuda týkají se většinou orthogonálních polynomů, theorie aproximací a rovnic matematické fysiky. Dne 6. dubna pořádala JČMF a matematický ústav ČSAV jeho přednášku: „Einige Fragen der Approximationstheorie"; referát o této přednášce přinášíme na str. 458.

*R. Výborný,* Praha.

Ve dnech 8. a 9. dubna 1957 navštívil Československo doc. dr J. GÓRSKI z Krakova. Byl hostem katedry matematiky fakulty inženýrského stavitelství. Na shromáždění matematické obce dne 8. dubna přednesl referát o konstrukci harmonických funkcí v třírozměrném prostoru užitím methody extremálních bodů. Výtah z referátu bude uveřejněn v *Pokrocích matematiky, fysiky a astronomie*. Docent Górski informoval zároveň účastníky přednášky o aktuálních problémech polské matematiky, a to jak po stránce organisační, tak zejména po stránce odborné. Navštívil také ústav matematických strojů ČSAV, kde měl poradu s doc. A. SVOBODOU.

*Karel Rektorys*, Praha.

Ve dnech 13. až 19. dubna zdržoval se v Praze jeden z nejpřednějších představitelů sovětské matematické vědy akademik S. L. SOBOLEV, význačný pracovník v theorii parciálních diferenciálních rovnic. Podle jeho vlastních slov si nemohl nechat ujít příležitost, aby na své cestě z Francie se nesetkal se svými pražskými přáteli. Akademik Sobolev navštívil Matematický ústav ČSAV, pobesedoval s jeho pracovníky, zúčastnil se semináře, který pořádá oddělení parciálních rovnic tohoto ústavu a s účastníky semináře setrval potom celý den v přátelském rozhovoru.

Většina prací S. L. Soboleva odkrývá hluboké souvislosti mezi moderními matematickými disciplinami, zejména funkcionální analysou a otázkami klasické analysy.

Dne 15. a 18. dubna pořádala JČMF společně s Matematickým ústavem akademie dvě jeho přednášky s názvy: 1. O zobecnění jistých vět o vnoření, 2. Nová formulace okrajových úloh u eliptických diferenciálních rovnic. Referáty o nich přinášíme na str. 458.

*R. Výborný*, Praha.

Ve dnech 15. a 16. dubna t. r. se v Praze zastavil na návštěvu Matematického ústavu ČSAV dipl. mat. ALFRED HIRSCHLEBER, vědecký pracovník Ústavu aplikované matematiky a mechaniky Schillerovy university v Jeně. Seznámil se s řadou našich matematiků a vyměnil si s nimi zkušenosti, zvláště v oboru numerického počítání.

*O. Vejvoda*, Praha.

V pátek 31. května t. r. přijel do Prahy na šestidenní návštěvu profesor matematiky na florentské universitě GIOVANNI SANSONE s chotí. Profesor Sansone uspořádal 3. a 4. června v matematické obci pražské dvoudílnou přednášku, v níž se zabýval rovnicí popisující pohyb částic urychlovaných v synchrotronu. Kromě toho měl prof. Sansone s našimi matematiky několik podnětných rozhovorů, týkajících se především diferenciálních rovnic. Hosté se též zúčastnili několika podniků společenského rázu. Ve čtvrtek 6. června odcestoval prof. Sansone s chotí do Polska.

*Z. Vorel*, Praha.

Ve dnech 14. května až 8. června t. r. navštívil za studijními účely Československo profesor ADAM BIELECKI z university M. Curie Skłodovské v Lublině. Našim účastníkům 8. sjezdu polských matematiků, který se konal v září r. 1953, je prof. Bielecki znám jako jeden z hlavních organisátorů. Prof. Bielecki přibyl do Brna dne 14. 5., kde se zdržel do 21. 5. Ve dnech 22.—23. 5. navštívil Bratislavu, ve dnech 24. 5. až 3. 6. Prahu, načež se vrátil do Brna, kde zůstal až do svého odjezdu z Československa.

V uvedených městech proslovil prof. Bielecki vědecké přednášky o svých výsledcích z oboru diferenciálních rovnic a elementární geometrie. V Brně přednášel ve dnech 21. 5. a 6. 6. ve vědeckém semináři prof. O. Borůvky a v členské schůzi JČMF, v Bratislavě (23. 5.) a v Praze (27. 5.) rovněž ve schůzích JČMF.

Obsahem přednášek prof. Bieleckého z oboru diferenciálních rovnic (v Brně a Praze) byly pojmy a hlavní vlastnosti rovnic *paratyngentních*, které jsou širokým zobecněním diferenciálních rovnic obyčejných. Prof. Bielecki vyložil zejména svoje výsledky týkající se existence, jednoznačnosti, stability a topologických vlastností integrálů paratyngentních rovnic. V přednášce v Praze věnoval zvláštní zřetel výsledkům týkajícím se přenesení metody „retraktu" prof. Ważewského do theorie těchto rovnic. Obsahem přednášek z element. geometrie (v Brně a Bratislavě) byl rozbor a redukce Hilbertových axiomů elementární geometrie. V prvních dvou skupinách těchto axiomů jsou možné menší redukce. Podstatně lze redukovat třetí skupinu, v níž je zbytečný axiom $III_3$ o součtech úseček a část axiomu $III_4$, která vyjadřuje, že každý úhel je kongruentní sám se sebou. Každý axiom třetí skupiny je pak nezávislý na zbývajících axiomech třetí skupiny a axionech předcházejících.

Návštěva prof. Bieleckého v Československu přispěla značnou měrou k poznání výsledků nových prací polských matematiků a k dalšímu rozvoji naší vědecké práce, zejména v oboru diferenciálních rovnic, a rovněž k utužení přátelství a rozšíření styků mezi našimi a polskými matematiky.

*Otakar Borůvka*, Brno.

## ZPRÁVA O POBYTU ČSL. MATEMATIKA V ITALII

V květnu 1957 jsem přednášel na pozvání Istituto di Geometria „Luigi Cremona" (ředitel prof. M. Villa) university v Bologni v tamním matematickém semináři. Celkem jsem měl osm přednášek, jejich thematem byly poslední práce akad. E. Čecha a mé práce o theorii kongruencí přímek. Tyto práce byly otištěny v našem mezinárodním časopise; přednášel jsem však i o svých dosud nepublikovaných pracích, týkajících se kongruencí přímek s projektivní konexí a theorie ploch v prostorech s proj. konexí. Obšírný přehled přednášek bude otištěn v Bollettino della UMI.

V Bologni přednášel v téže době prof. P. Vincensini z Marseille a prof. R. Calapso z Messiny o různých otázkách dif. geometrie a akad. G. C. Moisil z Bukurešti o theorii elektrických sítí.

V četných rozhovorech s prof. Villou a pracovníky jeho ústavu (hlavně L. Muracchinim a Q. Vaonou) jsem se seznámil podrobně se současnou problematikou, na níž se v Bologni pracuje — je to hlavně projektivní deformace bodových transformací. Setkal jsem se s velkým zájmem o naši matematiku, ale i zájmem o obecnější věci v ČSR — školství, kulturu, techniku atd. Italští hostitelé mi umožnili prohlédnouti si historické památky Bologně, Florencie, Ferrary, Modeny, Ravenny a Benátek.

*Alois Švec*, Liberec.

## ZPRÁVA O NÁVŠTĚVĚ DR VLASTIMILA PTÁKA VE VELKÉ BRITANNII

V květnu 1957 navštívil Velkou Britannii na pozvání některých britských universit dr Vlastimil Pták, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV. Přednesl několik přednášek o svých výsledcích ve funkcionální analyse a v řadě rozhovorů s britskými pracovníky ve funkcionální analyse navázal cenné vědecké kontakty.

*Vlastimil Pták*, Praha.

## OBHAJOBY DISERTAČNÍCH PRACÍ KANDIDÁTŮ VĚD

Při Matematickém ústavu ČSAV v Praze obhájil dne 31. května 1957 kandidát fysikálně-matematických věd *Jindřich Nečas* práci „Řešení biharmonického problému pro konvexní mnohoúhelníky" a dne 28. června prom. matematik *Alois Marek* práci „Zobecnění konvexní funkce více proměnných".

Na matematicko-fysikální fakultě KU v Praze obhájili disertační práce tito kandidáti fysikálně-matematických věd:

Dne 30. května 1957 *Ján Ivan* práci „O direktnom súčine a reprezentácii jednoduchých pologrúp; 13. června 1957: Ing. *František Fabian* práci „Některé poznámky k theorii limitních zákonů", doc. dr *Jiří Seitz* práci „Poznámka ke spojité transformaci náhodných veličin" a *Milan Ullrych* práci „Theorie zobecněných náhodných procesů" a 27. června 1957 *Luboš Nový* práci „Matematika v Čechách v druhé polovině 18. století".

Na přírodovědecké fakultě MU v Brně obhájili disertační práce tito kandidáti fysikálně-matematických věd:

Dne 6. června 1957 dr *Karel Svoboda* práci „Plochy s lokálně sférickou kružnicí normální křivosti v pětirozměrném prostoru" a dne 14. června 1957 dr *Michal Greguš* práci „O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu".

*Redakce.*

## PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

6. 4. 1957: *Géza Freud* (Budapešť), Einige Fragen der Approximationstheorie. (Viz referát na str. 458.)

8. 4. 1957: *Jerzy Górski* (Krakov), Užití methody extremálních bodů k řešení různých úloh z theorie harmonických funkcí (obor komplexní proměnné).

15. 4. 1957: *S. L. Sobolev* (Moskva), O zobecnění jistých vět o vnoření. (Viz referát na str. 458.)

18. 4. 1957: *S. L. Sobolev* (Moskva), Nová formulace okrajových úloh u eliptických diferenciálních rovnic. (Viz referát na str. 460.)

24. 4. 1957: *Marcel Josífko*, Nejlepší asymptoticky normální odhady a jejich aplikace při hodnocení biologických zkoušek.

29. 4. 1957: *Antonín Špaček*, O kybernetice.

6. 5. 1957: *Václav Fabian*, Vliv zaokrouhlování na lineární iterační procesy.

13. 5. 1957: *Miloslav Hampl*, *Miroslav Brdička* a *Ivo Babuška*, O sjezdu společnosti pro matematiku a mechaniku v Hamburku r. 1957. (Viz zprávu na str. 500.)

20. 5. 1957: *Luboš Nový*, Matematika v Čechách v 18. století.

22. 5. 1957: *Milan Beneš*, Vyšetřování optimálních technologických podmínek.

27. 5. 1957: *Adam Bielecki* (Lublín), Badanie niektórych własnosci całek równań paratygensowych.

3. 6. 1957: *Giovanni Sansone* (Florencie), On the Equation of the Orbits in a Synchrotrone, I.

4. 6. 1957: *Giovanni Sansone* (Florencie), On the Equation of the Orbits in a Synchrotrone, II.

10. 6. 1957: *Jindřich Nečas*, Některá hlediska na užití transformačních method při řešení parciálních diferenciálních rovnic.

26. 6. 1957: *Milan Ullrych*, Konstrukce nezávislého binomického procesu.

*Redakce.*

## ČINNOST POBOČKY JEDNOTY ČS. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V BRNĚ

Pobočka Jednoty čs. matematiků a fysiků v Brně pokračovala v r. 1957 ve své činnosti přednáškami a diskusemi o nových pracích matematických.

Konaly se tyto přednášky:

10. 4. 1957: *L. Rieger* (Praha), Formalisovaná theorie množin.

25. 4. 1957: *L. Nový* (Praha), Matematika v Čechách ve 2. polovině 18. století.

6. 6. 1957: *A. Bielecki* (Lublin), Redukce Hilbertových axiomů.
13. 6. 1957: *J. Klapka*, O životě a díle profesora dr Ladislava Seiferta.

Po této přednášce byla konána výroční členská schůze pobočky.

V „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" byly předneseny tyto referáty:

25. 2. 1957: *J. Kopřiva*, Iterace v obecné topologii.
4. 3. 1957: *F. Šik*, Subdirektní součty uspořádaných grup.
11. 3. 1957: *K. Opluštil*, Záměna pořádku integrování a derivování.
18. 3. 1957: *L. Kosmák*, Metoda sítí pro jednorozměrné okrajové problémy.
25. 3. 1957: *J. Barot*, Lineární metrická tělesa.
8. 4. 1957: *K. Čulík*, O homomorfismech částečně uspořádaných množin a svazů. (Viz referát na str. 460.)
15. 4. 1957: *M. Novotný*, O reálných funkcionálech částečně uspořádaných množin.
29. 4. 1957: *M. Ráb*, Asymptotické vlastnosti integrálů systémů lineárních diferenciálních rovnic $n$-tého řádu.
6. 5. 1957: *J. Kopřiva*, O jistém systému topologií v daném prostoru.
13. 5. 1957: *K. Čulík*, O cyklických grafech. (Viz referát na str. 462.)

V rámci „Diskusí" bylo dosud předneseno 62 referátů.

*K. Svoboda*, Brno.

## ČINNOSŤ ODBOČKY JEDNOTY ČS. MATEMATIKOV A FYZIKOV V BRATISLAVE

V rámci prednáškovej činnosti odbočky Jednoty čs. matematikov a fyzikov v Bratislave konali sa v školskom roku 1956-57 nasledovné prednášky:

3. 11. 1956: *Š. Veis*, Metódy získania vakua ionizáciou.
5. 12. 1956: *E. Rybka* (Wroclaw), O veľkosti hviezd.
18. 12. 1956: *J. Vanovič*, Poznámka k problému vlny a častice.
14. 2. 1957: *A. Huťa*, Použitie asociácie, regresie a korelácie v praxi.
28. 2. 1957: *M. Harant*, Názorné obrázky v školskej a technickej praxi.
14. 3. 1957: *A. Dubec*, Indukcia vo vyučovaní matematiky.
15. 3. 1957: *St. Kolník*, Niekoľko inštruktívnych demonštrácii k výkladom z teórie kmitov.
4. 4. 1957: *I. Kluvánek*, O jednoduchej definícii integrálu.
15. 4. 1957: *O. Borůvka*, O matematických sjazdoch v Bukurešti, v Berlíne a vo Viedni.
13. 5. 1957: *M. Jelínek*: Matematika, jej stav a vyučovanie na školách III. stupňa v cudzine.
23. 5. 1957: *A. Bielecki* (Lublin), Redukcia Hilbertových axióm.

*Ladislav Mišík*, Bratislava.

## SEZNAM MATEMATICKÝCH PRACÍ VYŠLÝCH V ROCE 1956 V BRNĚ

**Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university**, roč. 1956, čís. 374, 379.

*K. Koutský*, Určenost topologických prostorů pomocí úplných systémů okolí bodu. — *L. Kosmák-K. Koutský-M. Novotný*, Über additiv irreduzible Elemente und additive Basen im Verbande. — *M. Ráb*, Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichung dritter Ordnung. — *M. Sekanina*, Úplné systémy okolí množin v obecných topologických prostorech. — *M. Ráb*, Asymptotické vlastnosti integrálů diferenciální lineární rovnice 3. řádu. — *M. Harant*, Kótovano-axonometrická zobrazovacia metóda vo štvorrozmernom euklidovskom priestore.

**Sborník vysoké školy stavitelství v Brně,** sv. V, roč. 1956, spis 85, 86, 87; nyní **Sborník vysokého učení technického v Brně,** 1956/IV.

*Z. Kowalski,* Zakreslování projektů inženýrských staveb do fotografií. — *J. Klapka,* Godeauxova theorie ploch a lokální souřadnice v přímkovém prostoru. — *J. Brejcha,* O Demoulinově čtyrstranu a o kanonických přímkách v bodě plochy prostoru $S_3$. *K. Opluštil,* K uspořádání transfinitních mohutností.

*K. Svoboda,* Brno.

## MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SLOVENSKEJ AKADÉMIE VIED

V siedmom ročníku (1957) v prvom a druhom čísle prináša Matematicko-fyzikálny časopis SAV nasledujúce články: *J. Heyrovský, A. Vlček,* Význam Ilkovičovy rovnice v elektrochemii. — *J. Krempaský,* Koncentrácia prímesí v kryštáli pripravenom zonálnou tavbou pri znečistení len prvej zóny. — *Vl. Hajko, J. Daniel-Szabó,* Štúdium procesu premagnetúvania tyčových vzoriek. — *V. Petržílka,* Fysikální vlastnosti radioaktívních isotopů používaných v technické praxi. — *Vl. Hajko,* Dve poznámky k demagnetizačným faktorom tyčových vzoriek. — *T. Kolbenheyer,* O priamej úlohe teórie telurického poľa pre kruhový valec. — *M. Jahoda, J. B. Slavík,* Modifikace Hartmannova zvukového generátoru. — *Zd. Horák,* Boltzmannova statistika a normální zákon četnosti. — *I. Náter,* Poznámky k odvodeniu Navier-Stokesovej rovnice. — *J. Garaj,* K zavedeniu pojmu vektora uhlovej rýchlosti tuhého telesa upevneného v jednom bode. — *V. Medek,* Niektoré lineárne systémy singulárnych kolineácií. — *V. Havel,* O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie. — *I. Kluvánek,* Poznámka k rozširovaniu miery. — *J. Jakubík,* Centrum nekonečne distributívnych sväzov. — *M. Lánský,* O prvočíselných mřížových bodech na kuželosečkách. — *T. Šalát,* K jednej vlastnosti iracionálnych čísel.

## ACTA FACULTATIS RERUM NATURALIUM UNIVERSITATIS COMENIANAE

Časopis Acta facultatis rerum naturalium universitatis Comenianae, vydavaný v Bratislave, obsahuje tieto matematické články:

Tom I. fasc. l.: *J. Hronec,* Sur la théorie du système différentiel géneral à coefficients variables. — *M. Harant,* K niektorým vzťahom medzi krivosťami krivky v $E_n$. — *J. Srb,* Afinní klasifikace nadkvadrik. — *M. Greguš,* Diferenciálna rovnica tretieho rádu tvaru $y''' + 2Ay' + (A' + b)\, y = 0$ so všetkými integrálmi oscilatorickými.

Tom I. fasc. IV—VI.: *J. Janko,* K otázce statistické indukce. — *O Borůvka,* Über eine Verallgemeinerung der Eindeutigkeitssätze für Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. — *J. Srb,* Rozšíření Pascalovy věty na racionální normální křivku $n$-rozměrného projektívního prostoru. — *M. Sypták,* Obecné nadkružnice a obecné nadšroubovice. — *A. Huťa,* Une amélioration de la méthode de Runge-Kutta-Nyström pour la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre. — *M. Harant,* K metrickému triedeniu stredových nadkvadrík v $E_4$. — *M. Kolibiar,* O kongruenciách na distributívnych sväzoch. — *J. Jakubík,* [Grafový izomorfizmus multisväzov. — *M. Greguš,* O niektorých vzťahoch medzi integrálmi navzájom adjungovaných lineárnych diferenciálnych rovníc tretieho rádu a o jednom okrajovom probléme.

*Ladislav Mišík,* Bratislava.

## ŠESTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIADY

Ve školním roce 1956—57 probíhal na našich středních a odborných školách už šestý ročník celostátní matematické soutěže, která je známá pod názvem matematická olympiada. O této soutěži, kterou pořádá Matematický ústav ČSAV spolu s ministerstvem školství a kultury a Ústředním výborem ČSM, jsme v tomto časopise referovali při příležitosti předcházejících jejích ročníků. Soutěž každoročně se uzavírá besedou s účastníky III. kola matematické olympiady; této besedy se pravidelně účastní i zástupci naší vědy, vysokých a středních škol a kulturních institucí. Letošní beseda s olympioniky se konala v sobotu 25. května 1957 ve velké posluchárně fysikálního ústavu Karlovy university v Praze II, Ke Karlovu 5 za předsednictví akademika J. Nováka. O letošním 250. výročí Vysoké školy technické v Praze promluvil zde prof. dr Fr. Kadeřávek, o vysokoškolském studiu na Slovensku (zvláště ve směru zájmů našich olympioniků) informoval publikum doc. dr M. Kolibiar a konečně akademik E. Čech podal krátký populární výklad o topologii. Beseda byla uzavřena diskusí, v níž sami účastníci soutěže přišli s řadou dotazů a připomínek.

Dvacet nejlepších účastníků III. kola bylo podle organisačního řádu soutěže prohlášeno vítězi šestého ročníku matematické olympiady. Na prvních třech místech se mezi dvaceti vítězi umístili tito studenti:

*Jaroslav Lukeš*, žák jedenáctileté střední školy v Praze XVI, U Santošky č. 1.
*Jaroslav Morávek*, žák jedenáctileté střední školy v Chrudimi.
*Karel Najzar*, žák jedenáctileté střední školy v Ostravě VII.

*Jiří Sedláček*, Praha.

## UPOZORNĚNÍ ČTENÁŘŮM

Články napsané u příležitosti jubileí A. L. Cauchyho a L. Eulera najde čtenář v časopise „Pokroky matematiky, fysiky a astronomie", *2* (1957), seš. 6. Jsou to články:

a) *F. Balada*, Brno: Před sto lety zemřel Augustin Louis Cauchy,
b) *F. Veselý*, Plzeň: Život a význam díla Leonharda Eulera.

*Redakce.*

CONTENTS OF SUMMARIES



ADRESY AUTORŮ, JICHŽ PŘÍSPĚVKY JSOU OTIŠTĚNY V TOMTO ČÍSLE

*Vladimír Horák*, Brno, Kotlářská 2 (Přírodovědecká fakulta MU).
*Václav Metelka*, Liberec, Hálkova 6 (Vysoká škola strojní).

## DALŠÍ MATEMATICKÉ ČASOPISY

vydávané Matematickým ústavem Československé akademie věd, ČSR, Praha II, Žitná 25

Kromě Časopisu pro pěstování matematiky (dříve Časopis pro pěstování matematiky a fysiky) vydává Matematický ústav ČSAV tyto časopisy:

### ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ CZECHOSLOVAK MATHEMATICAL JOURNAL

Ročník *7* (*82*), 1957

Vychází čtyřikrát ročně po 160 stranách. Cena jednotlivého sešitu 30 Kčs, roční předplatné 120 Kčs. Je psán ve světových jazycích s résumé v dalším světovém jazyce.

*

### APLIKACE MATEMATIKY

Ročník *2* (1957)

Vychází šestkrát ročně po 80 stranách. Cena jednotlivého čísla Kčs 7,50, roční předplatné Kčs 45,—. Je psán česky, resp. slovensky; články jsou doplněny souhrny v jazyce ruském a dalším světovém.

*

REDAKCE všech tří časopisů: ČSR, Praha II, Žitná 25, tel. 24 11 93, 22 72 17 a 22 72 23. Časopisy lze objednat v Nakladatelství Československé akademie věd, ČSR, Praha II, Vodičkova 40, tel. 24 62 41 až 49.

*Nakladatelství Československé akademie věd,*
Praha II, Václavské n. 34 vydalo publikaci:

# TRANSACTIONS OF THE FIRST PRAGUE CONFERENCE ON INFORMATION THEORY, STATISTICAL DECISION FUNCTIONS, RANDOM PROCESSES

held at Liblice near Prague from November 28 to 30, 1956, 356 pages, Price Kčs 34,—. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1957.

Contents: Preface. — *Blackwell, D.:* The Entropy of Functions of Finite-State Markov Chains. — *Гнеденко, Б. В.:* О некоторых советских работах по теории информации — *Hansson, H.:* A Display of Information Theory Problems Concerning Telephone Transmission. — *Rajski, C.:* The Selectivity of the Parametric Tests. — *Rajski, C.:* The Bayes Rule and the Entropy. — *Prouza, L.:* Bemerkung zur Prediktion mittels eines lernenden Filters. — *Driml, M.* and *Špaček, A.:* Continuous Random Decision Processes Controlled by Experience. — *Hanš, O.:* Generalized Random Variables. — *Hanš, O.:* Random Fixed Point Theorems. — *Hanš, O.:* Inverse and Adjoint Transforms of Linear Bounded Random Transforms. — *Hanš, O.:* Almost Sure Convergence Theorem for Random Schwartz Distributions. — *Nedoma, J.:* Note on Generalized Random Variables. — *Nedoma, J.:* The Capacity of a Discrete Channel. — *Pérez, A.:* Notions généralisées d'incertitude, d'entropie et d'information du point de vue de la théorie de martingales. — *Pérez, A.:* Sur la théorie de l'information dans le cas d'un alphabet abstrait. — *Pérez, A.:* Sur la convergence des incertitudes, entropies et informations échantillon (sample) vers leurs valeurs vraies. — *Špaček, A.:* An Elementary Experience Problem. — *Špaček, A.:* Prolongement des transformations aléatoires. — *Ullrich, M.:* Some Theorems on Random Schwartz Distributions. — *Votavová, L.:* Ein Satz von Extremen der Entropie. — *Winkelbauer, K.:* Experience in Games of Strategy and in Statistical Decision.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd, Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova 40, telefon 246241-9 — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. Objednávky přijímá Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova 40. Účet Státní banky československé č. 438-214-0087, číslo směrovací 0152-1. Snížený poplatek povolen výměrem 313-378-Be-55. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Vyšlo 20. XI. 1957 — A-03080.

Dohlédací pošt. úřad Praha 022